thema mathe matik

für die 6. Klasse AHS

Clemens Brand
Anita Dorfmayr
Josef Lechner
August Mistlbacher
Alfred Nussbaumer

VERITAS

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur, BMUKK-5.050/0058-Präs.8/2009 als für den Unterrichtsgebrauch an allgemein bildenden höheren Schulen für die 6. Klasse im Unterrichtsgegenstand Mathematik geeignet erklärt.

Schulbuchnummer: **150.233**

Verwendete Symbole

Gruppenarbeit kann bei dieser Aufgabe zu besseren Ergebnissen führen.

Technologieeinsatz: Diese Aufgabe soll mit Computerunterstützung, d.h. Einsatz von CAS, dynamischer Geometrie, Tabellenkalkulation etc. bearbeitet werden. Es gibt jedoch viele weitere Aufgaben, wo Technologie sinnvoll eingesetzt werden kann.

Grundaufgaben

weiterführende bzw. anspruchsvollere Aufgaben

Bildnachweis

Textnachweis

53: Henri Poincaré: Wissenschaft und Hypothese (dt. Ausgabe F. u. L. Lindemann), B. G. Teubner, Leipzig 1904, S. 13.
53: David Hilbert: Über das Unendliche, in: Mathematische Annalen 95, S. 161-190 (1926).

Dieses Werk ist für den Schul- und Unterrichtsgebrauch bestimmt.

Es darf gemäß § 42 (6) des Urheberrechtsgesetztes auch für den eigenen Unterrichtsgebrauch nicht vervielfältigt werden.

© VERITAS-VERLAG, Linz

Alle Rechte vorbehalten, insbesondere das Recht der Verbreitung (auch durch Film, Fernsehen, Internet, fotomechanische Wiedergabe, Bild-, Ton- und Datenträger jeder Art) oder der auszugsweise Nachdruck.

1. Auflage (2010)

Lektorat: Veronika Weidenholzer

Herstellung: Irene Demelmair

Umschlaggestaltung und Layout: Agnes Weitzhofer

Illustrationen: Bernhard Weitzhofer, Altdorf

Bildredaktion: Alexandra Rittberger

Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK/Wien

Satz und Konstruktionen: DOKU-Consult KG, Wien

Druck, Bindung: Brüder Glöckner GmbH & Co. KG, Wöllersdorf

ISBN 978-3-7058-8371-0

Inhaltsverzeichnis

E … nur im Lehrplan für Realgymnasien bzw. Ergänzungsstoff

1. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 5
1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten 6
1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten 8
1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzeln 10
1.4 Logarithmen 12
1.5 Exponentialgleichungen – Logarithmische Gleichungen E 14
Vermischte Aufgaben 16
Sprache der Mathematik 19
Thema – Geschichte der Rechenhilfen 20
Meine Kapitelcheckliste zu Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 22
Teste dein Wissen! 24

2. Gleichungen und Ungleichungen 25
2.1 Lineare Gleichungssysteme in drei Unbekannten 26
2.2 Sonderfälle bei linearen Gleichungssystemen 30
2.3 Ungleichungen, Schranken, Genauigkeit 32
2.4 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen 34
2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidung 36
2.6 Lineare Ungleichungssysteme in zwei Unbekannten E 40
2.7 Näherungsverfahren für Gleichungen E 42
Vermischte Aufgaben 44
Sprache der Mathematik 47
Thema – Lineare Optimierung 48
Meine Kapitelcheckliste zu Gleichungen und Ungleichungen 50
Teste dein Wissen! 52

3. Folgen und Reihen 53
3.1 Iterationsprozesse E 54
3.2 Reelle Zahlenfolgen 56
3.3 Eigenschaften von Folgen 58
3.4 Grenzwerte 62
3.5 Vollständigkeit der reellen Zahlen E 64
3.6 Arithmetische und geometrische Folgen 66
3.7 Arithmetische und geometrische Reihen 70
3.8 Anwendungen in der Finanzmathematik 72
3.9 Die Zahl e 80
3.10 Vollständige Induktion E 82
Vermischte Aufgaben 84
Sprache der Mathematik 89
Thema – Fibonacci 90
Meine Kapitelcheckliste zu Folgen und Reihen 92
Teste dein Wissen! 94

4. Analytische Geometrie des Raumes 95
4.1 Vektoren im Raum 96
4.2 Rechnen mit Vektoren im Raum – Betrag eines Vektors 98
4.3 Das skalare Produkt 100
4.4 Geraden im Raum 102
4.5 Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum 104
4.6 Das vektorielle Produkt – Kreuzprodukt 106
4.7 Ebenengleichung in Parameterform 108
4.8 Ebenengleichung in Normalvektorform 110
4.9 Gerade und Ebene 112
4.10 Lage von zwei Ebenen 114
4.11 Gleichungssysteme und Ebenen 116

4.12 Abstandsberechnungen ... 118
4.13 Geometrische Anwendungen, Volumsberechnungen ... 120
Vermischte Aufgaben ... 122
Sprache der Mathematik ... 127
Thema – Schnitte von Prismen und Pyramiden mit Ebenen ... 128
Meine Kapitelcheckliste zu Analytische Geometrie des Raumes ... 130
Teste dein Wissen! ... 132

5. Reelle Funktionen ... 133
5.1 Nullstellen und Fixpunkte ... 134
5.2 Monotonie und Extremstellen ... 136
5.3 Symmetrie und Periodizität ... 138
5.4 Bijektive Funktion und Umkehrfunktion ... 140
5.5 Potenzfunktion ... 142
5.6 Polynomfunktion und gebrochen rationale Funktion ... 144
5.7 Exponentialfunktion ... 146
5.8 Logarithmusfunktion ... 148
5.9 Sinus, Cosinus und Tangens für beliebige Winkel ... 150
5.10 Winkelfunktionen ... 152
5.11 Parametervariationen ... 154
5.12 Verketten von Funktionen ... 156
5.13 Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ E ... 158
Vermischte Aufgaben ... 160
Sprache der Mathematik ... 163
Thema – Schwingungen in der Musik ... 164
Meine Kapitelcheckliste zu Reelle Funktionen ... 166
Teste dein Wissen! ... 168

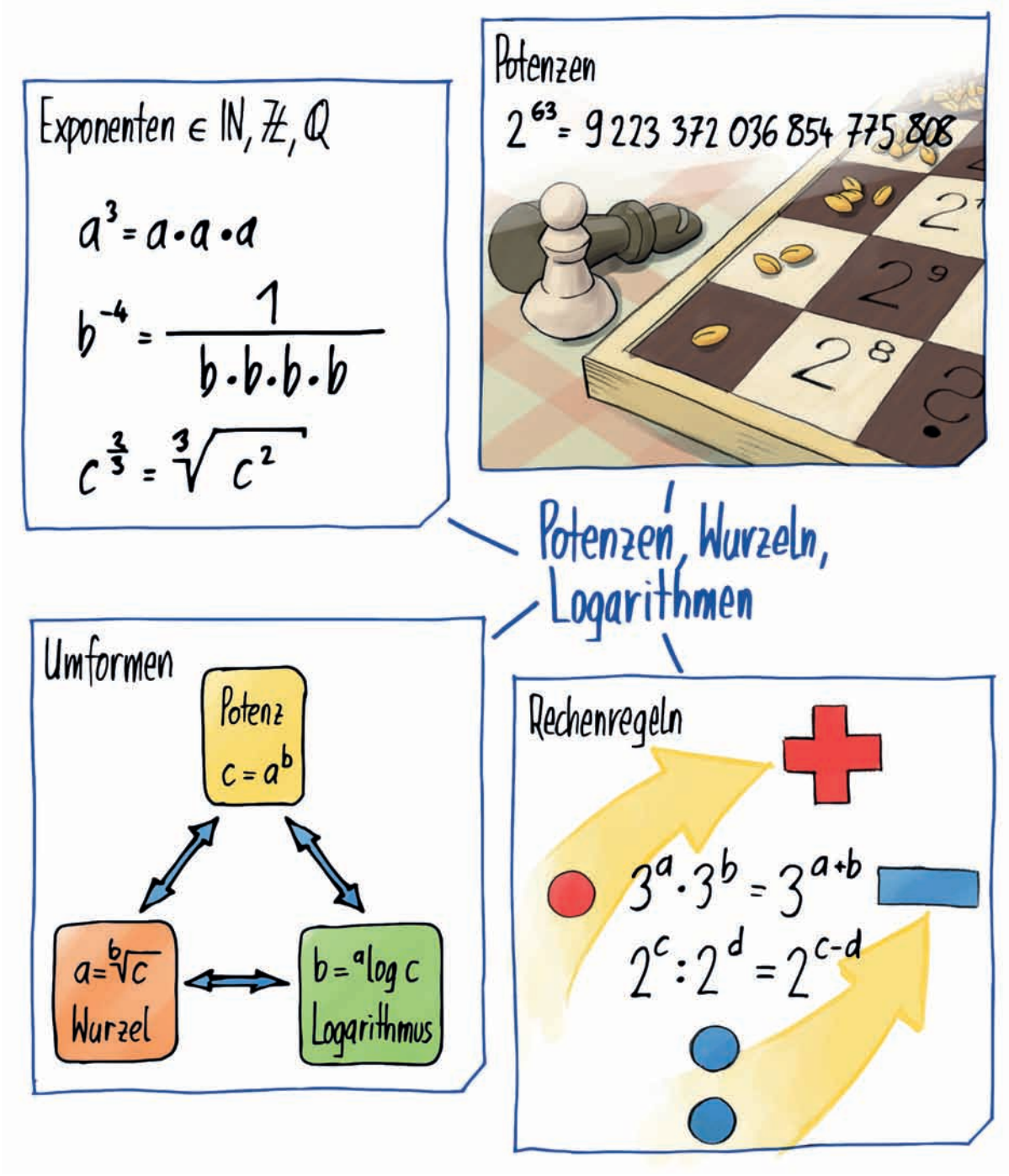
6. Modelle ... 169
6.1 Grundbegriffe ... 170
6.2 Lineares Modell ... 172
6.3 Exponentielles Modell ... 174
6.4 Beschränktes Modell E ... 176
6.5 Logistisches Modell E ... 178
6.6 Spinnwebdiagramme E ... 180
6.7 Wachstums- und Zerfallsprozesse ... 182
Vermischte Aufgaben ... 184
Sprache der Mathematik ... 187
Thema – Biomathematik ... 188
Meine Kapitelcheckliste zu Modelle ... 190
Teste dein Wissen! ... 192

7. Stochastik ... 193
7.1 Grundlagen der beschreibenden Statistik ... 194
7.2 Kennzahlen der beschreibenden Statistik ... 198
7.3 Zufallsversuche und Ereignisse ... 204
7.4 Kombinatorik ... 206
7.5 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen ... 210
7.6 Laplace'sche Zufallsereignisse ... 212
7.7 Baumdiagramme – Pfadregeln ... 214
7.8 Bedingte Wahrscheinlichkeit ... 218
7.9 Der Satz von Bayes E ... 220
Vermischte Aufgaben ... 222
Sprache der Mathematik ... 225
Thema – Das Ziegenproblem ... 226
Meine Kapitelcheckliste zu Stochastik ... 228
Teste dein Wissen! ... 230

Stichwortverzeichnis ... 231

1. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

In diesem Kapitel dreht sich alles um Gleichungen der Form $a^b = c$. Je nachdem, welche Variable die Unbekannte ist, wirst du die Gleichung durch Potenzieren, Wurzelziehen oder Logarithmieren lösen. Verschaffe dir einen Überblick:



1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition: Die *Potenz* a^n mit *Basis* $a \in \mathbb{R}$ und *Exponent* (Hochzahl) $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad \text{für } n \neq 0$$

$$a^0 = 1 \qquad \text{für } a \neq 0$$

Das Ergebnis nennen wir *Wert der Potenz*.
Zwei Potenzen sind *gleich*, wenn sie denselben Wert haben.

1 Berechne ohne Taschenrechner: **a)** 2^4 **b)** $(-5)^3$

Ausführung: **a)** $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ **b)** $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

2 Vereinfache zu einem Term ohne Klammern: **a)** $(-2a)^3$ **b)** $(3a)^2 - 3a^2$

Ausführung: **a)** $(-2a)^3 = (-2a) \cdot (-2a) \cdot (-2a) = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot a \cdot a \cdot a = -8a^3$

b) $(3a)^2 - 3a^2 = (3a) \cdot (3a) - 3a^2 = 9a^2 - 3a^2 = 6a^2$

Statt der Definition der Potenz, kannst du auch folgende Rechengesetze verwenden:

Satz: Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^k : a^n = a^{k-n} \qquad \text{für } k \geqslant n$$

$$(a^k)^n = a^{k \cdot n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{für } b \neq 0$$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k, n \in \mathbb{N}$

Beweis für $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

Wir schreiben die Potenz als Produkt und vereinfachen:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Klammern}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}} = a^n \cdot b^n$$

Analog beweist du in den Aufgaben 14 und 15 die restlichen Rechenregeln aus obigem Satz.

3 Vereinfache so weit wie möglich: $\dfrac{(6a)^3 \cdot (5b^2)^4}{(25a^2)^2 \cdot (-2b^2)^3}$

Ausführung: Löse zuerst die Klammern auf und kürze wann immer möglich!

$$\frac{(6a)^3 \cdot (5b^2)^4}{(25a^2)^2 \cdot (-2b^2)^3} = \frac{6^3 a^3 \cdot 5^4 b^8}{25^2 a^4 \cdot (-2)^3 b^6} \qquad \text{6 und 25 faktorisieren}$$

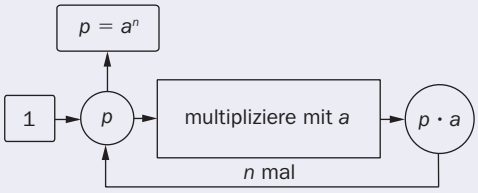
$$= -\frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot a^3 \cdot b^8}{2^3 \cdot 5^4 \cdot a^4 \cdot b^6} \qquad \text{Kürzen}$$

$$= -\frac{27b^2}{a}$$

G

Grundvorstellung: Die Berechnung von a^n kannst du dir mit einer Iterationsmaschine vorstellen: Sie multipliziert 1 so oft mit a wie die Hochzahl n angibt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad \text{für } n \neq 0$$



Um a^0 zu berechnen, multipliziert die Iterationsmaschine die Zahl 1 null Mal mit a. Es wird also überhaupt nichts multipliziert! Daher: $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$). Warum dies nur für $a \neq 0$ gilt, besprechen wir später.

Aufgaben

4 Berechne ohne Taschenrechner:
a) 5^3 **b)** 6^4 **c)** 8^3 **d)** 10^5 **e)** 9^5 **f)** 1^7

5 Wie 4:
a) $(-4)^5$ **b)** $(-1)^9$ **c)** $(-3)^3$ **d)** $(-2)^6$

6 Wie 4:
a) 25^3 **b)** 15^4 **c)** $(-11)^5$ **d)** $(-20)^3$

7 Wie 4:
a) 10^3 **b)** 10^6 **c)** 10^9
d) $(-10)^2$ **e)** $(-10)^3$ **f)** $(-10)^5$

8 Vereinfache zu einem Term ohne Klammern. Arbeite
(1) ohne Verwendung der Rechengesetze.
(2) mit den Rechengesetzen für Potenzen.
a) $(3a)^4$ **b)** $(-5a)^3$ **c)** $(-4a)^5$
d) $(9a)^6$ **e)** $(7a)^2$ **f)** $(-a)^8$

9 Wie 8:
a) $(-2a)^5$ **b)** $(6a)^4$ **c)** $(-12a)^6$
d) $(15a)^3$ **e)** $(-10a)^5$ **f)** $(7a)^4$

10 Wie 8:
a) $(2a^2)^5$ **b)** $(-a^3)^6$ **c)** $(5a^3)^3$
d) $(9a^4)^2$ **e)** $(-3a^4)^2$ **f)** $(8a^4)^3$

11 Wie 8:
a) $(2a)^4 \cdot a^3$ **b)** $(-2a)^3 : (4a)^2$
c) $-5a^4 \cdot (3a)^2$ **d)** $(6a)^4 : (36a^3)$
e) $(-10a)^6 : (10a)^5$ **f)** $81a^3 : (-18a^2)$

12 Wie 8:
a) $(-a)^5 \cdot (2a^2)^3$ **b)** $(4a^3)^2 \cdot (-2a)^3$
c) $3a^2 \cdot (-5a^3)^2$ **d)** $4 \cdot (9a^5)^2 : (-6a^2)^4$
e) $(-4a^3)^2 : (5a^2)^3$ **f)** $(-3a^2)^4 : (-9a^3)$

13 Wie 8:
a) $5a^3 - (5a)^3$ **b)** $(4a)^3 - 4a^3$
c) $(-a)^5 - a^5$ **d)** $(-2a)^4 + 2a^4$
e) $(-3a)^2 + (3a)^2$ **f)** $(-4a)^5 + (4a)^5$

14 Beweise, dass gilt: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

15 Beweise folgende Rechengesetze:
a) $a^k \cdot a^n = a^{k+n}$
b) $a^k : a^n = a^{k-n}$ für $k \geqslant n$
c) $(a^k)^n = a^{k \cdot n}$

16 Für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$ ist der Wert der Potenz a^n mit $a < 0$ **a)** positiv, **b)** negativ? Begründe jeweils!

17 Jan meint: „a^n ist größer als a, weil beim Potenzieren wiederholt multipliziert wird."
(1) Warum ist Jans Behauptung im Allgemeinen falsch?
(2) Gibt es Voraussetzungen, für die die Behauptung richtig ist? Welche?
Begründet eure Antworten!

18 Conny behauptet, dass $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ist. Erklärt auf zwei Arten, warum dies im Allgemeinen nicht zutrifft!

19 Vereinfache so weit wie möglich.
a) $-5a^3 \cdot (-4a^3b)^5$ **b)** $(-2ab^3)^2 \cdot 4b^2$
c) $(-a^2b^5)^3 \cdot (-3) \cdot b^2$ **d)** $(4ab^3)^2 \cdot (-3a)^4 b^3$
e) $(-2a^3b)^5 \cdot (4ab^3)^2$ **f)** $(6ab^2)^3 \cdot (2a^2b^2)^3$

20 Wie 19:
a) $\frac{(-4a)^5 \cdot b^3}{(ab)^4}$ **b)** $\frac{(a^2b)^5}{-3a^7b^2}$ **c)** $\frac{(6a^2 \cdot 3b^3)^3}{(-2ab)^6}$
d) $\frac{(-3a^2 \cdot 5b^3)^2}{(2a^2b)^5}$ **e)** $\frac{10 \cdot (-a^2b^3)^2}{(5a)^2b^4}$ **f)** $\frac{-2 \cdot (5a^2b)^4}{6a^2 \cdot (-3b)^3}$

1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Was meinst du: Hat es einen Sinn, negative ganze Zahlen im Exponenten zuzulassen?

Du hast im letzten Abschnitt unter anderem gelernt, dass $a^k : a^n = a^{k-n}$ für natürliche Exponenten k, n mit $k \geqslant n$ gilt. Dieses Rechengesetz wollen wir nun auf beliebige natürliche Exponenten erweitern, also auch für $k < n$ anwenden. Dass dies sinnvoll ist, siehst du am folgenden Beispiel:

Wir berechnen $\frac{a^2}{a^8}$ auf zwei Arten:

ohne Gesetz: $\frac{a^2}{a^8} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^6}$ mit (erweitertem) Gesetz: $\frac{a^2}{a^8} = a^{2-8} = a^{-6}$

Wir sehen: Exponenten können durch diese Erweiterung des Rechengesetzes negativ werden. Wir wollen nun auch mit negativen Hochzahlen rechnen und erweitern daher die Definition einer Potenz. Dabei bleiben die „alten“ Rechengesetze von Seite 6 gültig:

Definition: Die *Potenz* a^z mit Basis $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und Exponent (Hochzahl) $z \in \mathbb{Z}$ ist definiert als:

$$a^z = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{z \text{ Faktoren}} \qquad \text{für } z > 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^z = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{|z| \text{ Faktoren}}} \qquad \text{für } z < 0$$

Bemerkung: Wir können somit jede Potenz mit negativem Exponenten als Bruch und umgekehrt jeden Bruch mithilfe von Potenzen anschreiben.

21 Schreibe a^{-6} als Bruch und stelle $\frac{2}{a^4}$ mithilfe einer Potenz dar.

Ausführung: Verwende obige Definition.

$$a^{-6} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^6} \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{a^4} = 2 \cdot \frac{1}{a^4} = 2 \cdot a^{-4}$$

22 Schreibe mit positiven Exponenten: $\frac{k^3 \cdot a^{-4}}{a^{-3} \cdot k^{-1}}$

Ausführung: Schreibe zuerst die Potenzen mit negativen Hochzahlen als Brüche, löse dann den Doppelbruch auf und kürze:

$$\frac{k^3 \cdot a^{-4}}{a^{-3} \cdot k^{-1}} = \frac{k^3 \cdot \frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{k}} = \frac{\frac{k^3}{a^4}}{\frac{1}{a^3 \cdot k}} = k^3 \cdot a^3 \cdot k = \frac{k^4}{a}$$

23 Schreibe als Produkt von Potenzen: $\frac{5^2 \cdot a^6 \cdot (-4b)^2}{5 \cdot (2a)^4 \cdot b^3}$

Ausführung: Löse zuerst die Klammern auf und kürze wann immer möglich!

$$\frac{5^2 \cdot a^6 \cdot (-4b)^2}{5 \cdot (2a)^4 \cdot b^3} = \frac{5^2 \cdot a^6 \cdot 16b^2}{5 \cdot 16a^4 \cdot b^3} = \frac{5a^2}{b} = 5 \cdot a^2 \cdot b^{-1}$$

Aufgaben

24 Berechne ohne Taschenrechner:

a) 3^{-2} **b)** 4^{-6} **c)** 5^{-4}

d) 8^{-3} **e)** 2^{-5} **f)** 1^{-3}

25 Wie 24:

a) $(-5)^{-3}$ **b)** $(-8)^{-2}$ **c)** $(-1)^{-6}$

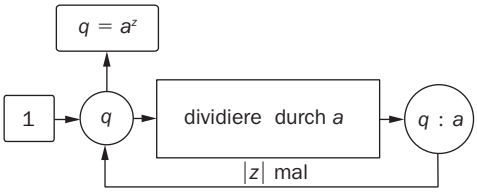
d) $(-6)^{-4}$ **e)** $(-5)^{-4}$ **f)** $(-2)^{-8}$

26 Wie 24:

a) 10^{-2} **b)** 10^{-3} **c)** 10^{-6}

d) $(-10)^{-4}$ **e)** $(-10)^{-9}$ **f)** $(-10)^{-1}$

27 Wie können wir uns das Potenzieren mit einem Exponenten $z < 0$ mithilfe dieser Iterationsmaschine vorstellen? Formuliert dazu einen Satz analog zur Grundvorstellung auf Seite 7.



28 Schreibe als Bruch:

a) a^{-4} **b)** a^{-8} **c)** a^{-6}

d) $(3a)^{-2}$ **e)** $(2a^2)^{-6}$ **f)** $(-5a)^{-9}$

29 Wie 28:

a) $b^2 a^{-3}$ **b)** $a^5 b^{-4}$

c) $2a^{-5} b^3$ **d)** $4a^{-3} \cdot (-3b)^2$

e) $-a^2 \cdot (5b)^{-4}$ **f)** $3a^4 \cdot (2b)^{-3}$

30 Stelle mithilfe einer Potenz (ohne Bruch) dar.

a) $\frac{8}{a^3}$ **b)** $-\frac{1}{a^5}$ **c)** $\frac{9}{a^2}$ **d)** $\frac{5}{a^6}$ **e)** $\frac{16}{a^4}$ **f)** $-\frac{6}{a^8}$

31 Wie 30:

a) $\frac{4}{9a^2}$ **b)** $\frac{27}{64a^3}$ **c)** $\frac{64}{25a^2}$

d) $-\frac{9}{64a^6}$ **e)** $\frac{9}{49a^4}$ **f)** $-\frac{8}{27a^6}$

32 Schreibe mit positiven Exponenten und kürze wenn möglich.

a) $24b^3 \cdot (2a)^{-5}$ **b)** $18a^{-3} \cdot (3b)^4$

c) $(6b)^{-2} \cdot 36a^{-6}$ **d)** $8a^{-4} \cdot (3b)^{-2}$

33 Wie 32:

a) $\frac{18a^{-4}}{(3b)^{-2}}$ **b)** $\frac{(4b)^{-3}}{16a^{-4}}$ **c)** $\frac{21a^{-5}}{(7b)^{-2}}$ **d)** $\frac{-(3a)^{-4}}{(-2b)^3}$

34 Wie 32:

a) $\frac{t^2 \cdot s^{-4}}{(-3s) \cdot t^5}$ **b)** $\frac{4r^2 \cdot s^{-3}}{(-2r)^4 \cdot (5s)^{-2}}$

c) $\frac{r^{-3} \cdot 4s^6}{(-3s^2)^3 \cdot (-3r)^{-2}}$ **d)** $\frac{(5t)^4 \cdot (-3k)^{-3}}{-125t^3 \cdot (6k)^{-4}}$

35 Schreibe als Produkt von Potenzen und vereinfache wenn möglich.

a) $\frac{b^5}{16a^4}$ **b)** $\frac{a^5}{-32b^5}$ **c)** $\frac{8b^3}{9a^4}$

d) $\frac{a^2}{9b^4}$ **e)** $\frac{9a^4}{25b^2}$ **f)** $\frac{-27a^3}{b^6}$

36 Wie 35:

a) $\frac{4 \cdot (-3a)^5 \cdot b^3}{6a^3 \cdot (3b)^4}$ **b)** $\frac{(-3b)^2 \cdot a}{6 \cdot (ab)^4}$

c) $\frac{-(5a)^3 \cdot (2b)^4}{12a^4 \cdot b^6}$ **d)** $\frac{9 \cdot (-ab)^6 \cdot (-3b)^2}{4a^2 \cdot (2ab)^3}$

37 Wie 35:

a) $\frac{-12r^5 \cdot (3kr)^2}{-r^3 \cdot 12k^{-1}}$ **b)** $\frac{(rs)^3 \cdot (4s)^{-1}}{(8r)^4 \cdot 6s^5}$

c) $\frac{(3kt)^{-2} \cdot (2t)^5}{-5t^3 \cdot (4k)^2}$ **d)** $\frac{-27rs^3 \cdot (5s)^2}{15s^6 \cdot (4rs)^{-1}}$

38 Wie 35:

a) $\frac{-(5a^2b^{-3})^3}{(2a^{-1}b)^2} : \left(\frac{10a^3}{b^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5a^3}{-b^2}\right)^{-5}$

b) $\left(\frac{-a^{-3}b^2}{7a^{-1}b}\right)^5 : \left(\frac{-a^2}{21b^{-3}}\right)^{-3} \cdot \frac{(7b^{-2})^8}{(3a)^{-3}}$

39 Julia merkt sich diese Eselsbrücke: „Alles, was unter dem Bruchstrich steht, bekommt ein „Minus“ im Exponenten.“

a) Was genau meint Julia damit? Erklärt und gebt drei Beispiele an!

b) Stimmt Julias Regel im Allgemeinen? Begründet!

40 Saschas Eselsbrücke lautet: „Alles, was von oben nach unten wandert, verliert ein „Minus“ im Exponenten.“

a) Was genau meint Sascha damit? Erklärt und gebt drei Beispiele an!

b) Stimmt Saschas Regel im Allgemeinen? Begründet!

41 Formuliere für dich selbst eine Eselsbrücke, mit der du dir das Rechnen mit ganzzahligen Exponenten merken kannst. Du kannst auch eine Eselsbrücke aus den letzten Aufgaben verwenden. Begründe deine Wahl und gib geeignete Beispiele an.

1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzeln

Wenn wir eine Gleichung $x^k = a$ lösen, müssen wir die Basis einer Potenz ermitteln. Dies machen wir, indem wir eine geeignete Wurzel ziehen:

Definition: Die *k*-te Wurzel aus a ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^k = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$x^k = a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[k]{a}$$

Bemerkung: Den Ausdruck unter der Wurzel nennen wir auch **Radikand**.

Wir haben nun schon mit Potenzen mit natürlichen und ganzzahligen Exponenten gerechnet. Was meinst du: Hat es auch Sinn, einen Bruch im Exponenten zuzulassen?

Was könnte $a^{\frac{1}{3}}$ bedeuten? Wir stellen eine Gleichung auf und potenzieren sie so, dass der Bruch im Exponenten wegfällt:

$$a^{\frac{1}{3}} = x \quad \Rightarrow \quad \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^3 \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = x^3 \quad \Rightarrow \quad a = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{a}$$

Wir sehen: Ein Bruch im Exponenten beschreibt eine Wurzel und kann tatsächlich sinnvoll verwendet werden. Wir wollen daher nun auch mit rationalen Hochzahlen rechnen. Wir erweitern die Definition einer Potenz wieder so, dass die „alten“ Rechengesetze von Seite 6 gültig bleiben:

Definition: Die *Potenz* $a^{\frac{1}{k}}$ mit Basis $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und Exponent (Hochzahl) $\frac{1}{k} \in \mathbb{Q}^+$ ist definiert als *k*-te Wurzel aus a:

$$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$$

42 **a)** Stelle $\sqrt[6]{a^5}$ als Potenz dar. **b)** Schreibe $a^{-\frac{4}{5}}$ mithilfe einer Wurzel.

Ausführung: Verwende obige Definition und die Rechenregeln für Potenzen:

a) $\sqrt[6]{a^5} = (a^5)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$

b) Der Exponent ist negativ, daher können wir die Potenz als Bruch schreiben. Dann schreiben wir den Nenner entsprechend obiger Definition als Wurzel: $a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{(a^4)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

Satz: Rechengesetze für Wurzeln

in Wurzelschreibweise	in Potenzschreibweise
$\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a \cdot b}$	$a^{\frac{1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{k}}$
$\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[k]{\frac{a}{b}}$	$\frac{a^{\frac{1}{k}}}{b^{\frac{1}{k}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k}}$
$\sqrt[k]{a^k \cdot b} = a \cdot \sqrt[k]{b}$	$(a^k \cdot b)^{\frac{1}{k}} = a \cdot b^{\frac{1}{k}}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+, \forall\, k \in \mathbb{N}$

Beweis: Siehe Aufgaben 51 und 52.

Partielles (teilweises) Wurzelziehen

bedeutet, dass ein Teil des Radikanden vor die Wurzel gezogen wird: $\sqrt[k]{a^k \cdot b} = a \cdot \sqrt[k]{b}$ (s. Beispiel 43). Umgekehrt kann man auch Ausdrücke unter die Wurzel bringen (s. Beispiel 44).

43 Vereinfache den Wurzelterm: $\sqrt[4]{\frac{16}{a}} \cdot \sqrt[4]{a^2}$

Ausführung: $\sqrt[4]{\frac{16}{a}} \cdot \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot a^2}{a}} = \sqrt[4]{16 \cdot a} = \sqrt[4]{2^4 \cdot a} = 2 \cdot \sqrt[4]{a}$

44 Schreibe mit einer Wurzel: $2a \cdot \sqrt{\frac{5}{6a}}$

Ausführung: $2a \cdot \sqrt{\frac{5}{6a}} = \sqrt{(2a)^2 \cdot \frac{5}{6a}} = \sqrt{4a^2 \cdot \frac{5}{6a}} = \sqrt{\frac{4a^2 \cdot 5}{6a}} = \sqrt{\frac{10a}{3}}$

Aufgaben

45 Stelle mithilfe einer Wurzel dar.

a) $a^{\frac{2}{3}}$ b) $a^{\frac{4}{5}}$ c) $a^{\frac{2}{5}}$

d) $a^{\frac{1}{2}}$ e) $a^{\frac{3}{4}}$ f) $a^{\frac{3}{5}}$

46 Wie 45:

a) $a^{-\frac{1}{2}}$ b) $a^{-\frac{3}{4}}$ c) $a^{-\frac{2}{3}}$

d) $a^{-\frac{1}{4}}$ e) $a^{-\frac{2}{5}}$ f) $a^{-\frac{3}{5}}$

47 Stelle als Potenz dar.

a) $\sqrt[3]{a^2}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{a^2}$

d) $\sqrt[8]{a^5}$ e) $\sqrt[9]{a^4}$ f) $\sqrt[7]{a^6}$

48 Wie 47:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[2]{a}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

49 Schreibe mithilfe von Potenzen.

a) $\sqrt[4]{a^3 b^2}$ b) $\sqrt[3]{(4a)^2 b}$ c) $\sqrt{a^3 b^2}$

d) $\sqrt[5]{(4a)^3 b^4}$ e) $\sqrt[3]{3a^2 b^5}$ f) $\sqrt{5a^3 b^7}$

50 Sebastian hat herausgefunden, dass

$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$$

ist. Findet heraus, ob er recht hat und begründet eure Entscheidung allgemein.

51 Beweise die Regel für das Rechnen mit Wurzeln mithilfe der Rechengesetze für Potenzen.

a) $\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a \cdot b}$ b) $\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[k]{\frac{a}{b}}$

52 Erklärt jeden Schritt des folgenden Beweises für das partielle Wurzelziehen genau:

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{a^k \cdot b} &= (a^k \cdot b)^{\frac{1}{k}} \\ &= (a^k)^{\frac{1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}} \\ &= a^{k \cdot \frac{1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}} \\ &= a^1 \cdot b^{\frac{1}{k}} \\ &= a \cdot \sqrt[k]{b}\end{aligned}$$

53 Vereinfache:

a) $\sqrt{a^2 \cdot 9b^2}$ b) $\sqrt{50a^3 b^6}$ c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt{4b}$

d) $\sqrt{\frac{25a^2}{b^2}} \cdot \sqrt{4b^2}$ e) $\frac{\sqrt{a^2 \cdot b^2}}{a \cdot b}$ f) $\frac{3a^2 b}{\sqrt{9a^5 \cdot b}}$

54 Wie 53:

a) $\sqrt[3]{9a^4 b^5}$ b) $\sqrt[4]{16a^4 b^9}$

c) $\sqrt[3]{9b^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3a^4}{4b^5}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{4a^7}{27b^4}} \cdot \sqrt[5]{72b^2}$

e) $\frac{4ab^3}{\sqrt[5]{ab^7 \cdot (2a)^3}}$ f) $\frac{\sqrt[4]{16a^5 \cdot (3b)^5}}{3a^2 b^3}$

55 Wie 53:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

b) $\sqrt{72} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$

c) $\sqrt{48} + \sqrt{72} - \sqrt{12} - \sqrt{50}$

d) $\sqrt{75} + \sqrt{32} - \sqrt{27} - \sqrt{18}$

Hinweis: Vereinfache zuerst durch partielles Wurzelziehen.

56 Schreibe mit einer Wurzel:

a) $a \cdot \sqrt{3a}$ b) $a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a^3}}$ c) $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{6}{a}}$

d) $\frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}$ e) $\frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{3b}{a}}$ f) $\frac{b}{5} \cdot \sqrt{\frac{10a}{b^3}}$

1.4 Logarithmen

Wenn wir eine Gleichung $a^x = b$ lösen, müssen wir den Exponenten einer Potenz ermitteln. Das ist manchmal ganz einfach, zum Beispiel: $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$. Aber wie groß ist x in der Gleichung $2^x = 10$? Hier wissen wir nur, dass $2^3 < 10 < 2^4$ und daher $3 < x < 4$ ist. Um die Lösung solcher Gleichungen genau(er) zu ermitteln, verwenden wir den Logarithmus:

Definition: Der *Logarithmus von b zur Basis a* ist die Lösung der Gleichung $a^x = b$ $(a, b > 0)$:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^a\log b$$

b nennen wir den *Numerus*.

G

Grundvorstellung: Ein Logarithmus ist eine Hochzahl. $\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus}$

57 Berechne: **a)** ${}^{10}\log 1\,000$ **b)** ${}^{2}\log \frac{1}{16}$ **c)** ${}^{a}\log a^n$ für $a, n > 0$

Ausführung: Stelle eine Gleichung auf und löse sie in Potenzschreibweise:

a) ${}^{10}\log 1\,000 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 1\,000 \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 10^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ also: ${}^{10}\log 1\,000 = 3$

b) ${}^{2}\log \frac{1}{16} = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$ also: ${}^{2}\log \frac{1}{16} = -4$

c) ${}^{a}\log a^n = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = a^n \quad \Leftrightarrow \quad x = n$ also: ${}^{a}\log a^n = n$

Satz: Rechengesetze für Logarithmen

$${}^a\log (r \cdot s) = {}^a\log r + {}^a\log s$$

$${}^a\log \left(\frac{r}{s}\right) = {}^a\log r - {}^a\log s$$

$${}^a\log (r^c) = c \cdot {}^a\log r \qquad a, r, s \in \mathbb{R}^+$$

Beweis für ${}^a\log (r \cdot s) = {}^a\log r + {}^a\log s$:

Wir nennen die beiden Logarithmen auf der rechten Seite der Gleichung x bzw. y und berechnen damit die linke Seite. Weiters verwenden wir, dass ${}^a\log a^n = n$ (vergl. Beispiel 57 c)).

$$\left.\begin{array}{l} {}^a\log r = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = r \\ {}^a\log s = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = s \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad {}^a\log (r \cdot s) = {}^a\log (a^x \cdot a^y) = {}^a\log a^{x+y} = x + y = {}^a\log r + {}^a\log s$$

Analog beweist du in Aufgabe 72 die restlichen Rechenregeln aus obigem Satz.

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt auch **dekadischer Logarithmus** (Zehnerlogarithmus).

Der Logarithmus zur Basis 2 wird als **binärer Logarithmus** (Zweierlogarithmus) bezeichnet.

Hinweis

Für den dekadischen Logarithmus findest du eine Taste auf deinem Taschenrechner. Suche nach einer log- oder lg-Taste.

Schreibweise: Wenn es nicht auf die Basis ankommt oder klar ist, welche Basis a gemeint ist, schreiben wir kurz log statt ${}^a\log$.

58 Schreibe als Summe von Logarithmen: $\log \frac{5a^3}{(a-3)^4}$

Ausführung: $\log \frac{5a^3}{(a-3)^4} = \log (5a^3) - \log (a-3)^4 = \log 5 + \log a^3 - 4 \cdot \log (a-3) =$

$= \log 5 + 3 \cdot \log a - 4 \cdot \log (a-3)$

59 Schreibe mit nur einem Logarithmus: $6 \log a + \log(3a - b) - 2 \log(b - a)$

Ausführung: Verwende die Rechengesetze für Logarithmen:

$$6 \log a + \log(3a - b) - 2 \log(b - a) = \log a^6 + \log(3a - b) - \log(b - a)^2 = \log \frac{a^6 \cdot (3a - b)}{(b - a)^2}$$

Aufgaben

60 Berechne:

a) ${}^{10}\log 1\,000$ **b)** ${}^{10}\log 1\,000\,000$

c) ${}^{10}\log 0{,}000001$ **d)** ${}^{10}\log 0{,}001$

e) ${}^{10}\log \frac{1}{10\,000}$ **f)** ${}^{10}\log \frac{1}{10}$

61 Wie 60:

a) ${}^{2}\log 32$ **b)** ${}^{2}\log 1\,024$ **c)** ${}^{2}\log \frac{1}{256}$

d) ${}^{2}\log \frac{1}{16}$ **e)** ${}^{2}\log 0{,}5$ **f)** ${}^{2}\log 0{,}125$

62 Schreibe mithilfe eines Logarithmus und berechne den Exponenten mit dem Taschenrechner:

a) $10^x = 8\,000$ **b)** $10^x = 4\,500$

c) $10^x = 18\,900$ **d)** $10^x = 15\,000$

e) $10^x = 100\,500$ **f)** $10^x = 8\,500\,000$

63 Schreibe als Summe von Logarithmen.

a) $\log 4a^2b^5$ **b)** $\log 5a^2b^3$ **c)** $\log 8a^4b^2$

d) $\log 2a^5b^4$ **e)** $\log 9ab^5$ **f)** $\log 7a^6b^2$

64 Wie 63:

a) $\log 4a^3 \cdot (a + b)^2$

b) $\log 12a^3 \cdot (b - a)^2$

c) $\log 4a \cdot (a + 2b)^3$

d) $\log (a - b) \cdot (a + b)^2$

e) $\log (2a - b)^3 \cdot (4ab)^3$

f) $\log (a + 3b)^2 \cdot (ab)^5$

65 Wie 63:

a) $\log \frac{a^5 b}{3 \cdot (a - b)^2}$ **b)** $\log \frac{(a + 2b)^2}{2 \cdot ab^3}$

c) $\log \frac{9b^2}{(a - 2b)^3}$ **d)** $\log \frac{2ab^3}{(a + b)^5}$

66 Wie 63:

a) $\log 8 \cdot \frac{a + b}{3 \cdot (a - b)^5}$ **b)** $\log 3a \cdot \frac{2 \cdot (a - b)^3}{3b^2}$

c) $\log 2a^3 \cdot \frac{(ab)^5}{4a^2(a - b)^3}$ **d)** $\log ab^2 \cdot \frac{(2a + b)^2}{3(4a^2b^2)^3}$

67 Wie 63:

a) $\log \frac{a + b}{\sqrt{4a^3 b}}$ **b)** $\log \frac{a^2 - b^2}{\sqrt[3]{3b^2}}$

c) $\log 5 \cdot \frac{\sqrt{ab^2}}{2ab^3}$ **d)** $\log 2a \cdot \frac{5a^2 b}{\sqrt[3]{a - 8b^3}}$

68 Schreibe mit nur einem Logarithmus:

a) $2 \log a - 3 \log(a + b)$

b) $4 \log(a + b) + \log 9a$

c) $(a + b) \log(a - 3) - 4 \log(2 + b)$

d) $\log(a - 2b) + (2 + b) \log a$

69 Wie 68:

a) $4 \log(a + b) - 2 \log b + \log(a - b)$

b) $\log(2a - b) - \log(b - 2a) + 3 \log ab$

c) $3 \log b - 2 \log(a + b) - \log(a + b)$

d) $\log ab - 3 \log b + 4 \log(a + b)$

70 Wie 68:

a) $\frac{1}{2} \log 4a + 3 \log(a + b)$

b) $3 \log 6ab - \frac{1}{2} \log(a - 2b)$

c) $\frac{1}{2} \log 9b - \frac{3}{4} \log 8b$

d) $\frac{3}{2} \log 2 \cdot (a - b) + \frac{1}{3} \log 9ab^3$

71 In Beispiel 57 c) haben wir gezeigt, dass ${}^{a}\log a^n = n$. Zeige allgemein, dass auch umgekehrt gilt: $a^{{}^{a}\log n} = n$

72 Beweise folgende Rechengesetze:

a) ${}^{a}\log \left(\frac{r}{s}\right) = {}^{a}\log r - {}^{a}\log s$

b) ${}^{a}\log (r^c) = c \cdot {}^{a}\log r$

73 Beweise, dass allgemein $\forall\, a, b, n > 0$ gilt:

$${}^{a}\log \left(\sqrt[n]{b}\right) = \frac{1}{n} \cdot {}^{a}\log b$$

74 Allgemein gilt: ${}^{c}\log b = \frac{{}^{a}\log b}{{}^{a}\log c}$

a) Welche Werte dürfen a, b, c annehmen?

b) Wozu könnte man diesen Zusammenhang nutzen? Gebt konkrete Beispiele an!

Bemerkung: Beweis siehe Aufgabe 121.

75 Stelle den Logarithmus mithilfe von dekadischen Logarithmen dar und berechne den Wert mit dem Taschenrechner. Verwende den in Aufgabe 74 angegebenen Zusammenhang.

a) ${}^{3}\log 81$ **b)** ${}^{5}\log \frac{1}{243}$ **c)** ${}^{5}\log \frac{1}{225}$

d) ${}^{5}\log \frac{1}{625}$ **e)** ${}^{16}\log 65\,536$ **f)** ${}^{16}\log \frac{1}{4\,096}$

1.5 Exponentialgleichungen – Logarithmische Gleichungen E

Exponentialgleichungen

Definition: Eine *Exponentialgleichung* ist eine Gleichung mit Potenzen, bei der die Unbekannte im Exponenten steht.

76 Löse die Gleichung: $9 \cdot 3^x = 3^{5x} \cdot 3^{1-x}$

Ausführung: Stelle zuerst beide Seiten als Potenz zur gleichen Basis dar und setze dann die Exponenten gleich. Beachte: Potenzen mit gleicher Basis sind genau dann gleich, wenn auch die Exponenten übereinstimmen.

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^x &= 3^{5x} \cdot 3^{1-x} \\ 3^2 \cdot 3^x &= 3^{5x} \cdot 3^{1-x} \\ 3^{2+x} &= 3^{1+4x} && \text{gleiche Basis} \Rightarrow \text{gleiche Exponenten} \\ 2 + x &= 1 + 4x \\ 1 &= 3x \\ x &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Nicht jede Exponentialgleichung kannst du so umformen, dass auf beiden Seiten eine Potenz mit gleicher Basis steht. In diesem Fall kannst du häufig den Logarithmus zum Lösen der Gleichung einsetzen:

77 Löse die Gleichung: $4^x = 3^{x+2}$

Ausführung: Wir logarithmieren beide Seiten der Gleichung und erhalten somit eine lineare Gleichung:

$$\begin{aligned} 4^x &= 3^{x+2} && \text{Logarithmiere!} \\ \lg 4^x &= \lg 3^{x+2} && \text{Rechenregel für Logarithmen: Exponenten} \rightarrow \text{Faktoren} \\ x \cdot \lg 4 &= (x+2) \cdot \lg 3 \\ x \cdot \lg 4 &= x \cdot \lg 3 + 2 \cdot \lg 3 && \mid -x \cdot \lg 3 \\ x \cdot (\lg 4 - \lg 3) &= 2 \cdot \lg 3 && \mid : (\lg 4 - \lg 3) \\ x &= \frac{2 \cdot \lg 3}{\lg 4 - \lg 3} \\ x &\approx 7{,}64 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Du kannst beim Lösen einer Exponentialgleichung jeden beliebigen Logarithmus verwenden. Wir verwenden den dekadischen Logarithmus, da du hierfür eine Taste am Taschenrechner hast.

Hinweis

Forme die Gleichung wenn möglich zuerst so um, dass auf jeder Seite nur eine Potenz steht.

Logarithmische Gleichungen

Definition: Die Unbekannte einer *logarithmischen Gleichung* steht im Numerus eines Logarithmus.

Hinweis

Fasse die Logarithmen zuerst zu einem Logarithmus zusammen. Schreibe die Gleichung dann entsprechend der Definition des Logarithmus mithilfe einer Potenz an.

Achte bei der Lösung immer darauf, dass der Numerus eines Logarithmus positiv sein muss.

78 Löse die Gleichung: $\lg(x-2)+\lg 5=3$

Ausführung: Damit der Numerus $x-2$ positiv ist, muss $x>2$ sein.

$$\lg(x-2)+\lg 5=3$$
$$\lg(x-2)\cdot 5=3 \qquad \text{Umschreiben: } {}^a\log b=x \Leftrightarrow b=a^x$$
$$(x-2)\cdot 5=10^3$$
$$x=\frac{10^3}{5}+2$$
$$x=202$$

Da $202>2$ ist, hat die Gleichung die Lösung $x=202$.

Aufgaben

79 Löse die Exponentialgleichung:

a) $8\cdot 2^x=2^{3x}\cdot 2^{x-5}$

b) $27\cdot 3^{3x-2}=3^{2x}\cdot 3^{-x+4}$

c) $5^x\cdot 5^{3x-1}=25\cdot 5^{x-2}$

d) $10^{4x}\cdot 10^{2x-3}=10^{x+5}\cdot 100$

80 Wie 79:

a) $3^{2x}\cdot 3^{x+1}=27\cdot 9^{4-x}$

b) $25^{x+3}\cdot 5^{-x}=125\cdot 5^{3x-4}$

c) $2^{2x-1}\cdot 8^{3-x}=16\cdot 2^{5x}$

d) $36\cdot 6^{2x-1}=6^{-x}\cdot 36^{x+1}$

81 Wie 79:

a) $2^x=3^{x-4}$ **b)** $5^x=2^{x+2}$

c) $6^x=5^{2x}$ **d)** $8^{x-9}=4^x$

82 Wie 79:

a) $5^{2x}=2^{2x-1}$ **b)** $4^{2x-3}=3^{x-1}$

c) $6^{x-4}=2^{3x+4}$ **d)** $10^{x-8}=8^{5x}$

83 Wie 79:

a) $4\cdot 2^{3x}=5^{x-1}$

b) $3^{4x+1}=3\cdot 4^x$

c) $5\cdot 3^x=2\cdot 3^{x-1}$

d) $2\cdot 4^{x-1}=2\cdot 2^{5x}$

84 Wie 79:

a) $3\cdot 25^x=9^{x+2}\cdot 5^{x-1}$

b) $4\cdot 9^{2x}=3^{4-x}\cdot 2^{3x}$

c) $10^{x-2}\cdot 4^{x+2}=16^x\cdot 100$

85 Wie 79:

a) $5^x\cdot 3^{x+2}=8^{x-7}$

b) $2^{x+4}=3^x\cdot 5^{x-1}$

c) $3^{5x-1}\cdot 2^x=6^{2x-3}$

86 Löse die logarithmische Gleichung:

a) $\lg(x-4)+\lg 3=\lg 8$

b) $\lg(3x-2)-\lg 6=\lg 9^9$

c) $\lg 8-\lg(2x+5)=\lg 100$

d) $\lg 15+\lg 45=\lg(x-4)$

87 Wie 86:

a) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 10$

b) $\lg 8-\lg x=\lg(2x-1)$

c) $\lg 3x-2\cdot\lg(x-4)=\lg 8$

d) $2\cdot\lg x+\lg 2x+3=\lg 9$

88 Wie 86:

a) ${}^2\log x-{}^2\log 5={}^2\log(x-4)$

b) $3\cdot{}^2\log(x+1)-{}^2\log x=16$

c) ${}^5\log(x-1)+{}^5\log(x+1)={}^5\log 75$

Vermischte Aufgaben

Potenzen und Wurzeln

89 Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\frac{-18a^5 \cdot (4b)^3}{8a^3 \cdot (-6b)^2}$ **b)** $\frac{(-5a^2b)^4 \cdot (-4b)^3}{10a^5b^6}$

c) $\frac{(-3a^2b^3)^2 \cdot (2b)^3}{8a^2 \cdot (-ab)^3}$ **d)** $\frac{(ab)^2 \cdot (-4a^2b)^3}{(-3a)^4 \cdot (4b^2)^3}$

90 Wie 89:

a) $-8a^{-3}c^4 \cdot \frac{(3a)^2 \cdot b^5}{18a^3 \cdot (-3bc^2)^2}$

b) $4(bc^2)^{-2} \cdot \frac{(-3ac)^3 \cdot b^6}{6ab^2 \cdot (2ab^3)^{-4}}$

c) $\frac{(6a^3b)^2}{(-2b^{-2}c)^4} \cdot \frac{8ac^2}{-3a^4b}$

d) $\frac{9a^2b^{-3}}{(-4ac^3)^2} \cdot \frac{3b^4c^{-5}}{(-9a^3b)^2}$

91 Wie 89:

a) $3a^{-2}(bc)^3 : \frac{-4ab^3c^2}{-2b \cdot (2a^3c)^{-3}}$

b) $(2b)^{-3} : \frac{ac^2 \cdot (-4c)^3}{(9b^3c)^2}$

c) $\frac{(-2c)^4 \cdot a^3b}{(3ac^3)^2} : (-4ab^2c)^{-3}$

d) $\frac{5a^2bc^3}{(-3ac^2)^{-2} \cdot (2a^3b)^2} : 9b^3(a^2c)^5$

92 Wie 89:

a) $\frac{8b^3c^{-4}}{4b^3} : \frac{4a^5b^2}{(-3a^2c)^3}$ **b)** $\frac{(-a^4b)^2}{9bc^3} : \frac{(-5bc^2)^{-3}}{5a^4b}$

c) $\frac{(3a^2c^2)^3}{(-4a^2)^3} : \frac{12c^4}{(2a^3b)^{-1}}$ **d)** $\frac{8a^2bc^{-3}}{(-3ac)^2} : \frac{(-2b^2)^4}{(6a^3)^2}$

93 Wie 89:

a) $(a-b)^3 \cdot \frac{(a^2-b^2)^{-3}}{(a+b)^2}$

b) $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^3} : (a+b)^2$

c) $\frac{6 \cdot (2a-b)}{12a} \cdot \frac{(2a+b)^{-2}}{b^2-4a^2}$

d) $\frac{3(a+b)^2}{a^2-b^2} : \frac{6(a+b)}{(a-b)^{-2}}$

94 Vereinfache so weit wie möglich und schreibe das Ergebnis so an, dass weder Brüche noch negative Zahlen in den Exponenten stehen.

a) $\frac{16b^2c^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^3}{a^2b^4}$ **b)** $\frac{(5a^2b)^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-2}}{a^2c^5}$

c) $\frac{\left(9a^3b^{\frac{3}{4}}\right)^2}{4c^{\frac{2}{3}} \cdot (6ac^2)^{-\frac{1}{2}}}$ **d)** $\frac{(-3a^2b)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4c^{\frac{1}{2}}}{(2ac^2)^{\frac{1}{3}}}$

95 Wie 94:

a) $(8a^3bc)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{4ac^2}{b^4}$

b) $-5a^{\frac{1}{2}}b^3 \cdot \frac{(a^2c)^{\frac{1}{2}}}{(-2b)^{-4}}$

c) $\frac{(-27b^3c^6)^{\frac{2}{3}}}{(3a^3c)^2} : (2a^2c^4)^{-3}$

d) $\frac{a^4b^{-3}}{(16ac^2)^{\frac{1}{4}}} : 6b^2c^{\frac{3}{4}}$

96 Vereinfache:

a) $\frac{\sqrt[3]{ab}\ \sqrt{c}\ \sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a^2}\ \sqrt{b}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{ac}\ \sqrt[6]{bc}}{\sqrt[3]{a}\ \sqrt{bc}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[4]{c}}{\sqrt[5]{b^3}} : \frac{\sqrt[6]{a}\ \sqrt[4]{c}}{\sqrt[5]{b^3}}$ **d)** $\frac{\sqrt[4]{a}\ \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{c^2}} : \frac{\sqrt[4]{a}\ \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{c^2}}$

97 Vereinfache:

a) $\sqrt{45} + \sqrt{28} - \sqrt{20} + \sqrt{63}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{45} - \sqrt{27} + \sqrt{80}$

c) $\sqrt{75} + \sqrt{32} - \sqrt{27} + \sqrt{50} - \sqrt{12}$

d) $\sqrt{72} + \sqrt{48} - \sqrt{8} + \sqrt{75} - \sqrt{32}$

98 Vereinfache, wenn möglich:

a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **b)** $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ **c)** $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$

d) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+y}}$ **e)** $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}}$ **f)** $\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}$

99 Anita merkt sich folgende Eselsbrücke: „Wenn die Potenz den Bruchstrich passiert, ändert sich das Vorzeichen im Exponenten.“ Was genau meint Anita damit? Stimmt ihre Regel im Allgemeinen? Begründet!

100 Im Allgemeinen gilt: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$

a) Beschreibt mit eigenen Worten, was diese Regel aussagt.

b) Welche Werte dürfen a, k, n in dieser Regel annehmen? Begründet!

c) Beweist die Regel allgemein.

101 Stelle mit nur einer Wurzel dar und vereinfache wenn möglich durch partielles Wurzelziehen. Verwende die Regel aus Aufgabe 100.

a) $\sqrt{\sqrt{9a^2b}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{50a^3b^6}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{32a^4b^3}}$ **d)** $\sqrt[4]{\sqrt{8a^3b^2}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{27a^3b^7}}$ **f)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{54a^5b^3}}$

102 Recherchiert im Internet, was mit *freshman's dream* gemeint ist. Begründet auf zwei verschiedene Arten, warum hier ein Fehler vorliegt.

103 Erklärt, wie man eine Potenz der angegebenen Form mithilfe einer Wurzel darstellen kann. Gebt mindestens drei Beispiele dazu an.

a) $a^{\frac{n}{k}}$ **b)** $a^{-\frac{n}{k}}$ $(k, n \in \mathbb{N})$

104 Zeige allgemein und erkläre, was die Aussage bedeutet:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: Berechne $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

105 Beurteilt die Aussage. Ist sie richtig? Gebt Beispiele an und begründet!

a) „Quadratwurzeln darf man nur dann addieren, wenn sie denselben Radikanden haben."

b) „Quadratwurzeln werden addiert, indem die Radikanden addiert werden."

106 René behauptet: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ Stimmt das? Begründe!

107 Lisa behauptet: $\sqrt{\frac{4a^2}{b^2}} = \frac{2a}{b} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$

Stimmt das? Begründe!

108 Besprecht, wo die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten liegen. Erstellt eine Präsentation.

Nenner rational machen

109 Wir können Brüche stets so erweitern, dass im Nenner keine Wurzel steht.
Erklärt die Vorgangsweise anhand der folgenden Beispiele genau:

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{2}{5-\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2}) \cdot (5+\sqrt{2})}$

$= \frac{10 + 2\sqrt{2}}{25 - 2} = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{23}$

(3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}$

$= \frac{\sqrt{(1+x) \cdot (1-x)}}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$

110 Mache den Nenner rational. Gehe vor wie in Aufgabe 109:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **d)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **f)** $\frac{4}{\sqrt{2}}$

111 Wie 110:

a) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ **c)** $-\frac{1}{4-\sqrt{5}}$

d) $\frac{5}{\sqrt{3}+6}$ **e)** $-\frac{8}{\sqrt{2}-5}$ **f)** $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$

112 Wie 110:

a) $\frac{4}{\sqrt{2+x}}$ **b)** $-\frac{x}{\sqrt{x-3}}$ **c)** $\frac{3x}{\sqrt{4+x}}$

d) $\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ **e)** $\frac{3+2x}{\sqrt{3-2x}}$ **f)** $-\frac{5x-3}{\sqrt{3+5x}}$

113 Wie 110:

a) $\sqrt{\frac{x-2}{2+x}}$ **b)** $\sqrt{\frac{8+x}{2-x}}$ **c)** $\sqrt{\frac{3-x}{6+x}}$

d) $\sqrt{\frac{1-4x}{1-x}}$ **e)** $\sqrt{\frac{3x+2}{x-1}}$ **f)** $\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}$

Logarithmen

114 Berechne folgende Logarithmen:

a) $^3\log \frac{1}{27}$ **b)** $^5\log \frac{1}{25}$ **c)** $^2\log \sqrt[3]{4}$

d) $^3\log \sqrt{27}$ **e)** $^2\log \sqrt[3]{0{,}5}$ **f)** $^5\log \sqrt{0{,}2}$

115 Schreibe als Summe von Logarithmen:

a) $\log \sqrt[3]{7a^3b^4}$ **b)** $\log \sqrt{2a^4b}$

c) $\log \sqrt[3]{5a^2b^3}$ **d)** $\log \frac{(ab)^4}{a^2b^3}$

e) $\log \frac{(9ab)^2}{18ab^3}$ **f)** $\log \frac{20a}{(10b)^2}$

116 Wie 115:

a) $\log \frac{\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[6]{8b^5}}{\sqrt{ab}}$ **b)** $\log \frac{\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[10]{b^{57}}}{\sqrt{ab}}$

c) $\log \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{ab^3}}{\sqrt[6]{(ab)^5}}$ **d)** $\log \frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{ab^3}}{\sqrt[10]{(ab)^3}}$

117 Schreibe mit nur einem Logarithmus:

a) $\frac{2}{3}\log a - 2\log(a-3b) + \log(3a-b)$

b) $-3\log(4a-b) - \frac{1}{2}\log b + 2\log(4a-b)$

c) $4\log(5a+2b) + \log(5a-2b) - \frac{1}{3}\log a$

d) $3\log(2a+5b) + \frac{3}{2}\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a+b)$

118 Zeige, dass die Aussage allgemein gilt.

a) $\sqrt[n]{x} = 10^{\frac{^{10}\log x}{n}}$ **b)** $\sqrt[n]{x} = a^{\frac{^{a}\log x}{n}}$

Hinweis: Schreibe die rechte Seite der Gleichung zuerst als Wurzel an.

119 Welche der folgenden Terme sind im Allgemeinen gleich? Begründet!

(1) $\log (a + b)^2$ **(2)** $(\log (a + b))^2$

(3) $2 \log (a + b)$ **(4)** $\log 2 (a + b)^2$

120 Wie 119:

(1) $\log (a^2 - b^2)$ **(2)** $\log (a + b) \cdot \log (a - b)$

(3) $2 \log (a - b)$ **(4)** $\log (a + b) + \log (a - b)$

121 Der in Aufgabe 74 gegebene Zusammenhang ${}^c\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log c}$ kann wie folgt bewiesen werden. Erklärt den Beweis detailliert:

$$\begin{aligned} {}^c\log b = x &\Leftrightarrow c^x = b \\ &\Leftrightarrow {}^a\log c^x = {}^a\log b \\ &\Leftrightarrow x \cdot {}^a\log c = {}^a\log b \\ &\Leftrightarrow x = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log c} \end{aligned}$$

122 Stelle mit Logarithmen der selben Basis dar. Verwende den in Aufgabe 121 angegebenen Zusammenhang.

a) ${}^3\log a \cdot {}^9\log b$ **b)** ${}^4\log a \cdot {}^8\log b$

c) ${}^4\log a \cdot {}^{64}\log b$ **d)** ${}^{27}\log a \cdot {}^3\log b$

123 Wie 122:

a) ${}^a\log b \cdot {}^{2a}\log c$ **b)** $\frac{{}^a\log 2b}{{}^b\log 2a}$

c) ${}^a\log b^2 \cdot {}^b\log a^2$ **d)** $\frac{{}^a\log a + b}{{}^b\log a + b}$

124 Schreibe für dein Computeralgebrasystem eine Funktion, die den Logarithmus zu jeder beliebigen Basis berechnet.

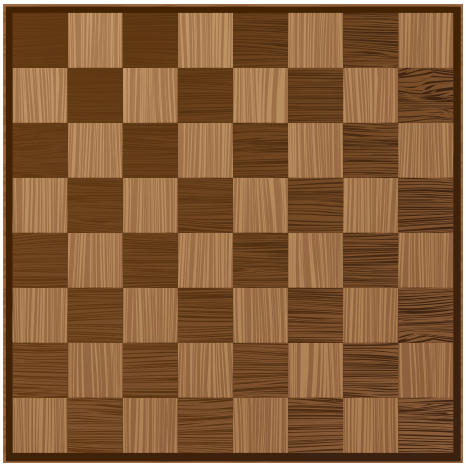
Anwendungen

125 Die Entfernung der Sonne von der Erde beträgt ungefähr 149 600 000 km. Nehmen wir an, dass ein Blatt Papier 0,25 mm dick ist. Wie oft müssten wir es falten, damit die Höhe des Stapels der Entfernung Erde–Sonne entspricht? Trage zur Lösung der Aufgabe die Höhe des Papierstapels in einer Tabellenkalkulation ein! Kannst du diese Aufgabe auch mit einer Exponentialgleichung lösen?

126 Wie oft muss man 1 kg Brot in die Hälfte teilen, dass ein Teil nur mehr die Masse eines Wasserstoffatoms von $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg hat? Erkläre, was diese Frage mit der Exponentialgleichung $0{,}5^x = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ zu tun hat! Verwende auch eine Tabellenkalkulation, um diese Frage zu beantorten!

127 Jeder Mensch hat zwei Eltern, vier Großeltern, usw. Bis ins Jahr Christi Geburt müssen wir ca. 70 Generationen zurückgehen. Wie viele deiner Vorfahren lebten zu dieser Zeit theoretisch? Ist dieses rechnerische Resultat sinnvoll? Begründe!

128 Die *Weizenkornlegende* steht im Zusammenhang mit der Erfindung des Schachspiels: Der indische Weise *Sissa* hat von seinem Herrscher angeblich folgenden Lohn in Form von Weizenkörnern gefordert. Es sollten die 64 Felder eines Schachbrettes wie folgt gefüllt werden: Auf das erste Feld des Schachbretts sollte ein Korn gelegt werden, auf jedes weitere Feld doppelt so viele Körner wie auf dem Feld davor.



a) Wie viele Weizenkörner liegen auf dem letzten Feld des Schachbretts?

b) Berechnet mithilfe einer Tabellenkalkulation die Gesamtzahl der Weizenkörner, die auf dem Schachbrett liegen.

c) Welcher Gesamtmasse entspricht die Weizenmenge auf dem letzten Feld sowie auf dem gesamten Schachbrett, wenn ein Weizenkorn ca. 0,5 g wiegt? Vergleicht diese Menge mit vergleichbaren Massen (Masse der Erde, Gesamternte Weizen pro Jahr, …). Recherchiert dazu im Internet.

129 Fortsetzung von Aufgabe 128: Recherchiert im Internet und erstellt eine Präsentation über die *Weizenkornlegende*. Wie hat der Herrscher den Weisen am Ende belohnt? Was hat diese Legende mit Potenzen zu tun?

130 Erstellt eine Präsentation mit den wesentlichen Inhalten dieses Kapitels. Verwendet dafür die Mindmap von Seite 5 und die Kompetenz-Checklisten ab Seite 22.

Sprache der Mathematik

131 Schreibe die Rechenanweisung als Term:

a) Multipliziere das Doppelte einer Zahl fünfmal mit sich selbst.
b) Multipliziere die Hälfte einer Zahl viermal mit sich selbst.
c) Multipliziere das Achtfache einer Zahl sechsmal mit sich selbst.
d) Multipliziere das Achtel einer Zahl dreimal mit sich selbst.

132 Schreibe die Rechenanweisung als Term:

a) Gib die Wurzel des Doppelten einer Zahl an.
b) Gib die Wurzel des Dreifachen einer Zahl an.
c) Berechne die dritte Wurzel der Hälfte einer Zahl.
d) Berechne die Quadratwurzel des Achtels einer Zahl.

133 Schreibe die Rechenanweisung als Term:

a) Berechne den Logarithmus zur Basis a einer Zahl c.
b) Berechne den Logarithmus zur Basis d einer Zahl a.
c) Berechne den Logarithmus zur Basis m einer Zahl b.

134 Stellt der Term einen Bruch und/oder eine Wurzel dar? Kreuze an!

	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^{-3}	$a^{-\frac{4}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{3}{6}}$
Bruch	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Wurzel	☐	☐	☐	☐	☐	☐

135 Für welche Gleichung stimmt die Aussage? Kreuze an!

	$a^b = c$	$b^a = c$	$b^c = a$	$a^c = b$
1. c ist eine Potenz.	☐	☐	☐	☐
2. a ist Basis einer Potenz.	☐	☐	☐	☐
3. c ist der Exponent einer Potenz.	☐	☐	☐	☐
4. b ist Basis einer Potenz.	☐	☐	☐	☐

136 Für welche Gleichung stimmt die Aussage? Kreuze an!

	${}^a\log b = c$	${}^b\log a = c$	${}^c\log b = a$	${}^b\log c = a$
1. a ist ein Logarithmus.	☐	☐	☐	☐
2. b ist Basis eines Logarithmus.	☐	☐	☐	☐
3. c ist der Numerus eines Logarithmus.	☐	☐	☐	☐
4. a ist Basis eines Logarithmus.	☐	☐	☐	☐

137 Beurteile folgende Aussage (richtig /falsch) und begründe deine Entscheidung:
„a^x heißt a mal a mal a usw. Insgesamt kommt x-mal der Faktor a vor."

138 Einen Bruch und eine Wurzel kannst du immer als Potenz schreiben. Erkläre wie!

139 Sabrina behauptet, dass ein Logarithmus eigentlich nur ein anderer Name für eine Hochzahl ist. Hat sie recht? Begründe!

140 Erkläre anhand selbst gewählter Beispiele, was der gegebene Begriff bedeutet. Beschreibe auch den Zusammenhang mit einer Gleichung der Form $a^b = c$.

a) Potenz **b)** Wurzel **c)** Logarithmus

Geschichte der Rechenhilfen

Rechenhilfsmittel sind Gegenstände, die uns das Rechnen erleichtern. Als Kinder lernten wir mithilfe unserer Finger zu zählen und zu rechnen. Später verwendeten wir Papier und Bleistift zum schriftlichen Rechnen. Heute sind auch der Taschenrechner oder der Computer unverzichtbare Hilfsmittel beim Rechnen.

Im Folgenden werden wir uns mit den bekanntesten Rechenhilfsmitteln und der Entwicklung der Computer genauer beschäftigen.

Abakus und Rechenschieber

Seit der Antike bis ins Mittelalter wurden der **Abakus** und Rechensteine auf dem Rechenbrett, dem Rechentisch oder dem Rechentuch verwendet.

▶ **1** Recherchiert im Internet zum Thema Abakus. Beantwortet zumindest folgende Fragen:

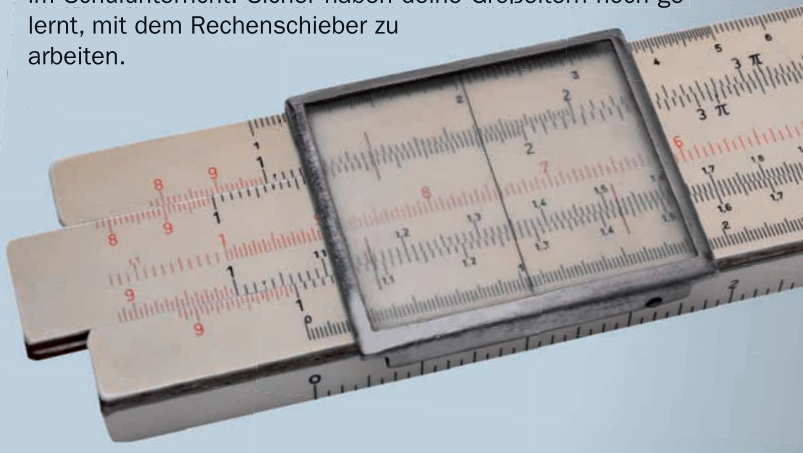
a) Woher stammt der Begriff *Abakus*?
b) Wann und wo wurde ein Abakus erstmals verwendet?
c) Wie alt ist der älteste noch erhaltene Abakus?
d) Wo wird ein Abakus auch heute noch manchmal verwendet?

▶ **2** Versucht durch Recherche möglichst viel über die Verwendung der *Rechensteine* herauszufinden.

a) Wann und wo wurden Rechensteine verwendet?
b) Wie lautet die lateinische Bezeichnung für die Rechensteine? Welche Begriffe leiten sich daraus ab?

▶ **3** Recherchiert: Wie ist ein Abakus aufgebaut und wie funktioniert er? Gib mindestens drei Beispiele für Berechnungen an und vergleiche das Ergebnis mit deinem Taschenrechner.

Um 1620 kam der **Rechenschieber** (Rechenstab) in Gebrauch. Dieser basierte auf einer logarithmischen Skala und blieb – zusammen mit dem Logarithmenbuch – bis zur Einführung der Taschenrechner, also bis in die siebziger Jahre des 20. Jahrhunderts ein unverzichtbares Hilfsmittel auch im Schulunterricht. Sicher haben deine Großeltern noch gelernt, mit dem Rechenschieber zu arbeiten.



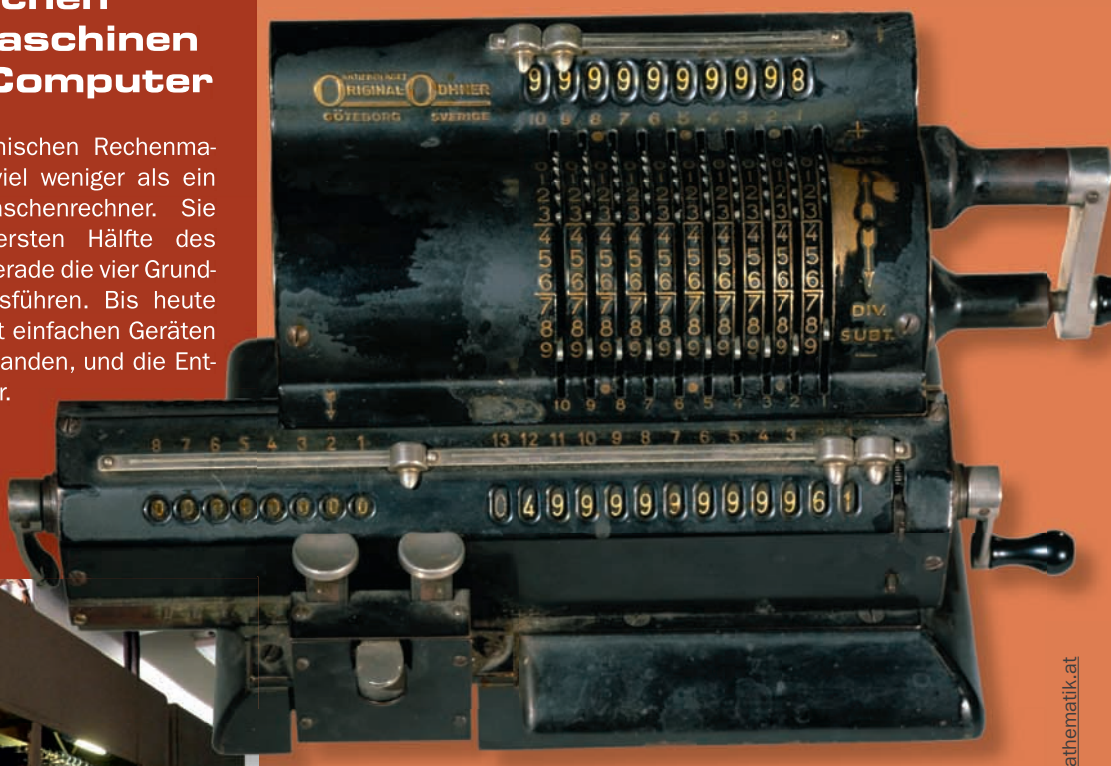
Vielleicht gibt es sogar in deiner Schule noch einen alten Rechenschieber.

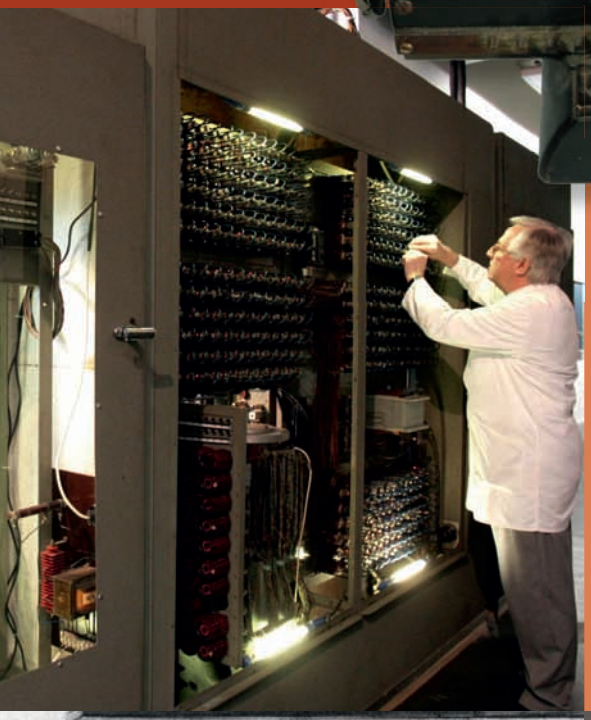
▶ **4** Recherchiere oder frage deine Großeltern: Wie funktioniert ein Rechenschieber? Gib mindestens drei Beispiele für Berechnungen an und vergleiche das Ergebnis mit deinem Taschenrechner.

▶ **5** Vergleicht Abakus und Rechenschieber: Welche Rechenoperationen konnte man mit den beiden Werkzeugen jeweils ausführen?

Von den ersten mechanischen Rechenmaschinen bis zum Computer

Die ersten mechanischen Rechenmaschinen leisteten viel weniger als ein heute üblicher Taschenrechner. Sie konnten in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gerade die vier Grundrechnungsarten ausführen. Bis heute ist aus diesen recht einfachen Geräten der Computer entstanden, und die Entwicklung geht weiter.





▶ **6** Welche Rolle spielten folgende Personen bei der Entwicklung mechanischer Rechenmaschinen? Wann und wo lebten sie?

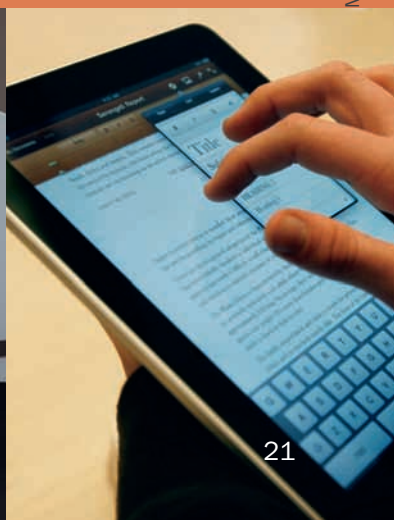
a) Wilhelm Schickard
b) Blaise Pascal
c) Gottfried Wilhelm Leibniz
d) Konrad Zuse

▶ **7** Was kann man mit dieser Rechenmaschine berechnen? Wann wurde das erste Gerät dieses Typs erstmals verwendet? Wer hat sie entwickelt?

a) Additionsmaschine
b) Vier-Spezies-Maschine (sh. Abb. oben)

▶ **8** Recherchiert und erstellt eine Präsentation über die Geschichte des Computers.

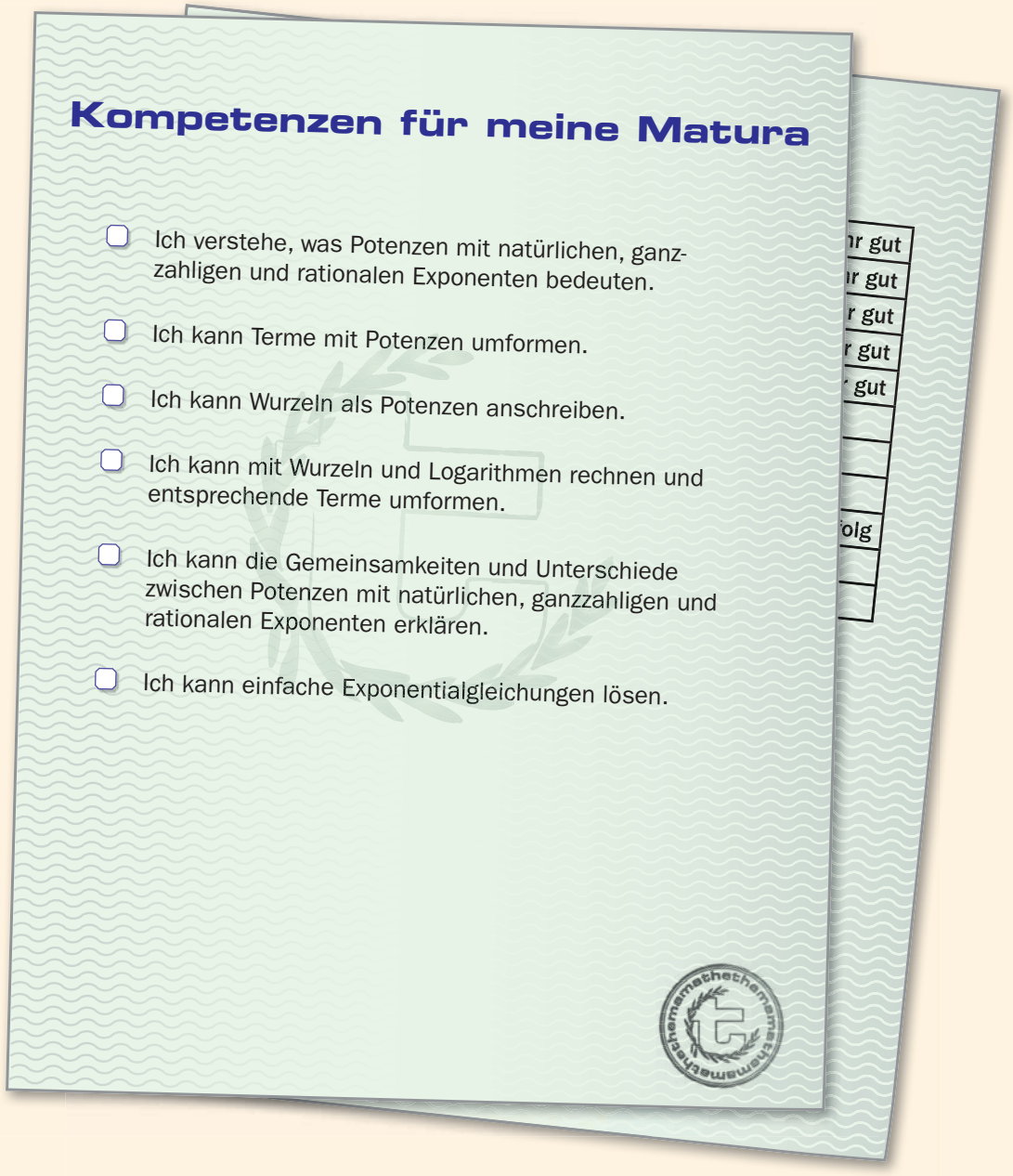
Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at



Meine Kapitelcheckliste zu Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Ich weiß … (d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	Ich kann … (d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)	Ich übe … z.B. Aufgaben
thema Potenzen mit natürlichen Exponenten		
☐ … den Zusammenhang zwischen einer Potenz und einem Produkt.	☐ … Potenzen mit Zahlen in der Basis und im Exponenten berechnen.	… 4, 5, 6
☐ … was eine Potenz mit natürlichem Exponenten ist.	☐ … zwischen Potenz- und Produktschreibweise wechseln.	… 8 (1)
☐ … Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten.	☐ … Rechenregeln anwenden und entsprechende Terme umformen.	… 19, 20
	☐ … Rechenregeln beweisen.	… 15
thema Potenzen mit ganzzahligen Exponenten		
☐ … den Zusammenhang zwischen einer Potenz mit negativem Exponenten und einem Bruch.	☐ … zwischen Potenz- und Bruchschreibweise wechseln.	… 28, 30
☐ … was eine Potenz mit ganzzahligem Exponenten ist.	☐ … Rechenregeln anwenden und entsprechende Terme umformen.	… 32, 34
☐ … Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.		
thema Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzeln		
☐ … dass eine Wurzel Lösung einer Gleichung $x^k = a$ $(a > 0, k \in \mathbb{N})$ ist.	☐ … zwischen Potenzen und Wurzelschreibweise wechseln.	… 45, 47
☐ … den Zusammenhang zwischen einer Potenz mit rationalem Exponenten und einer Wurzel.	☐ … Rechenregeln anwenden und entsprechende Terme umformen.	… 53
☐ … was eine Potenz mit rationalem Exponenten ist.	☐ … Rechenregeln für Wurzeln beweisen.	… 51
☐ … Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten.	☐ … Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten vergleichen.	… 108
☐ … was partielles Wurzelziehen ist.		
thema Logarithmen		
☐ … dass der Logarithmus Lösung einer Gleichung $a^x = b$ $(a, b > 0)$ ist.	☐ … die Logarithmus-Schreibweise verwenden.	… 62
☐ … dass der Logarithmus eine Hochzahl ist.	☐ … Rechenregeln anwenden und entsprechende Terme umformen.	… 63, 68
☐ … Rechenregeln für Logarithmen.	☐ … Rechenregeln für Logarithmen beweisen.	… 72

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
thema Exponentialgleichungen		
☐ … was eine Exponentialgleichung ist.	☐ … einfache Exponentialgleichungen lösen.	… 82



Teste dein Wissen!

Kreuze die richtigen Antworten an!

141 Ist die Aussage wahr oder falsch?

	wahr	falsch
$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$	☐	☐
$a^{-3} = -a^3$	☐	☐
$a^{-3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$	☐	☐
$a^{-3} = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$	☐	☐

142 Ist die Aussage wahr oder falsch?

	wahr	falsch
$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$	☐	☐
$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{a^4}$	☐	☐
$a^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{4}$	☐	☐
$a^{\frac{3}{4}} = \frac{a^3}{a^4}$	☐	☐

143 Kreuze an, welche dieser Schlussfolgerungen richtig sind.

- ☐ $a^b = c \Leftrightarrow b = \sqrt[a]{c}$
- ☐ $c^b = a \Leftrightarrow a = \sqrt[b]{c}$
- ☐ $b^c = a \Leftrightarrow b = \sqrt[c]{a}$
- ☐ $a^b = c \Leftrightarrow b = {}^a\log c$
- ☐ $b^c = a \Leftrightarrow c = {}^b\log a$
- ☐ $c^a = b \Leftrightarrow a = {}^b\log c$

144 Ist die Aussage im Allgemeinen wahr oder falsch?

	wahr	falsch
(1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	☐	☐
(2) $(a + b)^n = a^n + b^n$	☐	☐
(3) $(a^n)^k = a^{n+k}$	☐	☐
(4) $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$	☐	☐
(5) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$	☐	☐

145 Welche Terme sind gleich?

	$a\,b$	$a\,b^2$	$(a\,b)^2$
$\sqrt{(a\,b)^4}$	☐	☐	☐
$\sqrt{a\,b^4}$	☐	☐	☐
$b\sqrt{(a\,b)^2}$	☐	☐	☐
$\sqrt{a^2\,b^2}$	☐	☐	☐

146 Welche Terme sind gleich?

	$a - b$	$a^2 - b^2$	$(a - b)^2$
$\sqrt{a^2 - b^2}$	☐	☐	☐
$\sqrt{(a - b)^4}$	☐	☐	☐
$a - \sqrt{b^2}$	☐	☐	☐
$a^2 - \sqrt{b^4}$	☐	☐	☐

147 Welche Terme sind gleich?

	$a + b$	$(a + b)^2$	$\log (a + b)^2$
$\sqrt{(a + b)^4}$	☐	☐	☐
$\sqrt{a^2 + b^2}$	☐	☐	☐
$2^{2\log (a + b)}$	☐	☐	☐
$2 \cdot \log (a + b)$	☐	☐	☐

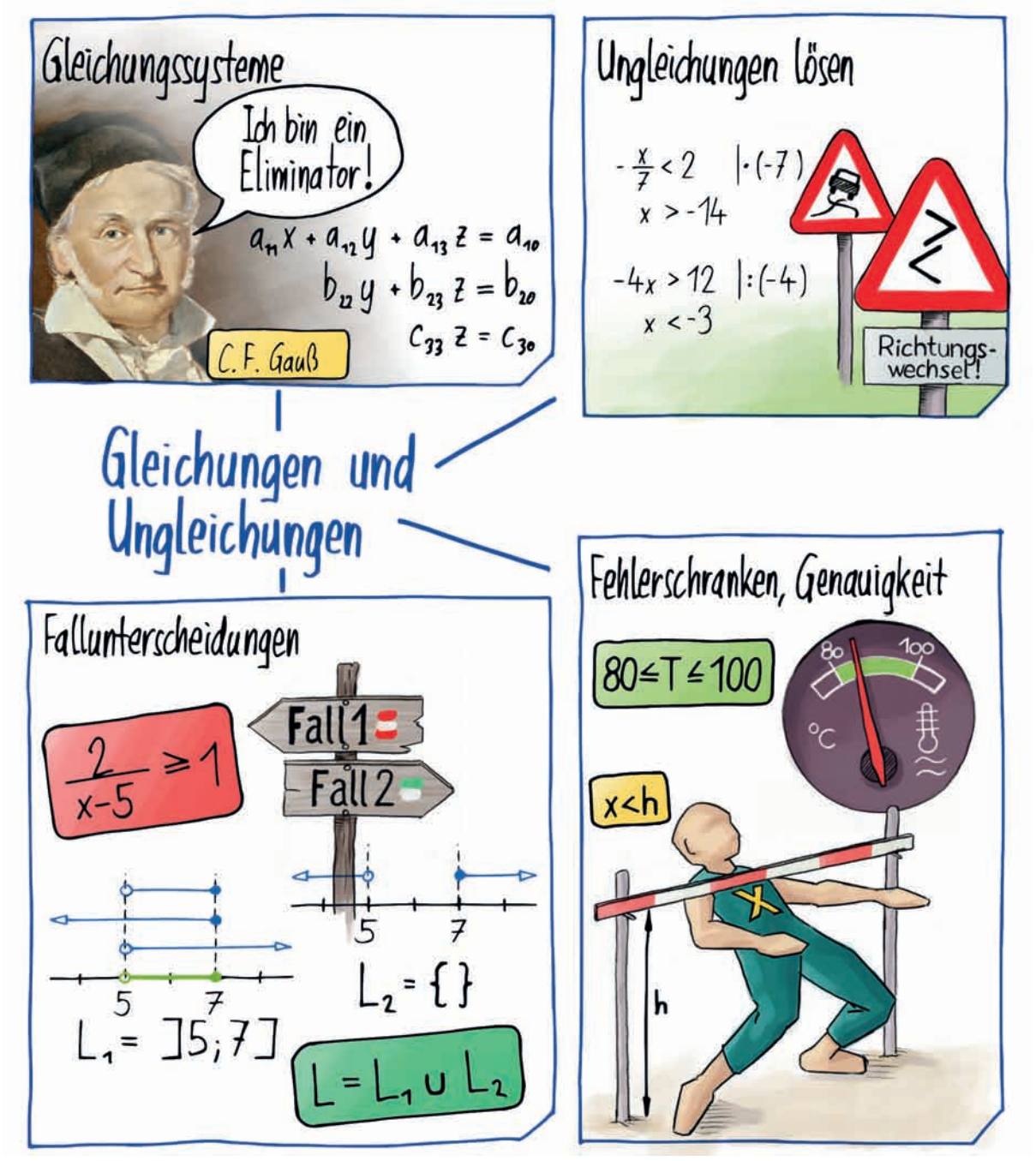
148 Ist die Aussage im Allgemeinen wahr oder falsch?

	wahr	falsch
(1) $\log (a + b) \neq \log a + \log b$	☐	☐
(2) $\log (a + b) = \log a \cdot \log b$	☐	☐
(3) $\sqrt{\log a} = \log \sqrt{a}$	☐	☐
(4) $\sqrt{\log a^2} = \log a$	☐	☐
(5) $\sqrt{(\log a)^2} = \log a$	☐	☐

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 6 Lösungen (SBNR 150.261)

2. Gleichungen und Ungleichungen

Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen bekannten und unbekannten Größen kannst du durch lineare Gleichungen und Ungleichungen ausdrücken. Wenn du es schaffst, ein Problem auf diese art zu modellieren, dann können mathematische Verfahren Lösungen finden. Oft gibt es genau eine Lösung, manchmal mehrere. Manche Probleme sind unlösbar bei anderen gelingt es, unter vielen Möglichkeiten die optimale zu finden.



2.1 Lineare Gleichungssysteme in drei Unbekannten

Lineare Gleichungen kennst du schon aus der fünften Klasse. Beispiele sind $3x + 5 = 0$ oder $y = 4x + 6$ oder $x - 2y + 3z = 7$. Keine linearen Gleichungen wären $4xy - 3 = 0$ oder $x^2 = 4$, weil darin Produkte oder Potenzen von Unbekannten auftreten.

Lineare Gleichungen sind das einfachste Modell für Beziehungen zwischen Unbekannten. Selbst komplexere Zusammenhänge lassen sich oft durch lineare Modelle annähern und nur auf diese Weise rechnerisch auswerten. Deswegen ist das Lösen linearer Gleichungssysteme eine Grundaufgabe bei technisch-wissenschaftlichen Berechnungen.

Die allgemeine Form eines Systems von drei Gleichungen in drei Unbekannten lautet:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \text{II:}\quad & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \text{III:}\quad & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

Hier sind x, y und z die Unbekannten und $a_1, b_1, \dots, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$ Platzhalter für Zahlenwerte, die in konkreten Beispielen (siehe Beispiel 149) gegeben sind.
Für Systeme mit zwei linearen Gleichungen und Unbekannten kennst du bereits verschiedene Lösungsverfahren: Einsetz-Verfahren, Gleichsetz-Verfahren und Additionsmethode (fachsprachlich: Substitutions-, Komparations- und Eliminationsverfahren). Alle Methoden funktionieren „im Prinzip“ auch bei drei oder mehr Unbekannten.

Das Eliminationsverfahren

Als systematisches Rechenschema eignet sich das Eliminationsverfahren besonders gut. Das Standardverfahren besteht darin, zunächst aus der 2. und 3. Gleichung x zu eliminieren und so zwei Gleichungen in y und z zu erhalten. Nun wird aus diesen Gleichungen auch noch y eliminiert und das Gleichungssystem auf **Dreiecksform** gebracht (auch: „Treppen-“ oder „Stufenform“ genannt). Dieses System ist zu den ursprünglichen Gleichungen äquivalent.

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \text{II}':\quad & b_2'y + c_2'z = d_2' \\ \text{III}'':\quad & c_3''z = d_3'' \end{aligned}$$

Beginnend mit z lassen sich nun die einzelnen Unbekannten einfach bestimmen. Beispiel 149 zeigt dir die Vorgangsweise:

149 Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 8 \\ x + 5y + 9z &= 4 \\ 2x + 6y + 5z &= -6 \end{aligned}$$

Ausführung:

Schritt 1: Wir beginnen mit I und II. Multipliziere geeignet und addiere, so dass die Unbekannte x wegfällt. In diesem Beispiel reicht es, Gleichung II mit -3 zu multiplizieren.

$$\begin{array}{rrrrrl} \text{I:} & 3x + & y + & 4z = & 8 & \mid \cdot 1 \\ \text{II:} & x + & 5y + & 9z = & 4 & \mid \cdot (-3) \\ \hline \text{I:} & 3x + & y + & 4z = & 8 & \\ -3\,\text{II:} & -3x - & 15y - & 27z = & -12 & \\ \hline \text{II}': & & -14y - & 23z = & -4 & \end{array}$$

Schritt 2: Wähle ein anderes Gleichungspaar. Standardwahl wäre I und III, aber leichter zum Rechnen geht es hier mit II und III. Wichtig ist: Es muss wieder die Unbekannte x eliminiert werden.

$$\begin{array}{rrcl} \text{II:} & x + 5y + 9z = 4 & & \mid \cdot(-2) \\ \text{III:} & 2x + 6y + 5z = -6 & & \mid \cdot 1 \\ -2\,\text{II:} & -2x - 10y - 18z = -8 & & \\ \text{III:} & 2x + 6y + 5z = -6 & & \\ \hline \text{III}': & -4y - 13z = -14 & & \end{array}$$

Schritt 3: Eliminiere aus den Gleichungen II′ und III′ die Unbekannte y:

$$\begin{array}{rrcl} \text{II}': & -14y - 23z = -4 & & \mid \cdot 2 \\ \text{III}': & -4y - 13z = -14 & & \mid \cdot(-7) \\ 2\,\text{II}': & -28y - 46z = -8 & & \\ -7\,\text{III}': & 28y + 91z = 98 & & \\ \hline & 45z = 90 & & \mid : 45 \\ \text{III}'': & z = 2 & & \end{array}$$

Schritt 4: Wir haben das Gleichungssystem auf Dreiecksform gebracht.

$$\begin{array}{rrcl} \text{I:} & 3x + y + 4z = 8 & & \\ \text{II}': & -14y - 23z = -4 & & \\ \text{III}'': & z = 2 & & \end{array}$$

Nun beginnt die *Rücksubstitution:*

Setze $z = 2$ in II′ ein und löse nach y auf. Ergebnis: $y = -3$
Setze y und z in I ein und löse nach x auf. Ergebnis: $x = 1$

Es kommen „schöne“ Zahlen heraus (und natürlich haben wir in der Musteraufgabe richtig gerechnet), aber sicherheitshalber solltest du zur Probe auch in die beiden anderen Originalgleichungen einsetzen!

Lösung: $(x|y|z) = (1|-3|2)$ Andere Schreibweise: $\mathbb{L} = \{(1|-3|2)\}$

Aufgaben

150 Löse mit dem Eliminationsverfahren:

a) $\begin{array}{l} 5x + y + z = 3 \\ 5x + 2y + 5z = 4 \\ 5x + 2y - 4z = 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 7y + 2z = 8 \\ 3x + 6y + 6z = -9 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 4x + 3y - 2z = 2 \\ 6x + 5y - z = -5 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} 8x + 3y - 5z = 11 \\ x + y + 4z = -17 \\ 4x + 3y + 9z = -40 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x - 5y = 0 \\ x - 6y - 6z = 1 \\ -2x + 8y - 4z = 6 \end{array}$

151 Löse mit dem Eliminationsverfahren:

a) $\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ -x - 2y - z = 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} 2x + 4y + 7z = 16 \\ -8y - 9z = -23 \\ x - y = -1 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 5x + 6y + 6z = 21 \\ 3x + 3y + 2z = \frac{13}{2} \\ 6x + 8y + 9z = 32 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x + 2z = -1 \\ 4x - 3y + 9z = 3 \\ 4x - y + 9z = -1 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} -x + y - z = 1 \\ -2x + 9y - 7z = 0 \\ x - 5y + 5z = 3 \end{array}$

Das Substitutionsverfahren

Gleichungssysteme lassen sich auch mit der Substitutionsmethode lösen. Die allgemeine Vorschrift lautet: Forme Gleichung I so um, dass x alleine auf der linken Seite steht; substituiere den Term der rechten Seite für x in den Gleichungen II und III. Vereinfache, und du erhältst neue Gleichungen II′ und III′, in denen nur mehr y und z als Unbekannte vorkommen. Ab hier sollten dir die weiteren Lösungsschritte bekannt sein.

152 Löse das Gleichungssystem aus Beispiel 149 mit dem Substitutionsverfahren.

Ausführung: Du musst nicht unbedingt mit Gleichung I beginnen. In diesem Beispiel startest du besser mit II, weil sich hier x besonders leicht ausdrücken lässt:

$$\text{II}': \qquad x = 4 - 5y - 9z$$

Einsetzen von $4 - 5y - 9z$ für x in I und III:

$$\begin{aligned} \text{I}': &\ 3(4 - 5y - 9z) + y + 4z = 8 \\ \text{III}': &\ 2(4 - 5y - 9z) + 6y + 5z = -6 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen vereinfacht die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I}': &\quad 14y + 23z = 4 \\ \text{III}': &\quad 4y + 13z = 14 \end{aligned}$$

Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte – solche Aufgaben kennst du seit der fünften Klasse. Du kannst sie mit deiner Lieblingsmethode lösen. Wir bleiben konsequenterweise bei der Substitution. Aus III′ lässt sich $y = \frac{1}{4}(14 - 13z)$ ausdrücken und in I′ einsetzen.

$$\text{I}'': \qquad 14 \cdot \tfrac{1}{4}(14 - 3z) + 23z = 4$$

Vereinfache und löse: $z = 2$. Die Rücksubstitution geht nun rasch, weil du $y = \frac{1}{4}(14 - 13z)$ schon ausgedrückt hast. Du erhältst $y = -3$ und aus II′: $x = 1$.

Lösung: $(x|y|z) = (1|-3|2)$ Andere Schreibweise: $\mathbb{L} = \{(1|-3|2)\}$

Die Matrix des Gleichungssystems

Zur Angabe eines Gleichungssystems genügt es im Wesentlichen, die Koeffizienten der Unbekannten und die Zahlenwerte auf der rechten Seite zu kennen. Diese Information lässt sich in einer Art Tabelle zusammenfassen:

Definition: Die 3×3-Tabelle der Koeffizienten heißt *Matrix* des Gleichungssystems (auch: *Koeffizientenmatrix*); allgemein geschrieben:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Die Unbekannte $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und die rechte Seite $\vec{r} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ lassen sich zu *Vektoren* zusammenfassen.

Bemerkung: Die gesamte Information des Gleichungssystems ist in der Matrix M und im Vektor $\vec{r}$ enthalten. Überlege, wie M und $\vec{r}$ für lineare Gleichungssysteme in zwei Unbekannten aussehen. Mithilfe der Koeffizientenmatrix kann man lineare Gleichungssysteme – egal in wie vielen Unbekannten – sehr elegant in folgender Form anschreiben: $M \cdot \vec{x} = \vec{r}$

153 Gib die Koeffizienten von Beispiel 149 als Matrix M und die rechte Seite als Vektor $\vec{r}$ an.

Ausführung: $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgaben

154 Löse mit dem Substitutionsverfahren:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ x + 3y + 5z &= 1 \\ 4x + 3y - 5z &= -3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x + 2y + 8z &= 6 \\ 3x + 7y + 8z &= 5 \\ x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -2 \\ 5x + 2y + z &= 5 \\ 2y + 3z &= -1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 9x + 3y - 6z &= 1 \\ -x + 2z &= 0 \\ x + 3y + 9z &= 1 \end{aligned}$

155 Löst Gleichungssysteme aus den Aufgaben 150–151 durch Substitution.
Löst zum Vergleich auch die Aufgaben 154 durch Elimination. Vergleicht den Rechenaufwand und diskutiert Vor- und Nachteile beider Verfahren.

156 Wähle ein günstiges Verfahren und löse:

a) $\begin{aligned} y + 4z &= 1 \\ x + 5y + 9z &= 4 \\ 2x + 6y + 5z &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 0 \\ 5y + 9z &= 4 \\ 3x + 6y + 5z &= -4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y + z &= 2 \\ 5x + 5y + 9z &= 4 \\ 2x + 5z &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 9z &= 1 \\ 2x + y + 5z &= -1 \end{aligned}$

157 Schreibe für die Gleichungssysteme der Aufgabe 154 die Koeffizienten als Matrix M und die rechte Seite als Vektor $\vec{r}$ an.

158 Gegeben sind die Matrix und der Vektor der rechten Seite eines Gleichungssystems. Schreibe das Gleichungssystem an und löse!

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ **b)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\quad$ **d)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ **f)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

159 Könnt ihr Faustregeln angeben, wann das Eliminations- und wann das Substitutionsverfahren leichter zu rechnen ist? Ist es besser, nur ein Verfahren gut einzuüben und immer zu verwenden, oder zahlt es sich aus, jedesmal zu überlegen, welches Verfahren vorteilhafter ist?

160 Findet heraus, wie sich Gleichungssysteme in der Art der Aufgaben 154 und 156 mit dem Taschenrechner oder einem Computeralgebra-System lösen lassen.

Diskutiert: Ist es überhaupt notwendig, Lösungsverfahren zu kennen, wenn man Gleichungen in den Rechner eingeben kann? Findet Pro- und Kontra-Argumente.

161 Wie viele Rechenschritte braucht das Eliminationsverfahren zur Umwandlung auf Dreiecksform (vgl. Seite 26)?

a) Zählt nur die Additionen! Begründet: Die Schritte 1 und 2 in Beispiel 149 erfordern jeweils 3 Additionen. Schritt 3 benötigt 2 Additionen. Summe: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$

b) Begründet:
Für ein System von vier Gleichungen und Unbekannten sind $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$ Additionen notwendig.

c) Wie viele Additionen sind bei fünf, sechs … Gleichungen und Unbekannten erforderlich? Findet ihr das Muster, nach dem die Summen gebildet werden?

2.2 Sonderfälle bei linearen Gleichungssystemen

Du weißt aus der fünften Klasse: Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in *zwei* Unbekannten liegt auf einer Geraden im $\mathbb{R}^2$. Die Lösungsmenge eines linearen Systems von *zwei* Gleichungen und Unbekannten entspricht der Schnittmenge zweier Geraden in der Ebene.

Im Kapitel 4 erfährst du einen weiteren wichtigen Zusammenhang zwischen Gleichungen und geometrischen Objekten: Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in *drei* Unbekannten liegt auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$. Die Lösungsmenge eines linearen Systems von *drei* Gleichungen und Unbekannten entspricht der Schnittmenge dreier Ebenen im Raum.

Die geometrische Vorstellung zeigt, dass die Schnittmenge nicht immer genau ein Punkt sein muss. Es gilt ganz allgemein (egal, wie viele Gleichungen und Unbekannte):

Ein lineares Gleichungssystem kann eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben.

Das Eliminationsverfahren läuft zwar nach einem festen Schema ab, trotzdem liefert es nicht immer eine Lösung.

Mögliche Fälle zum Ausgang des Eliminationsverfahrens:

- Normalfall: Das System lässt sich auf Dreiecksform umwandeln (mit Koeffizienten $\neq 0$ entlang der Diagonale). Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.
- Es entsteht eine Zeile mit lauter Nullen links und einer rechten Seite $\neq 0$. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
- Es entstehen eine (oder mehr) Zeilen mit lauter Nullen links, und auch die rechten Seiten sind alle jeweils 0. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Die elementare *geometrische* Vorstellung reicht nur für zwei oder drei Unbekannte; die *algebraische* Aussage über das Eliminationsverfahren gilt für beliebig viele Unbekannte.

162 Wende das Eliminationsverfahren an und bestimme die Lösungsmenge!

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + 2y + 3z = 1 \\ \text{II:}\quad & 4x + 5y + 6z = 2 \\ \text{III:}\quad & 7x + 8y + 9z = 3 \end{aligned}$$

Ausführung: Elimination von x führt auf die Gleichungen $\text{II}' = 4\,\text{I} - \text{II}$ und $\text{III}' = 7\,\text{I} - \text{III}$.

$$\begin{aligned} \text{II}':\quad & 3y + 6z = 2 \\ \text{III}':\quad & 6y + 12z = 4 \end{aligned}$$

Elimination von y gemäß $\text{III}'' = 2\,\text{II}' - \text{III}'$ führt auf die Gleichung $0 = 0$. Das umgeformte System lautet:

$$\begin{aligned} \text{I}:\quad & x + 2y + 3z = 1 \\ \text{II}':\quad & 3y + 6z = 2 \\ \text{III}'':\quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen I und II′ reichen nicht aus, um x, y und z eindeutig festzulegen. Eine Variable bleibt unbestimmt. Du kannst z beliebig wählen und aus I und II′ x und y ausdrücken.

Lösung: Die Lösungsmenge lautet: $\mathbb{L} = \left\{\left(z - \frac{1}{3} \middle| \frac{2}{3} - 2z \middle| z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}$

Carl Friedrich Gauß und „sein“ Eliminationsverfahren

Chinesische Mathematikbücher beschreiben schon im 1. Jhdt. v. Chr. das Lösen von Gleichungssystemen. In der europäischen Mathematik werden systematische Lösungsverfahren erst Mitte des 18. Jahrhunderts beschrieben. Man nimmt an, dass es schon vorher Rechenregeln für Systeme mit zwei oder drei Unbekannten gegeben hat.

Der italienische Mathematiker und Astronom *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) beschreibt, wie man ein System in drei Unbekannten auf ein System von zwei Unbekannten reduziert. Er macht klar, dass auf dieselbe Weise ganz allgemein vier Unbekannte auf drei, fünf Unbekannte auf vier … reduziert werden können.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) verwendet das Eliminationsverfahren für Berechnungen in der Astronomie und Erdvermessung und untersucht es ausführlich. Der Rechengang aus Beispiel 149 (systematisches Eliminieren von Unbekannten und anschließende Rücksubstitution) heißt daher das *Gauß'sche Eliminationsverfahren*.

Carl Friedrich Gauß

Ab 1940, mit dem Aufkommen der ersten Computer, werden Systeme mit „richtig vielen“ Unbekannten gelöst. Dabei treten Schwierigkeiten auf, die Gauß nicht vorhersehen konnte, und zwar katastrophale Rundungsfehler. Erst ab 1960 werden diese Fragen theoretisch verstanden und zufriedenstellend gelöst. Um 1990 entstehen die LAPACK-Computerprogramme, die bis heute als Standard gelten. Wenn dein Taschenrechner Gleichungssysteme lösen kann, verwendet er wahrscheinlich im Kern LAPACK-Routinen.

Aufgaben

163 Stelle fest, welcher Sonderfall vorliegt, und bestimme die Lösungsmenge!

a) $\begin{aligned} x + 3y + 9z &= 4 \\ x + y + 3z &= 2 \\ 3x + 2y + 6z &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 7x - y &= 1 \\ -9x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y - 8z &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 4y + 2z &= 4 \\ -6x + 3y + 9z &= 3 \\ -5x - 8y - 3z &= -8 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -1 \\ 3x - 5y - 4z &= -5 \\ 3x - 7y + z &= -4 \end{aligned}$

164 Stelle fest, ob ein Sonderfall vorliegt, und bestimme die Lösungsmenge!

a) $\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 16 \\ 2x + y - z &= -2 \\ x - 2y + 2z &= 14 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ x - y + z &= 4 \\ x + y + 3z &= 10 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 6 \\ 5x - 4y - 2z &= 5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x + 6y + 7z &= 6 \\ 2x + 2y - 5z &= 2 \\ -7x - 8y + 9z &= -8 \end{aligned}$

165 Das Eliminationsverfahren findet für die Aufgaben in 163 keine eindeutige Lösung. Aber vielleicht liefert ein anderes Verfahren bessere Ergebnisse? Wende das Substitutionsverfahren an und bestimme damit die Lösungsmenge!

166 Ein „Kochrezept“ zur Elimination von x:
Multipliziere I mit a_2 und II mit $-a_1$; addiere!
$\text{II}' = a_2\,\text{I} + (-a_1)\,\text{II}$
Multipliziere I mit a_3 und III mit $-a_1$; addiere!
$\text{III}' = a_3\,\text{I} + (-a_1)\,\text{III}$

a) Erweitert das Kochrezept auch für die Elimination von y aus Gleichungen II′ und III′.

b) Arbeitet nach diesem Rezept und löst verschiedene Gleichungssysteme aus den Aufgaben 150–151.

c) Funktioniert das Kochrezept immer oder sind Sonderregeln nötig? Prüft insbesondere die Aufgaben 156 a) und c).

2.3 Ungleichungen, Schranken, Genauigkeit

Eine *Ungleichung* gibt ein Größenverhältnis zwischen Termen an:

$T_L < T_R$	T_L ist kleiner als T_R
$T_L \leqslant T_R$	T_L ist kleiner oder gleich T_R
$T_L \geqslant T_R$	T_L ist größer oder gleich T_R
$T_L > T_R$	T_L ist größer als T_R

Die Zeichen $<$, $\leqslant$, $\geqslant$, $>$ sind **Relationszeichen**. Sie geben eine Beziehung (ein Verhältnis, eine Ordnung) zwischen zwei Termen an. Auch das Gleichheitszeichen $=$ und das Ungleichheitszeichen $\neq$ sind Relationszeichen. Hingegen sind $+$, $-$, $\cdot$, : keine Relationszeichen, sondern Operatoren.

167 Die Maße einer rechteckigen Platte in cm sind $l = 16{,}9 \pm 0{,}2$ und $b = 3{,}3 \pm 0{,}05$. Gib untere und obere Schranken für die Fläche A mit Ungleichungen, als Intervall und in der $\pm$-Schreibweise an.

Ausführung: Für die entsprechenden Maßzahlen gilt:

$l \in [16{,}7;\ 17{,}1]$ und $b \in [3{,}25;\ 3{,}35]$ oder $16{,}7 \leqslant l \leqslant 17{,}1$ und $3{,}25 \leqslant b \leqslant 3{,}35$.

Obere und untere Schranken für die Fläche erhältst du, indem du mit den entsprechenden Schranken für l und b rechnest:

$$16{,}7 \cdot 3{,}25 \leqslant A \leqslant 17{,}1 \cdot 3{,}35 \quad \Leftrightarrow \quad 54{,}275 \leqslant A \leqslant 57{,}285$$

Für die $\pm$-Schreibweise gilt: A ist gleich Mittelwert $\pm$ halbe Intervallbreite.

$$A = \frac{57{,}285 + 54{,}275}{2} \pm \frac{57{,}285 - 54{,}275}{2} = 55{,}78 \pm 1{,}505$$

Da die Genauigkeit des Längenwertes nur bis auf eine Nachkommastelle gegeben ist, kannst du Schranken für das Ergebnis sinnvollerweise auch nur auf eine Nachkommastelle genau angeben. Wenn notwendig, rundest du die untere Schranke ab und die obere auf. Damit sind auch die gerundeten Werte gültige Schranken. Auch in der $\pm$-Schreibweise rundest du so, dass du auf der sicheren Seite bleibst: Wert kaufmännisch („normal“) runden, $\pm$-Schranke aufrunden.

Lösung: $54{,}2 \leqslant A \leqslant 57{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad A \in [54{,}2;\ 57{,}3] \quad \Leftrightarrow \quad A = 55{,}8 \pm 1{,}6$ (A in cm^2)

Hinweis

Zwischenergebnisse und Nebenrechnungen kannst du mit den Maßzahlen alleine rechnen. Im Endergebnis sollen Maßzahl und Maßeinheit ersichtlich sein!

Wenn du im vorigen Beispiel die Fläche ohne Fehlerschranken rechnest, erhältst du $A = 16{,}9 \cdot 3{,}3 = 55{,}77\ \text{cm}^2$. Die Angabe dieses Wertes ohne Fehlerschranken täuscht Quadratmillimeter-Genauigkeit vor. Eigentlich ist in diesem Resultat nur die Zehnerstelle exakt. Schon die Einerstelle kann im Bereich 4 bis 7 schwanken. Die Nachkommastellen sind völlig unsicher – sogenannte *leere Genauigkeit*.
Man sagt: *Das Ergebnis hat höchstens zwei signifikante Stellen.*

Als *signifikante Stellen* bezeichnen wir jene Dezimalstellen eines Zahlenwertes, die noch sinnvolle Information enthalten. Ein Ergebnis hat normalerweise so viele signifikante Stellen wie der Eingabewert mit den *wenigsten* signifikanten Stellen.

Hinweis

Ungleichungsketten und Schreibweisen für Schranken
Vergleiche dazu auch Band 5, Seite 28!

- Ungleichungsketten: $a < b < c < d$. Jede einzelne Ungleichung muss erfüllt sein. Mischen von $<$ und $\leqslant$ ist möglich, $a \leqslant b < c \leqslant d$. Ungleichungsketten in verschiedenen Richtungen, so wie $a < b > c \leqslant d$, sind unüblich und lassen wir nicht zu.
- Fehlerschranken beim Runden: $x \approx 4{,}3$ bedeutet $4{,}25 \leqslant x < 4{,}35$.
- Intervallschreibweise: $y \in]-2;\, 3[$ bedeutet $-2 < y < 3$. Achte auf den Unterschied zwischen offenen und geschlossenen Intervallgrenzen: $y \in [-2;\, 3]$ bedeutet $-2 \leqslant y \leqslant 3$.
- Angabe der Genauigkeit in $\pm$-Schreibweise: $z = 75{,}3 \pm 0{,}2$ bedeutet $75{,}1 \leqslant z \leqslant 75{,}5$.
- Signifikante Stellen: Bei der Angabe von Rechenergebnissen mit Messwerten oder anderen fehlerbehafteten Größen signalisiert die Anzahl der angeschriebenen Stellen die Genauigkeit. $x = 5{,}00$ bedeutet $4{,}995 \leqslant x < 5{,}005$ und darf nicht zu $x = 5$ „vereinfacht“ werden.

Aufgaben

168 Beschreibe die Fehlerschranken mit Ungleichungen und in Intervallschreibweise:

a) Die Laufstrecke ist 400 m $\pm$ 0,5 m lang.

b) Der Wagen hatte eine Geschwindigkeit von 120 km/h $\pm$ 20 km/h.

c) Das Fossil hat ein Alter von 15 000 Jahren $\pm$ 3 000 Jahren.

d) Mein Gewicht beträgt 78 kg $\pm$ 2 kg.

169 Schreibe die folgenden Aussagen als Ungleichungen.

a) Der Weg ist kürzer als 3 km.

b) Die Kochzeit beträgt mindestens 10 min.

c) Bettina ist nicht größer als Christa, aber größer als Andi.

d) $x \approx 10{,}4$

e) $y \in [-2;\, 2[$

170 Albert bestimmt die Entfernung eines Gewitters durch Zählen der Sekunden zwischen Blitz und Donner. Er schätzt die Zeitdifferenz auf rund 3 s $\pm$ 0,5 s?

a) Wie weit ist das Gewitter entfernt? (Schallgeschwindigkeit $v = 344$ m/s $\pm$ 5 m/s)

b) Wie verbessert sich die Genauigkeit, wenn er die Zeit $t = 3{,}22$ s $\pm$ 0,05 s mit der Stoppuhr misst?

Gib für alle Ergebnisse Fehlerschranken in zwei verschiedenen Schreibweisen und die Anzahl der signifikanten Stellen an!

171 Nach einem Verkehrsunfall wird ein Bremsweg $s = 80$ m $\pm$ 1 m gemessen. Die Bremsbeschleunigung des Fahrzeuges wird mit $a = 9$ m/s^2 $\pm$ 0,5 m/s^2 geschätzt. Für die Geschwindigkeit des Fahrzeuges gilt: $v = \sqrt{2as}$

Ermittle die Geschwindigkeit des Fahrzeuges und gib das Ergebnis in der $\pm$-Schreibweise an. Wie viele signifikante Stellen hat das Ergebnis?
Hinweis: 1 m/s = 3,6 km/h

172 Leo Galli möchte die Höhe h eines Turmes aus der Fallzeit t eines Steins schätzen. Näherungsweise gilt: $h = \frac{g}{2}t^2$

Er stoppt $t = 3{,}2$ s $\pm$ 0,1 s und rechnet mit dem Wert $g = 9{,}81$ m/s^2 $\pm$ 0,02 m/s^2.

a) Gib die Höhe mit Fehlerschranken in zwei verschiedenen Schreibweisen an.

b) Leo findet einen genauen Wert der Fallbeschleunigung am Standort des Turmes heraus: $g = 9{,}80494$ m/s^2. Verbessert sich damit die Genauigkeit des Ergebnisses?

2.4 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Für Ungleichungen gilt, ähnlich wie für Gleichungen (siehe Band 5, Kapitel 3.1 und 3.2):

- T_L und T_R müssen sachlich und rechnerisch sinnvolle Ausdrücke sein. Wiederhole: Die Menge aller sachlich sinnvollen Werte heißt **Grundmenge** $\mathbb{G}$. Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ ist jene Menge, für die alle Terme rechnerisch zulässig sind. Meist gilt $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{G}$.

- Ungleichungen können, ebenso wie Gleichungen, wahr oder falsch sein.
  Wiederhole: Lösungsmenge $\mathbb{L}$ – alle Werte aus $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}$, für die die Ungleichung wahr ist.

- Ungleichungen heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

Äquivalenzumformungen: Die Aussage einer Ungleichung $T_L < T_R$ bleibt erhalten, wenn

1. auf beiden Seiten der gleiche Wert a addiert oder subtrahiert wird.

$$\begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid + a \\ T_L + a < T_R + a & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid - a \\ T_L - a < T_R - a & \end{array}$$

2. beide Seiten mit dem gleichen Wert $a > 0$ multipliziert oder durch den gleichen Wert $a > 0$ dividiert werden.

$$\begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid \cdot\, a > 0 \\ a\,T_L < a\,T_R & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid : a > 0 \\ \frac{T_L}{a} < \frac{T_R}{a} & \end{array}$$

3. Multiplikation mit oder Division durch einen Wert $a < 0$ dreht das Relationszeichen um!

$$\begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid \cdot\, a < 0 \\ a\,T_L > a\,T_R & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_L < T_R & \mid : a < 0 \\ \frac{T_L}{a} > \frac{T_R}{a} & \end{array}$$

Bemerkung: Alle Aussagen gelten sinngemäß auch für die Ungleichungen $T_L \leqslant T_R$, $T_L \geqslant T_R$ und $T_L > T_R$.

173 Löse die Ungleichung $-6x - 7(7x - 31) < 2(5 + 7x)$ in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

Ausführung:

$$\begin{array}{rl} -6x - 7(7x - 31) < 2(5 + 7x) & \text{beide Seiten ausmultiplizieren} \\ 217 - 55x < 10 + 14x & \mid -14x - 217 \\ -69x < -207 & \mid : (-69) \quad \text{Relationszeichen umdrehen!} \\ x > 3 & \end{array}$$

Lösung: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ Andere Schreibweisen: $x > 3$ oder $x \in]3; \infty[$

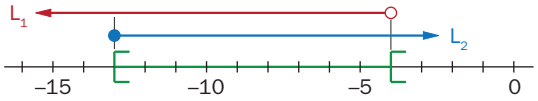
Bemerkung: Wenn keine Grundmenge angeben ist, wähle selbst die größte sinnvolle Grundmenge. In der Regel ist das $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

174 Löse das Ungleichungssystem $x + 5 < 1 \ \wedge \ 7 - x \leqslant 20$. Stelle die Lösung auf der Zahlengeraden grafisch dar.

Ausführung:
Die beiden Ungleichungen sind mit „und“ verbunden. x muss daher beide erfüllen.

$$\begin{array}{rl} x + 5 < 1 & \mid -5 \\ x < -4 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 7 - x \leqslant 20 & \mid -7 \\ -x \leqslant 13 & \mid \cdot (-1) \\ x \geqslant -13 & \end{array}$$

$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$, $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -13\}$. Beide Gleichungen müssen erfüllt sein, die Lösungsmenge des Gleichungssystems sind alle x, die in beiden Lösungsmengen enthalten sind.



Lösung: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -13 \leqslant x < -4\}$ Andere Schreibweise: $\mathbb{L} = [-13; -4[$

Aufgaben

175 Löse die Ungleichung und stelle die Lösung auf der Zahlengeraden grafisch dar:

a) $2x + 2 > 3x - 4$

b) $4x - 7 < 8 + 6x$

c) $\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \leqslant \frac{4}{3}x + \frac{31}{12}$

d) $\frac{5}{3}x + 2 \geqslant \frac{4}{5}x + 15$

176 Vereinfache und löse:

a) $6x + 7(7x + 31) \geqslant 2(5 - 7x)$

b) $3(-3x - 1) - 10x + 19 \leqslant 7(2 - 3x) + 12$

c) $12(2x + 1) - 13 < 8x + 3(5x + 4) - 6$

d) $3(7x + 12) - 5(3x + 4) > 11x - 19$

e) $\frac{3}{10}x - \frac{1}{5}(9x - 20) > \frac{1}{3}(x + 1)$

f) $\frac{1}{2}(2 - x) < -\frac{3}{40}(2x + 7) + 1$

177 Vereinfache und löse:

a) $\frac{2}{3}(-8x - 19) + 3(x + 2) > \frac{1}{4}(5x + 2)$

b) $\frac{x}{6} - 52 > \frac{2x}{9} + \frac{1}{5}(7x + 2)$

c) $2(x + 4) - 64 < 4x + \frac{1}{8}(9x + 2)$

d) $\frac{1}{5}(10x - 3) + \frac{1}{3}(50x - 30) \leqslant \frac{25x}{6} + x + \frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}(2x + 3) - \frac{1}{15}(4x - 5) \leqslant \frac{1}{6}(x + 2)$

f) $\frac{5}{4}(x + 3) - (x + 2) > \frac{1}{4}(17x + 71) + \frac{1}{5}(x + 4)$

178 Vereinfache und löse:

a) $\frac{5x - 1}{3} < \frac{7x - 4}{4}$

b) $\frac{11x - 3}{4} \leqslant \frac{8x - 1}{3}$

c) $\frac{14x - 1}{5} \geqslant \frac{19x - 121}{2}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{x + 1}{5} > \frac{4x - 26}{4}$

179 Gib die Lösungsmenge des Ungleichungssystems an und stelle sie auf der Zahlengeraden grafisch dar.

a) $x - 5 < 4 \ \wedge \ 5 - 4x \leqslant -4$

b) $2x + 1 < 2 \ \wedge \ 3 - 5x \leqslant 2$

c) $-3x - 1 \leqslant -3 \ \wedge \ x - 3 \leqslant -2$

d) $x - 4 \leqslant -1 \ \wedge \ 5x - 3 > 3$

180 Wie 179:

a) $2 - 4x > 1 \ \wedge \ 1 - 3x > -1$

b) $4 - 2x > -4 \ \wedge \ x + 4 > -4$

c) $3x + 1 < -x \ \wedge \ 3x + 4 > -3$

d) $-5x - 4 < -2x \ \wedge \ 3x - 4 \leqslant -5x$

181 Wie 179: Beachte, dass die Lösungsmenge nicht immer ein Intervall ist!

a) $5x - 1 \leqslant 0 \ \wedge \ x + 5 \leqslant -2$

b) $3x - 5 \geqslant 4 \ \wedge \ 11 - 2x \geqslant 5$

c) $4 - 5x \leqslant 5 \ \wedge \ 3x + 5 \leqslant 0$

d) $-3x \leqslant 5 \ \wedge \ x + 1 \leqslant -4$

2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidung

Dieser Abschnitt behandelt verschiedene Typen von Ungleichungen, deren Lösung Fallunterscheidungen erfordert. Neben der Fallunterscheidung - der klassische und sicher mathematisch strengste Lösungsweg – lernst du weitere Lösungsverfahren kennen. Oft ist eine gut gewählte grafische Darstellung einfacher und anschaulicher.

Quadratische Ungleichungen

182 Löse die quadratische Ungleichung $(x-1)(x-5)>0$ durch Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der Faktoren.

Ausführung: Das Produkt $(x-1)\,(x-5)$ ist positiv, wenn beide Faktoren positiv oder aber beide negativ sind.

Fall I: Vorzeichenmuster $++$ führt auf das Ungleichungssystem $x-1>0 \;\wedge\; x-5>0$.
Die Lösung erhältst du nach dem Muster des Beispiels 174: $\mathbb{L}_{++}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>5\}$

Fall II: Vorzeichenmuster $--$ führt auf das Ungleichungssystem $x-1<0 \;\wedge\; x-5<0$. Auch dieses System löst du mit denselben Rechenschritten wie in Fall I: $\mathbb{L}_{--}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1\}$

Weil $\mathbb{L}_{++}$ und $\mathbb{L}_{--}$ gültige Teil-Lösungsmengen sind, ist die gesamte Lösungsmenge die Vereinigung der beiden.

Lösung: $\mathbb{L}=\mathbb{L}_{++}\cup\mathbb{L}_{--}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1 \;\vee\; x>5\}$. Andere Schreibweise: $x\in\,]-\infty;\,1[\,\cup\,]5;\,\infty[$

Bemerkung: Wäre die Ungleichung in der Form $x^2-6x+5>0$ gegeben, müsste man zuerst den quadratischen Term faktorisieren, also in ein Produkt aufspalten (siehe dazu Band 5, S. 78 und S. 84). Dies ist bei den Ungleichungen von Aufgabe 186 der Fall.

Bruchungleichungen

183 Löse die Bruchungleichung $\frac{2}{x-1}<2$ durch Fallunterscheidung.

Ausführung: Zuerst bestimmst du die Definitionsmenge! Der Nenner darf nicht null sein, also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Bei Bruchgleichungen wäre der nächste Schritt Multiplikation mit dem Hauptnenner. Du kannst aber hier nicht mit $(x-1)$ multiplizieren und einfach weiterrechnen, weil du den Wert von $(x-1)$ nicht kennst. Er kann positiv oder negativ sein:

Fall I: $(x-1)>0$

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}&<2 &&|\cdot(x-1)\\ 2&<2(x-1)\\ 2&<2x-2 &&|+2\\ 4&<2x &&|:2\\ 2&<x\end{aligned}$$

Fall II: $(x-1)<0$

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}&<2 &&|\cdot(x-1)\\ 2&>2(x-1) &&|\text{ Rel. umdrehen!}\\ 2&>2x-2 &&|+2\\ 4&>2x &&|:2\\ 2&>x\end{aligned}$$

Der Fall I ergibt also das Ungleichungssystem $x-1>0 \;\wedge\; x>2$. Wie in Beispiel 174 bestimmst du $\mathbb{L}_1=\,]2;\,\infty[$. Im Fall II sind die Rechenschritte völlig gleich, nur die Relationszeichen im Ergebnis genau umgekehrt: $x-1<0 \;\wedge\; x<2$ und daher $\mathbb{L}_2=\,]-\infty;\,1[$.

Wie in Beispiel 182 ist die Lösungsmenge die Vereinigung beider Teilmengen.

Lösung: $\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x<1) \;\vee\; (x>2)\}$

184 Ein anderer Lösungsweg für Beispiel 183:
Finde die Bereichsgrenzen möglicher Lösungsbereiche und teste durch Einsetzen.

Ausführung: Löse zuerst statt der Ungleichung die Bruch*gleichung*! Die Rechenschritte verlaufen wie in Beispiel 183, nur ohne Fallunterscheidung.

$$\frac{2}{x-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\} \quad \text{und} \quad \mathbb{L} = \{2\}$$

Markiere auf der Zahlengeraden $x = 1$ und $x = 2$ durch offene Kreise: Diese Werte gehören sicher nicht zur Lösungsmenge der Ungleichung.

Es bleiben drei getrennte Bereiche: $x < 1$; $1 < x < 2$ und $x > 2$. Teste jeden Bereich einzeln, indem du jeweils einen Wert wählst und in die Ungleichung einsetzt.

Im Bereich	wähle	setze ein:		
$x < 1$	$x = 0$	$\frac{2}{x-1} < 2 \Rightarrow -2 < 2$	wahr
$1 < x < 2$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{\frac{3}{2}-1} < 2 \Rightarrow 4 < 2$	falsch
$x > 2$	$x = 3$	$\frac{2}{3-1} < 2 \Rightarrow 1 < 2$	wahr

Lösung: Die Ungleichung ist in den beiden Bereichen $x < 1$ und $x > 2$ erfüllt.
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x < 1) \vee (x > 2)\}$

Aufgaben

185 Löse die quadratische Ungleichung durch Fallunterscheidung.

a) $(x-2)(x-1) < 0$
b) $(x-9)(x+3) < 0$
c) $(x-1)(x+6) > 0$
d) $x(x+3) \geqslant 0$

186 Verwende zuerst den Satz von Vieta oder die kleine Lösungsformel, um den Term zu faktorisieren, und löse anschließend die Ungleichung durch Fallunterscheidung.

a) $x^2 + 7x + 10 > 0$ **b)** $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$
c) $x^2 + 10x + 9 < 0$ **d)** $x^2 + 16x + 63 \geqslant 0$
e) $x^2 + 8x + 15 > 0$ **f)** $x^2 + 9x + 14 \leqslant 0$
g) $x^2 - x - 42 < 0$ **h)** $x^2 - 12x + 35 > 0$

187 **a)** – **h)**: Löse die Ungleichungen aus Aufgabe 186 durch Festlegen und Testen möglicher Lösungsbereiche, so wie in Beispiel 184 gezeigt.

Anleitung: Löse zuerst die entsprechende Gleichung und trage die Lösungen auf dem Zahlenstrahl ein (offene Kreise für $>$ oder $<$, gefüllte Kreise für $\leqslant$ oder $\geqslant$). Die Punkte markieren die Grenzen verschiedener Bereiche. Teste jeden Bereich einzeln: Suche dir eine „schöne“ Zahl innerhalb des Bereichs aus und teste, ob die Ungleichung erfüllt ist.

188 Löse die Bruchungleichung durch Fallunterscheidung.

a) $-\frac{2x}{2x-8} < 3$ **b)** $\frac{6x}{4x+3} < 0$
c) $\frac{3x}{5-x} > 4$ **d)** $\frac{2x}{5x+8} \leqslant 1$

189 **a)** – **d)**: Löse die Ungleichungen aus Aufgabe 188 durch Festlegen und Testen möglicher Lösungsbereiche, so wie in Beispiel 184 gezeigt.

190 Entscheide jeweils, ob eine Fallunterscheidung notwendig ist, und gib die Lösungsmenge an:

a) $-\frac{2x+5}{-8} < 100$ **b)** $(2x+5)(x-2) < 0$
c) $\frac{8x}{x-5} < 3$ **d)** $-5x + 32 \geqslant -3$

Betragsungleichungen

191 Löse durch Fallunterscheidung die Betragsungleichung: $2|x-5| > x$

Ausführung:

Fall I: Der Term $x-5$ ist positiv oder null.
Dann haben die Betragsstriche keine Auswirkung und du kannst sie weglassen. Damit entsteht das Ungleichungssystem $x-5 \geqslant 0 \quad \wedge \quad 2(x-5) > x$. Du löst es nach dem Musterbeispiel 174 und erhältst: $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$

Fall II: Der Term $x-5$ ist negativ.
Dann drehen die Betragsstriche sein Vorzeichen um. Das Ungleichungssystem lautet
$x-5 < 0 \quad \wedge \quad 2(-x+5) > x$ mit der Lösung: $\mathbb{L}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{10}{3}\right\}$

Lösung: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(x < \frac{10}{3}\right) \quad \vee \quad \left(x > 10\right)\right\}$

Grafische Darstellung

Hinweis

Die beiden Seiten einer Ungleichung lassen sich auch als Funktionsterme auffassen:

$$T_L(x) < T_R(x)$$

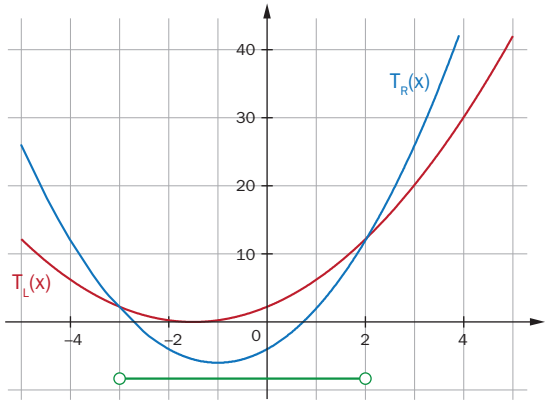
Zur grafischen Lösung der Ungleichung zeichnest du (oder dein Rechner) die beiden Funktionsterme. Im Schaubild erkennst du, in welchen Bereichen der Funktionsgraph von T_R oberhalb von T_L verläuft. Solche Bereiche entsprechen Lösungen der Ungleichung $T_L(x) < T_R(x)$. Die Schnittpunkte der Funktionsgraphen entsprechen den Bereichsgrenzen. Ob sie zur Lösungsmenge gehören oder nicht, hängt davon ab, ob $\leqslant$ oder $<$ gilt.

192 Löse grafisch die Ungleichung: $(x+1)(x+2) > 2x^2 + 4x - 4$

Ausführung:

Die beiden Funktionsgraphen schneiden einander bei $x = -3$ und $x = 2$.

Im Bereich $-3 < x < 2$ liegt der Graph von T_L oberhalb von T_R. Dort gilt also $T_L > T_R$.



Lösung: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2)$

Bemerkung: Der grafische Lösungsweg funktioniert ähnlich wie der Lösungsweg der Aufgabe 184: Die x-Werte der Schnittpunkte entsprechen den Grenzen möglicher Lösungsbereiche. Die Gültigkeit der Ungleichung in den einzelnen Bereichen lässt sich direkt aus dem Schaubild ablesen. Das obige Musterbeispiel hätte sich aber auch äquivalent zu $(x-2)(x+3) < 0$ umformen und durch Fallunterscheidung lösen lassen.

Aufgaben

193 Bestimme die Lösungsmenge der Betragsungleichung durch Fallunterscheidung:

a) $2|x-3| > x+3$

b) $\frac{1}{2}|x+2| \leqslant 0{,}25x+2$

c) $2|3x+5| \geqslant x+25$

d) $|2x+6| \leqslant -x$

194 Bestimme die Lösungsmenge der Betragsungleichung durch Fallunterscheidung

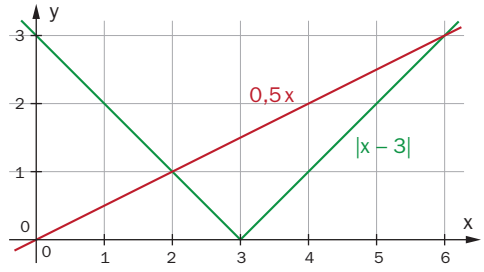
a) $|2x-3| \geqslant 0{,}5x+6{,}75$

b) $\frac{1}{3}|2x-6| \leqslant -0{,}5x+5$

c) $0{,}2x+7{,}6 > 0{,}6|x-2|$

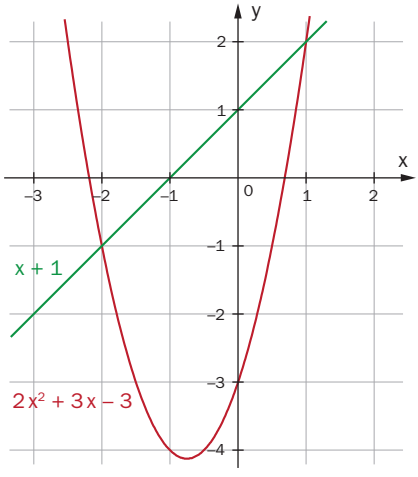
d) $3|\frac{x}{3}-2| < 0{,}5x+4{,}5$

195 Löse mithilfe der dargestellten Funktionsgraphen:



a) $|x-3| > 0{,}5x$ **b)** $0{,}5x \geqslant |x-3|$

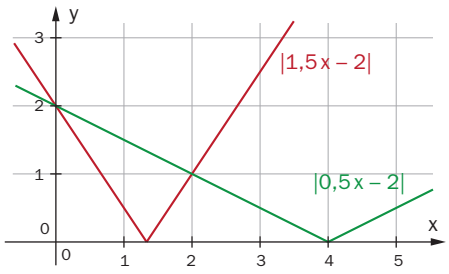
196 Löse mithilfe der dargestellten Funktionsgraphen:



a) $2x^2+3x-3 \leqslant x+1$

b) $x+1 < 2x^2+3x-3$

197 Löse mithilfe der dargestellten Funktionsgraphen:



a) $|1{,}5x-2| \geqslant |0{,}5x-2|$

b) $|0{,}5x-2| > |1{,}5x-2|$

198 Löse grafisch:

a) $x^2+7x+10 > 0$

b) $x^2+4x > 5$

c) $x^2+16x \geqslant x$

d) $(x-4)(x+5) > 0$

199 Löse grafisch:

a) $2x^2+x > 10$

b) $x^2+3x-4 \leqslant x^2+16x+9$

c) $x^2-12 \geqslant 4x$

d) $x^3-3x^2-6x+8 > 0$

200 Löse die Ungleichungen aus Aufgabe 193 auch grafisch!

201 Löse grafisch:

a) $-\frac{2x}{2x-8} > 3$ **b)** $\frac{5x}{x+2} < 3$

c) $\frac{x}{4-x} \geqslant 1$ **d)** $\frac{3x}{5x+6} \leqslant 1$

202 Versuche, das Lösungsverfahren des Musterbeispiels 184 mathematisch zu begründen.

Anleitung: Du findest die Grenzen möglicher Lösungsbereiche durch Lösen der Gleichung anstatt der Ungleichung. Du testest die Ungleichung für jeweils einen Punkt des Bereiches und nimmst an, dass damit auch die Aussage für alle Punkte des Bereiches gilt.

Angenommen, es gäbe in einem Bereich zwei Punkte, einer erfüllt die Ungleichung, der andere nicht. Erkläre, warum diese Annahme zu einem Widerspruch führt!

2.6 Lineare Ungleichungssysteme in zwei Unbekannten E

In der Wirtschaft treten bei Planungs- und Transportproblemen und bei der Optimierung von Produktionsprozessen oft lineare Ungleichungen auf: z. B. kann eine Spedition zur gleichen Zeit nicht mehr Fahrzeuge einsetzen, als im Fuhrpark bereit stehen; die Masse des Ladegutes darf das zulässige Gesamtgewicht nicht überschreiten; Maschinen können nicht mehr als eine bestimmte Menge produzieren. Alle Einschränkungen zusammen bilden ein System linearer Ungleichungen. Die **lineare Programmierung** ist ein mathematisches Verfahren, das für solche Probleme Lösungsmengen findet und die beste Lösung daraus auswählt.

Dieses Kapitel zeigt dir an einfachen Beispielen wichtige Grundideen der linearen Programmierung. Weiterführende Information enthält die Themenseite am Ende des Kapitels.

Ein System linearer Ungleichungen in zwei Unbekannten hat beispielsweise die Form:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + y > 1 \\ \text{II:}\quad & x + 5y \leqslant 8 \\ \text{III:}\quad & x - y < 2 \end{aligned}$$

Du kennst aus der fünften Klasse den Zusammenhang zwischen Gleichungen der Form $ax + by = c$ und Geraden im $\mathbb{R}^2$: Die Lösungen der Gleichung liegen auf einer Geraden. Für lineare Ungleichungen besteht ein ähnlicher Zusammenhang.

Die Lösungsmenge linearer Ungleichungen der Art

$$ax + by < c \qquad ax + by \leqslant c \qquad ax + by \geqslant c \qquad ax + by > c$$

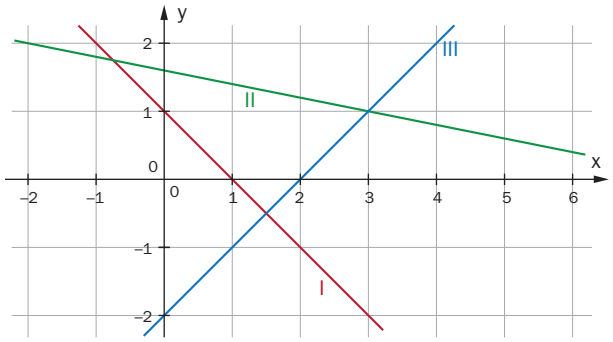
ist eine Halbebene im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gerade $ax + by = c$ begrenzt wird.
Auf welcher Seite der Geraden die Lösungsmenge liegt, lässt sich durch Einsetzen eines Testpunktes entscheiden.
Für Ungleichungen mit $\leqslant$ oder $\geqslant$ gehört die Gerade selber auch zur Lösungsmenge, sonst nicht.

203 Löse grafisch das Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + y > 1 \\ \text{II:}\quad & x + 5y \leqslant 8 \\ \text{III:}\quad & x - y < 2 \end{aligned}$$

Ausführung:

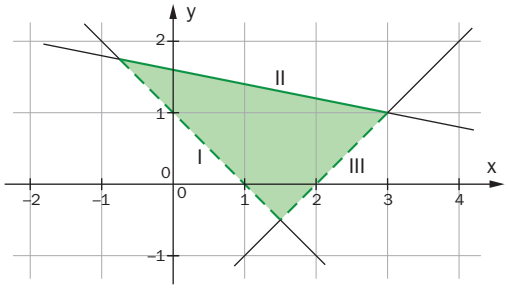
Zeichne zuerst die entsprechenden Geraden. Das geht rasch, weil du für jede Gerade durch passendes Einsetzen von *x*- oder *y*-Werten zwei Punkte (mit „schönen“ Koordinaten) findest.



Wenn du den Testpunkt $(0|0)$ in die Gleichungen einsetzt, findest du für jede Gerade heraus, auf welcher Seite die Lösungsmenge liegt.

- Für die erste Gleichung: $0 > 1$ ist falsch, also enthält die Lösungsmenge nicht den Punkt $(0|0)$, sondern liegt auf der anderen Seite: $\mathbb{L}_1$ = Halbebene oberhalb von $x + y = 1$
- Bei der zweiten Gleichung ist $0 \leqslant 8$ wahr, die Lösungsmenge enthält also den Punkt $(0|0)$ und daher ist $\mathbb{L}_2$ die Halbebene unterhalb von $x + 5y = 8$ und (weil $\leqslant$ gilt) die Gerade selbst.
- Dritte Gleichung: $0 < 2$ ist wahr, $\mathbb{L}_3$ ist die Halbebene links von $x - y = 2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Ungleichungssystems enthält jene Punkte, die in *allen drei* Halbebenen liegen: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$. Die Schnittmenge der drei Halbebenen ist in diesem Fall ein Dreieck.



Lösung: Die Lösungsmenge ist das eingezeichnete Dreieck. Die durchgehend gezeichnete Dreiecksseite gehört zur Lösungsmenge, die beiden strichlierten Seiten nicht.

Aufgaben

204 Löse grafisch das Ungleichungssystem:

a) $4x + y > -2$; $-x + 2y > -4$; $3x + 3y < 3$

b) $x + 2y > 3$; $-2x - y > -6$; $-x + y < 0$

c) $x + y > 2$; $x - y \geqslant 2$; $y > 1$

d) $x + y \geqslant 2$; $4x + y \geqslant 8$; $2x - y \geqslant -2$

e) $-2x + 2y < -3$; $x + 3y > 8$; $x + y < 8$

f) $x + 2y > 13$; $-2x + 3y < 8$; $-4x + y > -32$

205 Löse grafisch das Ungleichungssystem. Die ersten beiden Ungleichungen legen den Quadranten fest, in dem die Lösungsmenge liegt. Die restlichen Gleichungen schränken den Bereich weiter ein.
Beachte: Das System kann auch unlösbar sein!

a) $x > 0$; $y < 0$; $x - y < 1$; $x - 2y < 3$

b) $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $-x + y < -2$; $x - 2y > 1$

c) $x \leqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x - y \geqslant -3$; $x - 3y \geqslant -5$

d) $x > 0$; $y > 0$; $x + y \geqslant 4$; $x + 2y \geqslant 6$; $2x + 3y \geqslant 11$

e) $5x - 2y > -4$; $4x + y < 33$; $x - 2y > -12$; $x + 8y > 16$

f) $-2x + y < 8$; $x - 2y < -7$; $x + 4y < 41$; $x + y > 8$

g) $x - y > -3$; $4x + y < 36$; $x - 2y > -9$; $x + 3y > 9$

h) $-2x + y < 1$; $7x + 2y < 65$; $x - 4y > -25$; $x + 4y > 13$

2.7 Näherungsverfahren für Gleichungen E

Die Abschnitte dieses Kapitels haben dich mit vielen Methoden zur exakten Lösung von Gleichungen, Ungleichungen und -systemen vertraut gemacht. Wenn du nun glaubst, dass es für jedes mathematische Problem so ein exaktes Verfahren gibt, müssen wir dich enttäuschen. Im Gegenteil – wesentlich mehr als die hier vorgestellten Probleme lassen sich gar nicht exakt lösen.
Für alle anderen Probleme ist man auf **iterative Näherungsverfahren** angewiesen. Damit bezeichnet man Verfahren, die zwar die exakte Lösung nicht erreichen, ihr aber beliebig nahe kommen.

Das Bisektionsverfahren

Für eine Gleichung in der Form $f(x) = 0$ benötigt das Verfahren Startwerte a und b, für die gilt: $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Im Intervall $[a; b]$ liegt daher eine Lösung der Gleichung.

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, nehmen wir die Intervallmitte $\frac{a+b}{2}$ als neuen Wert für a, falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, nehmen wir $\frac{a+b}{2}$ als neuen Wert für b. Das neue Intervall $[a; b]$ ist nur mehr halb so breit.

Wieder betrachten wir die Intervallmitte des neuen Intervalls und erhalten wie vorher ein weiteres Intervall $[a; b]$, etc.

Für die Intervalle $[a; b]$ gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Sie enthalten daher eine Lösung der Gleichung. Diese wird immer genauer bestimmt, weil die Breite des Intervalls bei jedem Schritt halbiert wird.

206 Löse die Gleichung $x^3 - 8x - 17 = 0$ näherungsweise mit dem Bisektionsverfahren.

Ausführung: Die Funktion lautet: $f(x) = x^3 - 8x - 17$

Schritt 1: Um Startwerte a und b zu ermitteln, berechnen wir die Funktionswerte $f(0) = -17$, $f(1) = -24$, $f(2) = -25$, $f(3) = -14$ und $f(4) = +15$.
Das erste Intervall $[a; b]$ ist $[3; 4]$, weil $f(3) < 0$ und $f(4) > 0$.

Schritt 2: $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$ und $f(3{,}5) = -2{,}125 \Rightarrow$ neues Intervall $[3{,}5; 4]$

Schritt 3: $\frac{3{,}5+4}{2} = 3{,}75$ und $f(3{,}75) \approx 5{,}73 \Rightarrow$ neues Intervall $[3{,}5; 3{,}75]$

Schritt 4: $\frac{3{,}5+3{,}75}{2} = 3{,}625$ und $f(3{,}625) \approx 1{,}63 \Rightarrow$ neues Intervall $[3{,}5; 3{,}625]$

Ergebnis: Die Lösung der Gleichung ist: $x = 3{,}5625 \pm 0{,}0625$

Die Regula Falsi

Die Regula Falsi berechnet aus zwei ungenauen Werten einen neuen, verbesserten Wert:

$$\text{Wert}_{neu} = \text{Wert}_1 - \text{Rest}_1 \cdot \frac{\text{Wert}_1 - \text{Wert}_2}{\text{Rest}_1 - \text{Rest}_2}$$

207 Löse die Gleichung $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$ näherungsweise mit der Regula Falsi.

Ausführung: *Schritt 1:* Eine grafische Darstellung zeigt, dass geeignete Startwerte $\text{Wert}_1 = 0$ und $\text{Wert}_2 = 1$ sind. Beide Werte erfüllen die Gleichung nicht. Einsetzen ergibt

für Wert_1: $2 \cdot 0^3 - 7 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = +4 = \text{Rest}_1$

für Wert_2: $2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = -6 = \text{Rest}_2$

Schritt 2: Berechnen des neuen, verbesserten Wertes. Einsetzen in die Formel ergibt:

$$\text{Wert}_3 = 0 - 4 \cdot \frac{0-1}{4-(-6)} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\text{Rest}_3 = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{5} + 4 = \frac{126}{125} = 1{,}008$$

Der neue Restbetrag ist schon deutlich kleiner.

Schritt 3: Wiederholung des Regula-Falsi-Schrittes, nur diesmal mit Wert_2 und Wert_3 anstelle von Wert_1 und Wert_2. Wir bezeichnen den neuen Wert als Wert_4.

$$\text{Wert}_4 = 1 - (-6) \cdot \frac{1-0{,}4}{(-6)-1{,}008} = 0{,}48630$$

$$\text{Rest}_4 = 2 \cdot 0{,}48630^3 - 7 \cdot 0{,}48630^2 - 5 \cdot 0{,}48630 + 4 = 0{,}14308$$

Der Rest nimmt rasch ab. Die nächsten Schritte liefern: $\text{Wert}_5 = 0{,}500578$ ($\text{Rest}_5 = -0{,}00606844$) und $\text{Wert}_6 = 0{,}499997$ ($\text{Rest}_6 = 0{,}0000320302$).

Ergebnis: Eine Näherungslösung der Gleichung ist: $x \approx w_6 = 0{,}499997$

Beachte: Andere Startwerte können andere Lösungen liefern.

Aufgaben

208 Löse die Gleichung auf eine Dezimalstelle genau mit dem Bisektionsverfahren.

a) $2x^3 - 13x^2 + 15x = 0$
b) $x^3 + 3x - 9 = 0$
c) $x^5 + 15x + 15 = 0$
d) $x^3 + 3x - 3 = 0$

209 Wähle selber Startwerte und rechne mit der Regula Falsi, bis der Rest $< 10^{-2}$ geworden ist. Wenn für einen Startwert schon Rest 0 herauskommt, hast du Glück gehabt:
Du hast eine Lösung gefunden und brauchst nicht weiterzurechnen!

a) $2x^3 - 13x^2 + 15x = 0$
b) $x^3 + 3x - 9 = 0$
c) $x^5 + 15x + 15 = 0$
d) $x^3 + 3x - 3 = 0$

210 Löse die Gleichung auf Zehntel genau. Benutze das Bisektionsverfahren und die Regula Falsi!

a) $x^3 + x - 4 = 0$ **b)** $x^3 - x + 4 = 0$
c) $x^3 - x^2 - 7 = 0$ **d)** $x^3 + x^2 - 7 = 0$

211 Durch eine jährliche Zahlung von 100 Euro erreicht ein Sparkonto nach 10 Jahren einen Wert von 1 248,70 Euro. Es gilt

$$1248{,}70 = 100 \cdot \frac{q\,(q^{10} - 1)}{q - 1}$$

Der Aufzinsungsfaktor q lässt sich nur näherungsweise berechnen. Erfahrungsgemäß liegt er im Bereich $1{,}01 \leqslant q \leqslant 1{,}10$. Bestimme ihn mit der Regula Falsi!

212 *Leonardo von Pisa*, genannt *Fibonacci*, hat die Regula Falsi erstmals in der europäischen Mathematik beschrieben.

Das ist eine Aufgabe aus seinem *Liber Abaci:*

Sechs Personen hatten zusammen eine bestimmte Summe Denare. Ohne den ersten hatten die anderen fünf zusammen 75 Denare. Ohne den zweiten hatten die anderen fünf zusammen 70 Denare. Weiter der Reihe nach: ohne den dritten, 67 Denare; ohne den vierten, 64 Denare; ohne den fünften, 54 Denare; ohne den sechsten, 50 Denare. Gefragt ist, wie viel jeder einzelne gehabt hat.

Nimm an, es wären insgesamt 100 Denare (Wert_1). Dann ergibt sich leicht: der erste muss 25, der zweite 30 und die nächsten jeweils 33, 36, 46, 50 Denare haben. Die Summe ergibt aber $25 + 30 + 33 + 36 + 46 + 50 = 220$. Das ist um 120 zu viel (Rest_1).

Probiere nun für insgesamt 90 Denare (Wert_2). Die einzelnen Beträge 15, 20, 23, 26, 36, 40 ergeben in Summe 160, immer noch um 70 zu viel. (Rest_2).

Berechne mit der Regula Falsi einen neuen Wert und den Rest. Was erkennst du hier?

Leonardo von Pisa (um 1180–1240)

Vermischte Aufgaben

213 Wähle ein günstiges Verfahren und löse:

a)
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 0 \\ -10x + 3y + 2z &= -69 \\ 5x + 9y + 10z &= 120 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 3 \\ 3y + z &= 5 \\ -3x + 6z &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 9 \\ 2x - 4y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ -5y + z &= 12 \\ 2x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

214 Stelle fest, ob ein Sonderfall vorliegt, und bestimme die Lösungsmenge!

a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ x + 2y + z &= 8 \\ 2x + y - 4z &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ x + 2y + z &= 8 \\ 2x + y - 4z &= 7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x + 5y + z &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 3 \\ 3y + 9z &= 7 \end{aligned}$$

215 Für ein Fahrzeug wird auf der Autobahn eine Geschwindigkeit $v = 144$ km/h $\pm$ 7,2 km/h gemessen. Für den Bremsweg gilt $s = \frac{v^2}{2a}$. Wie lang ist der Bremsweg, wenn man die Bremsbeschleunigung mit $a = 9$ m/s^2 $\pm$ 0,5 m/s^2 schätzt?
Hinweis: 1 m/s = 3,6 km/h

216 Weltrekord im 100-m-Lauf (*Usain Bolt* 2009): 9,58 s.

a) Angenommen, die Zeit ist auf $\pm$ 0,005 s genau gemessen, welche Unsicherheit ergibt sich für die Durchschnittsgeschwindigkeit?

b) *Florence Griffith-Joyner* lief 1988 mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit (gerundet auf zwei Nachkommastellen) von 9,53 m/s zum Weltrekord. Berechne ihre Laufzeit mit Fehlerschranken.

c) Praktisch ist die Streckenlänge nur auf $\pm$ 1 cm genau angebbar. Welche Unsicherheit in den Laufzeiten von Usain und Florence resultiert aus dieser Ungenauigkeit?

217 **a)** Der rund 8,3 km lange Gleinalmtunnel liegt auf der A9 zwischen St. Michael und Graz. Die Höchstgeschwindigkeit im Tunnel beträgt 80 km/h. Wie lange dauert die Durchfahrt?

b) Stefan Stausteh fährt bei ungünstigen Verkehrsverhältnissen mit 65 km/h $\pm$ 15 km/h. Frieda Freifahr kann bei geringem Verkehr mit 75 km/h $\pm$ 5 km/h durchfahren. Wie lange brauchen sie?

c) Wie verändern sich die Fehlerschranken in Aufgabe b), wenn du mit dem metergenauen Wert 8 320 m für die Tunnellänge rechnest?

218 Die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind $a = 125$ mm $\pm$ 1 mm und $b = 80$ mm $\pm$ 0,5 mm.
Gib Schranken für die Länge der Hypotenuse c und die Fläche A an (mit Ungleichungen, mit Intervall- und $\pm$-Schreibweise).

219 In einem zylindrischen Becher mit Radius $r = 4{,}2$ cm $\pm$ 0,1 cm befinden sich 240 ml $\pm$ 3 ml Wasser.

a) Wie hoch steht das Wasser im Becher? Gib für das Ergebnis Fehlerschranken und die Anzahl signifikanter Stellen an.

b) Nimm an, der Radius sei auf $\pm$ 0,1 mm genau. Welche Fehlerschranke für das Volumen wäre zulässig, damit die Höhe auf Zehntelmillimeter genau bestimmt ist?

220 Für die Schwingungsdauer eines Pendels gilt $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, wobei l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung ist. Bei einer Messserie erhält man für die Schwingungsdauer T eine Zeit von 2,56 s $\pm$ 0,01 s. Die Pendellänge beträgt exakt 1,5 m.

a) Bestimme den Wert der Erdbeschleunigung. Wie viele signifikante Stellen hat das Ergebnis?

b) Wie verändern sich die Fehlerschranken für die Erdbeschleunigung, wenn die Pendellänge nur auf cm genau gemessen wurde?

221 **a)** Zeigt: Um in einem linearen System aus n Gleichungen und n Unbekannten die erste Unbekannte nach dem Schema von Beispiel 149 zu eliminieren, sind im Allgemeinen $n(n-1)$ Additionen notwendig.

b) Überprüft folgende Formel für $n = 2$ und $n = 3$: Die Anzahl der Additionen zur Umwandlung eines Systems von n linearen Gleichungen und n Unbekannten auf Dreiecksform beträgt $\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$

c) Ein Computer bewältigt etwa 1 Milliarde Rechenschritte in der Sekunde. Wie lange braucht er für die Umwandlung eines Systems aus 100, 1 000, 10 000 Gleichungen auf Dreiecksform?

d) Wissenschaftliche oder technische Berechnungen erfordern routinemäßig die Lösung von Gleichungssystemen mit 100 000 oder mehr Unbekannten. Ist das allgemeine Eliminationsverfahren dafür geeignet?

e) Für besonders Interessierte: Versucht, die in b) angegebene Formel allgemein zu beweisen. Verwendet dazu vollständige Induktion (siehe Abschnitt 3.10).

222 Gib die Lösungsmenge des Ungleichungssystems an und stelle sie auf der Zahlengeraden grafisch dar.

a) $2x + 1 \geqslant 3 \quad \wedge \quad 4 - x \geqslant 2$

b) $2x - 5 < -10 \quad \wedge \quad x - 5 \geqslant 2x + 2$

c) $4x + 12 > 2 \quad \wedge \quad 8x + 8 < -4x + 56$

d) $-3x - 5 \geqslant 2 - 2x \quad \wedge \quad x - 7 < 2x - 2$

223 Wie 222:

a) $8 - 3{,}5x \leqslant -18 + 3x \wedge 10 - x < 20 - 2x$

b) $2{,}5x + 6 > 8 \quad \wedge \quad 2x - 5 \geqslant 0{,}5x + 2{,}5$

c) $2x + 5 \leqslant 2 - 2x \quad \wedge \quad 3x - 2 > x + 3$

d) $2{,}5x - 5 \leqslant 8 + 3x \wedge 2x - 13 \leqslant 20 - x$

224 Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

a) $x^2 + 300 > 40x$

b) $x(x-2) < -2$

c) $x(x+7) < x^2 + 3x + 20$

d) $x(x+7) < 30$

225 Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

a) $\frac{2}{4-2x} < -1$ **b)** $\frac{x}{2x+5} \geqslant 5{,}5$

c) $\frac{3x}{7-x} < -4$ **d)** $\frac{3x}{7-x} < 2$

226 Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

a) $2|x-6| > 0{,}5x$ **b)** $|2x-5| < x-3$

c) $|x-8| < x$ **d)** $|3x-8| < 2x-3$

227 Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

a) $\frac{2+x^2}{x-3} > x+2$ **b)** $\frac{2x^2+x-1}{x^2+1} < 2$

c) $\frac{3x+1}{x+1} > 3$ **d)** $\frac{x^2+5}{x+1} > 3$

228 Gegeben sind die vier Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wie lässt sich der Vektor $\vec{d}$ durch geeignete Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zusammensetzen? Gesucht sind also Koeffizienten x, y und z, so dass $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Stelle ein Gleichungssystem auf und löse es!

229 Aufgabe 228 zeigt eine wichtige geometrische Interpretation eines linearen Gleichungssystems in drei Variablen. Die *Spalten* der Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems entsprechen drei Vektoren. Gesucht ist eine Linearkombination dieser Vektoren, welche den Vektor der rechten Seite ergibt:

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

In dieser Interpretation lassen sich die möglichen Lösungsfälle geometrisch veranschaulichen.

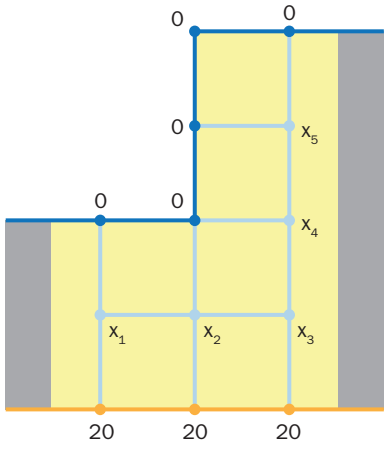
Diskutiert: In welchen Fällen kann man aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen beliebigen Vektor $\vec{d}$ zusammensetzen? In diesen Fällen hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung!
In welchen Fällen gibt es mehrere Möglichkeiten, den Vektor $\vec{d}$ zu bilden? Wie kann es sein, dass es unmöglich ist, den Vektor $\vec{d}$ auszudrücken?

Hinweis: In Abschnitt 4.11 werdet ihr eine andere – ebenfalls sehr wichtige – geometrische Interpretationsmöglichkeit für lineare Gleichungssysteme in drei Variablen kennenlernen.

230 Wie entstehen Systeme mit mehreren tausend Unbekannten? Ein Anwendungsbeispiel:

Wir betrachten einen L-förmigen Bauteil im Querschnitt (siehe Skizze). Die Oberflächentemperatur beträgt auf einer Seite 20 °C, auf der anderen 0 °C. Die anderen beiden Seiten sind wärmeisoliert. Nach einiger Zeit ändert sich die Temperaturverteilung im Inneren nicht mehr. Diese Temperaturverteilung soll berechnet werden.

Wir legen ein Gitter von Punkten x_1 bis x_5 in das Rechengebiet. Die Temperatur in diesen Rechenpunkten bestimmen wir näherungsweise als das arithmetische Mittel der Nachbarpunkte im Gitter.



Der Punkt x_1 hat drei Gitternachbarn: x_2 und je einen Randpunkt mit Wert 0 bzw. 20; es gilt:

$x_1 = \frac{1}{3}(x_2 + 0 + 20) \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 - x_2 = 20$

Stelle das vollständige Gleichungssystem auf und löse durch Elimination oder mit einem Rechner/Computer.

Hinweis:
Die erhaltenen Temperaturwerte geben nur ein recht grobes Bild der tatsächlichen Temperaturverteilung. Genauer werden die Ergebnisse mit feineren Rechengittern.

Jetzt siehst du auch, wie leicht riesengroße Gleichungssysteme entstehen können.
Ein Gitter von 10 × 10 Punkten ergibt bereits 100 Unbekannte. Ein räumliches Gitter mit 10 × 10 × 10 Punkten – das ist noch gar nicht besonders genau – ergibt 1 000 Unbekannte.

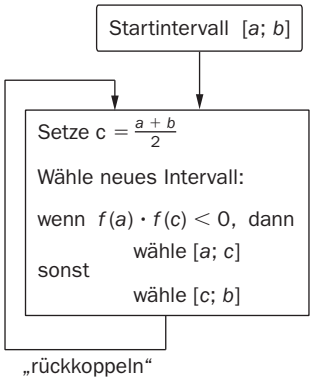
231 Löse grafisch das Ungleichungssystem:

a) $\begin{aligned} x + 3y &< 12 \\ x - y &< 6 \\ 2x + y &> 9 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x - 2y &\geqslant -2 \\ 2x - y &\leqslant 10 \\ 4x + 3y &> 11 \end{aligned}$

232 Löse grafisch das Ungleichungssystem:

a) $\begin{aligned} 3x + 4y &\geqslant 8 \\ x + 2y &\geqslant 5 \\ x - 3y &\geqslant -13 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x - y &\geqslant -1 \\ x + 2y &< 5 \\ 2x - 3y &\geqslant -7 \end{aligned}$

233 Das folgende (vereinfachte) Iterationsdiagramm zeigt den Ablauf des Bisektionsverfahrens zur näherungsweisen Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.



a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - x - 2$ Ermittle einen Näherungswert für ihre Nullstelle indem du den Algorithmus schrittweise ausführst. Gehe dabei vom Startintervall $[a; b] = [1; 2]$ aus und berechne vier Schritte.

b) Gib für die ersten vier Schritte die Intervallbreite an, in dem der Näherungswert zu finden ist.

c) Versuche in einem Computeralgebrasystem den durch das Iterationsdiagramm angegebenen Algorithmus zu implementieren.

234 Bestimme jeweils die Lösung der Gleichung auf Zehntel genau. Benutze das Bisektionsverfahren und die Regula Falsi!

a) $x^3 + x - 5 = 0$ **b)** $x^3 - 3x + 3 = 0$

c) $-2x^3 - 2x + 1 = 0$ **d)** $2x^3 - x - 5 = 0$

e) $x^3 + x^2 - 5 = 0$ **f)** $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$

Sprache der Mathematik

235 **Thema Lineare Gleichungssysteme**

a) Wann ist ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und Unbekannten besonders einfach lösbar? Gib Beispiele an und verwende bei deinen Erklärungen die Begriffe *Zeile*, *Spalte*, *Koeffizient*, *eliminieren*, *substituieren*.

b) Gleichungssysteme mit drei Unbekannten sind im Allgemeinen rechnerisch wesentlich aufwendiger als solche mit zwei Unbekannten. Erkläre: Warum bewirkt eine Unbekannte mehr so viel rechnerischen Mehraufwand? Sprich dabei über die notwendige Anzahl an Rechenoperationen, um eine Unbekannte zu eliminieren.

c) Nicht alle Gleichungssysteme sind lösbar. Gib Beispiele an, wo keine Lösung existiert.

d) Wie kann es passieren, dass beim Eliminationsverfahren eine ganze Zeile des Gleichungssystems verschwindet? Gib Beispiele an, wo dieser Fall auftritt.

236 **Thema Fehlerschranken**

Erkläre, warum die folgenden Aussagen richtig sind oder was an ihnen unpräzise oder falsch ist.

a) Wenn die Länge eines Rechtecks sehr ungenau gemessen wurde, muss die Breite umso genauer angegeben werden, damit die Fläche ungefähr stimmt.

b) Wenn die Länge eines Rechtecks um x zu groß und die Breite dafür um x zu klein gemessen wurde, gleichen sich die Fehler bei der Berechnung des Flächeninhalts aus.

c) Wenn die Länge eines Rechtecks um x zu groß und die Breite dafür um x zu klein gemessen wurde, gleichen sich die Fehler bei der Berechnung des Umfangs aus.

d) $\pi \approx \frac{355}{113}$ ist für alle praktischen Zwecke ausreichend genau.

237 Begründe deine Antwort: Ist a auf n und b auf m Nachkommastellen genau, dann ist das Produkt $a\,b$ auf wie viele Nachkommastellen genau?

☐ $n + m$ ☐ $n \cdot m$ ☐ Maximum von n und m ☐ Minimum von n und m

238 **Thema Ungleichungen und Ungleichungssysteme**

a) Worin unterscheiden sich Äquivalenzumformungen bei Gleichungen und Ungleichungen?

b) Warum sind bei Bruchungleichungen Fallunterscheidungen notwendig, bei Bruchgleichungen aber nicht?

c) In welchen Fällen ist die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems der Durchschnitt zweier Mengen, in welchen Fällen die Vereinigung?

239 **Thema lineare Ungleichungen in zwei Unbekannten**

a) Erkläre die geometrische Deutung einer linearen Gleichung und der entsprechenden Ungleichung.

b) Erkläre die geometrische Deutung eines Systems zweier linearer Gleichungen und der entsprechenden Ungleichungen.

c) Welche geometrische Form kann die Lösungsmenge eines Systems dreier Ungleichungen in zwei Unbekannten haben? Überlege verschiedene Fälle.

Lineare Optimierung

Der optimale Schinken-Käse-Toast

Sarah und Tim wollen gesund und schmackhaft kochen. Ihre Richtlinien sind:

- 10 – 22 % der Gesamtkalorien aus dem Eiweiß-Anteil der Nahrung
- 50 – 60 % aus Kohlehydraten
- 20 – 35 % aus Fett
- möglichst wenig gesättigte Fettsäuren

So weit, so gut: mit Hafermüsli und Kräutertee schaffen sie das locker. Jetzt kommt die Herausforderung: ihr Lieblingsgericht ist Schinken-Käse-Toast. Das Rezept dafür lautet (vereinfacht – das ist ein Mathematik- und kein Kochbuch!):

Zutaten:	2 Scheiben Toastbrot (72 g); x g magerer Schinken; y g Emmentaler

Tim mag Toasts mit $(x|y) = (35; 40)$,

Sarah nimmt etwas weniger: $(x|y) = (30; 30)$

- Erfüllen beide Rezepte die Ernährungsrichtlinien? Wessen Toast enthält weniger gesättigte Fettsäuren? — Diese Fragen sind typische Mischungsaufgaben[1]. Sie lassen sich mit *linearen Gleichungen* modellieren und lösen.
- Die ersten drei Richtlinien lassen sich als ein lineares *Ungleichungssystem* in x und y formulieren. Abschnitt 2.6 zeigt: Die Lösungsmenge dieses Systems ist ein Polygon in der xy-Ebene.
- Die vierte Richtlinie ist keine Ungleichung, sondern eine *Minimalbedingung:* Ein Wert soll so klein wie möglich werden. Andere Fragestellungen enthalten *Maximalbedingungen*. Typischerweise sollen Kosten minimal und Gewinne maximal werden.

[1] Vergleiche Band 5, wo Mischungsaufgaben passenderweise im Abschnitt *Vermischte Aufgaben* von Kapitel 3 behandelt werden.

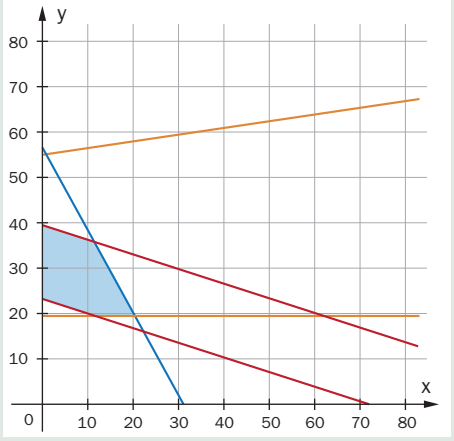
Die lineare Optimierung ist ein mathematisches Verfahren, das lineare Systeme mehrerer Ungleichungen und einer Minimal- oder Maximalbedingung löst.

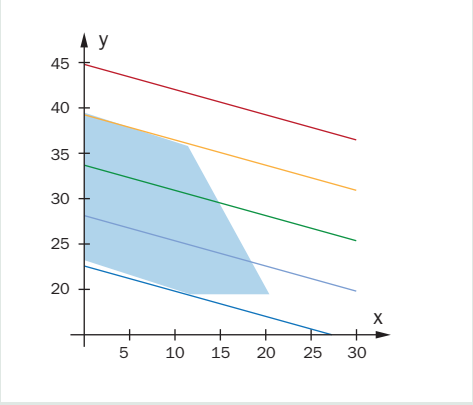
Der sowjetische Mathematiker *Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch* arbeitete 1939 als erster an linearer Optimierung. Unter anderem dafür bekam er 1975 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. 1940–1950 erkannte zuerst das US-Militär, dann die Ölindustrie das Potential der linearen Optimierung. Heutige Einsatzgebiete sind Mischungsprobleme (wie unser Beispiel, bloß nicht mit zwei sondern zehntausenden Unbekannten); Produktionsplanung (so produzieren, dass bei beschränkten Ressourcen maximaler Profit erzielt wird); Telekommunikationsnetze (maximaler Datendurchsatz durch ein Leitungsnetz mit beschränkter Kapazität) etc.

▶ **1** Erstellt zum Toast-Rezept lineare Gleichungen für die Kalorien, die Eiweiß, Kohlehydrate und Fette einzeln liefern. Ihr braucht dazu folgende Nährwertangaben:

1 g Nahrungsmittel enthält kcal Nährwert aus				
	Eiweiß	Kohle-hydrate	Fett	Gesamt
Toastbrot	0,3	2,1	0,1	2,5
Schinken	0,8	0,0	0,2	1,0
Käse	1,0	0,0	2,1	3,1

▶ **2** Verwendet die Resultate der Aufgabe 1 und formuliert Tim und Sarahs Richtlinien als Ungleichungen. Stellt die Lösungsmenge grafisch dar.
Die Abbildung zeigt die Lösungsmenge des Ungleichungssystems.
Die beiden roten Geraden sind die Grenzen der Kohlehydrat-Bedingung. Alle Punkte im Streifen zwischen den roten Geraden entsprechen Rezepten mit 50 – 60 % Kohlehydrat-Anteil. Zwischen den braunen Geraden liegt der Fettanteil bei 20 – 35 %.
Im gesamten Bereich zwischen den Achsen und der blauen Gerade ist Eiweiß im Bereich 10 – 22 %. Die Schnittmenge der drei Bereiche ist hervorgehoben.





▶ **3** Der Gehalt an gesättigten Fettsäuren pro g beträgt für Toastbrot 13 mg, für Schinken 50 mg und für Käse 180 mg.
Gebt den Gehalt im Toastrezept als lineare Gleichung in x und y an. Zeichnet die Geraden, die einem Gehalt von 5 g, 6 g und 7 g Fettsäuren pro Portion Schinken-Käse-Toast entsprechen.
Die Abbildung zeigt den zulässigen Lösungsbereich sowie Gerade, die dem unterschiedlichen Gehalt an gesättigten Fettsäuren entsprechen (beginnend mit Blau: 5 g, 6 g, 7 g, 8 g, 9 g …).

Interpretation: Der Gehalt an gesättigter Fettsäure steigt nach oben hin an. Der Eckpunkt (11,7 | 19,5) Mitte unten im Lösungsbereich entspricht der $(x|y)$-Kombination mit geringstem Gehalt an ungesättigten Fettsäuren.
Unser Schinken-Käse-Toast-Beispiel ist, verglichen mit Aufgaben aus dem „wirklichen Leben", ein sehr einfaches Optimierungsproblem – und trotzdem für händisches Durchrechnen schon mühsam genug. Es zeigt aber die wesentlichen Schritte der linearen Optimierung.

Lineare Optimierung enthält zwei Schritte:

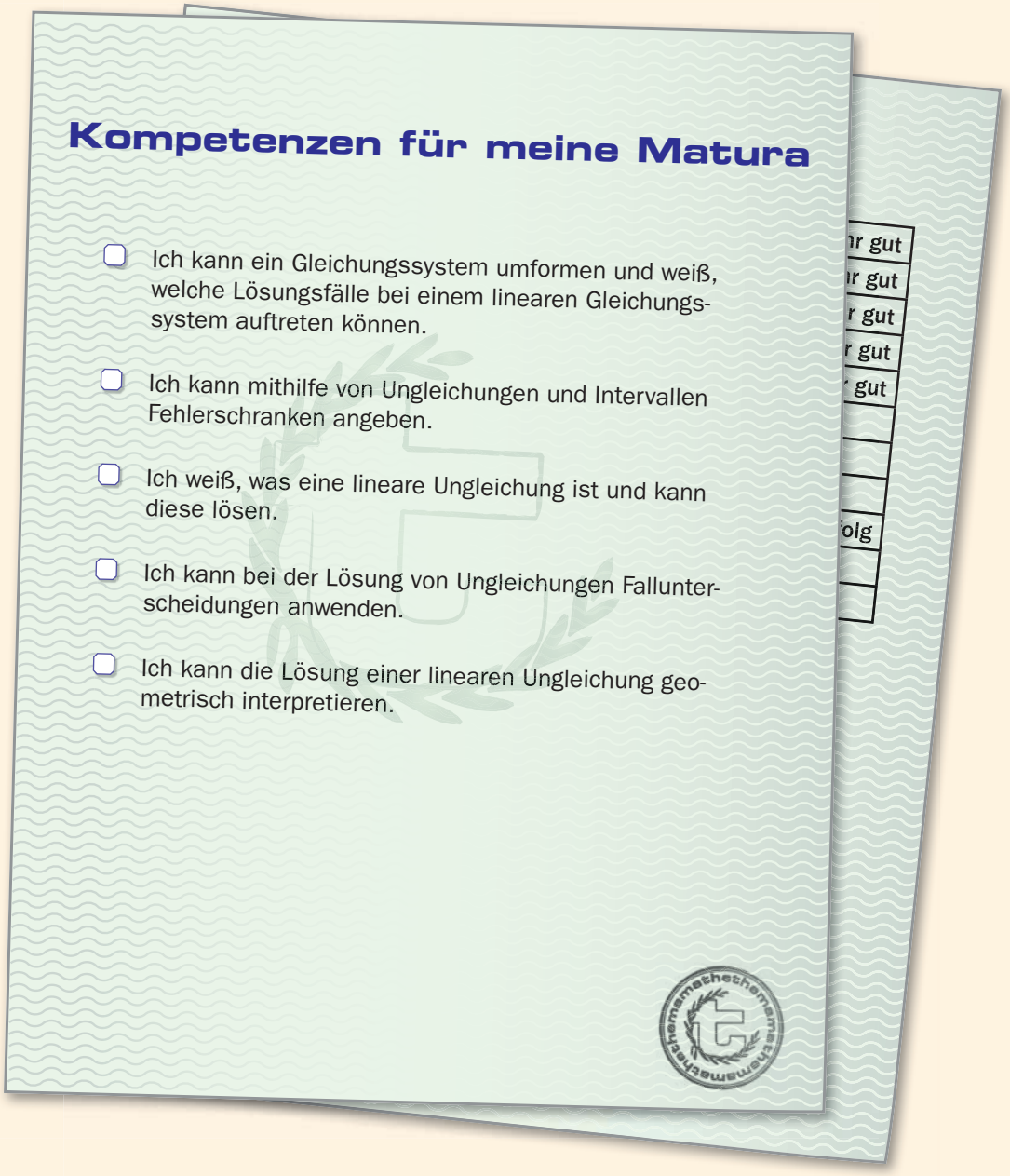
1. Festlegen des zulässigen Lösungsbereiches. Für zwei Unbekannte ist das ein Polygon, bei drei Unbekannten ein Polyeder im Raum. Bei noch mehr Unbekannten ist es ein mathematisches Gebilde (ein Simplex) mit sehr vielen „Flächen", „Kanten" und „Ecken".
2. Ein fundamentaler Satz sagt: Die optimale Lösung befindet sich an einer Ecke. Für das Finden der richtigen Ecke gibt es spezielle Verfahren, wie z. B. das Simplex-Verfahren.

Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at

Meine Kapitelcheckliste zu Gleichungen und Ungleichungen

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
(d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	*(d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)*	*z.B. Aufgaben*
thema Lineare Gleichungssysteme in drei Unbekannten		
☐ … was ein lineares Gleichungssystem und seine Lösung ist.	☐ … ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten mit dem Eliminationsverfahren lösen.	… 150
☐ … wie beim Eliminationsverfahren vorzugehen ist.	☐ … ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten mit dem Substitutionsverfahren lösen.	… 154
☐ … wie beim Substitutionsverfahren vorzugehen ist.	☐ … für ein gegebenes Gleichungssystem ein günstiges Lösungsverfahren auswählen.	… 159
☐ … welche Lösungsfälle es bei linearen Gleichungssystemen in drei Unbekannten geben kann.	☐ … entscheiden, ob und wenn ja welcher Sonderfall vorliegt.	… 164
thema Ungleichungen, Schranken, Genauigkeit		
☐ … was eine Ungleichung ist.	☐ … Schranken für Näherungswerte angeben.	… 172
☐ … was obere und untere Schranken sind.	☐ … Fehlerschranken mit Ungleichungen oder in Intervallschreibweise angeben.	… 168
☐ … was eine Ungleichungskette ist.		
☐ … die Intervallschreibweise.		
☐ … welche Bedeutung signifikante Stellen bei der Angabe einer Größe haben.		
thema Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen		
☐ … was die Grundmenge, die Definitionsmenge und die Lösungsmenge einer Ungleichung ist.	☐ … die Lösung einer Ungleichung grafisch darstellen.	… 175
☐ … was äquivalente Ungleichungen sind.	☐ … Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen durchführen und dadurch die Ungleichung lösen.	… 176 … 179
☐ … wie Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen angewendet werden.	☐ … ein Ungleichungssystem lösen.	
☐ … was ein Ungleichungssystem ist.		
thema Ungleichungen mit Fallunterscheidungen		
☐ … was eine quadratische Ungleichung ist.	☐ … eine quadratische Ungleichung lösen.	… 185
☐ … was eine Bruchungleichung ist.	☐ … eine Bruchungleichung lösen.	… 188
☐ … was eine Betragsungleichung ist.	☐ … eine Betragsungleichung lösen.	… 193
☐ … wann eine Fallunterscheidung vorzunehmen ist.	☐ … entscheiden, ob eine Fallunterscheidung notwendig ist, und diese durchführen.	… 190
	☐ … eine Ungleichung grafisch lösen.	… 198

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
thema Näherungsverfahren für Gleichungen		
☐ … dass ein Näherungsverfahren schrittweise genauere Lösungen liefert. ☐ … dass nicht jede Gleichung exakt lösbar ist.	☐ … ein Näherungsverfahren (Bisektionsverfahren oder Regula Falsi) ausführen.	… 208, 209



Teste dein Wissen!

Kreuze die richtigen Antworten an!

240 Wie viele Lösungen kann ein System dreier linearer Gleichungen in drei Unbekannten haben?

- ☐ keine
- ☐ genau 1
- ☐ genau 2
- ☐ genau 3
- ☐ mehr als 3
- ☐ unendlich viele

241 Welche Zeichen sind Relationszeichen (R), welche sind Operatoren (O)?

	$+$	$<$	$=$	π	$\neq$	$($	$\approx$	$\geqslant$
(R)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(O)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

242 Jeweils zwei Angaben entsprechen einander. Ordne richtig zu!

1) $x \in [-1; 3]$	**a)** $x \in [1; 3]$
2) $-1 < x < 1$	**b)** $3{,}05 \leqslant x < 3{,}15$
3) $x = 2 \pm 1$	**c)** $x \in]-\infty; 0[$
4) $x \approx 3{,}1$	**d)** $x = 1 \pm 2$
5) $x \geqslant 1$	**e)** $x \in]-1; 1[$
6) $x < 0$	**f)** $x \in [1; \infty[$

1) ↦ ☐ **2)** ↦ ☐ **3)** ↦ ☐

4) ↦ ☐ **5)** ↦ ☐ **6)** ↦ ☐

243 Welche Werte für x ergeben wahre Aussagen?

	$x = 0$	$x = 3$	$x = 5$
$(x < 1) \wedge (x > 4)$	☐	☐	☐
$(x < 1) \vee (x > 4)$	☐	☐	☐
$x \in [-1; 4] \cup [3; 5[$	☐	☐	☐
$x \in [-1; 4] \cap [3; 5[$	☐	☐	☐

244 Gib jene (x, y) an, die die Ungleichung $x + 2y \geqslant 2$ lösen:

- ☐ (0, 0) ☐ (1, 0) ☐ (2, 0) ☐ (3, 0)
- ☐ (0, 1) ☐ (1, 1) ☐ (2, 1) ☐ (3, 1)
- ☐ (0, 2) ☐ (1, 2) ☐ (2, 2) ☐ (3, 2)
- ☐ (0, 3) ☐ (1, 3) ☐ (2, 3) ☐ (3, 3)

245 Gib jene (x, y) an, die das System lösen:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &> 4 \\ x + y &\leqslant 3 \end{aligned}$$

- ☐ (0, 0) ☐ (1, 0) ☐ (2, 0) ☐ (3, 0)
- ☐ (0, 1) ☐ (1, 1) ☐ (2, 1) ☐ (3, 1)
- ☐ (0, 2) ☐ (1, 2) ☐ (2, 2) ☐ (3, 2)
- ☐ (0, 3) ☐ (1, 3) ☐ (2, 3) ☐ (3, 3)

246 Gib jene (x, y) an, die das System lösen:

$$\begin{aligned} x + y &> 0 \\ x + 2y &< 10 \\ 2x - y &> 0 \end{aligned}$$

- ☐ (0, 0) ☐ (1, 0) ☐ (2, 0) ☐ (3, 0)
- ☐ (0, 1) ☐ (1, 1) ☐ (2, 1) ☐ (3, 1)
- ☐ (0, 2) ☐ (1, 2) ☐ (2, 2) ☐ (3, 2)
- ☐ (0, 3) ☐ (1, 3) ☐ (2, 3) ☐ (3, 3)

247 Welche Lösung hat das Gleichungssystem?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- ☐ (1, 1, 0) ☐ (1, 0, 1) ☐ (0, 1, 1)
- ☐ (1, 1, 1) ☐ keine ☐ unendlich viele

248 Welche Gleichungssysteme haben unendlich viele Lösungen?

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 3y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

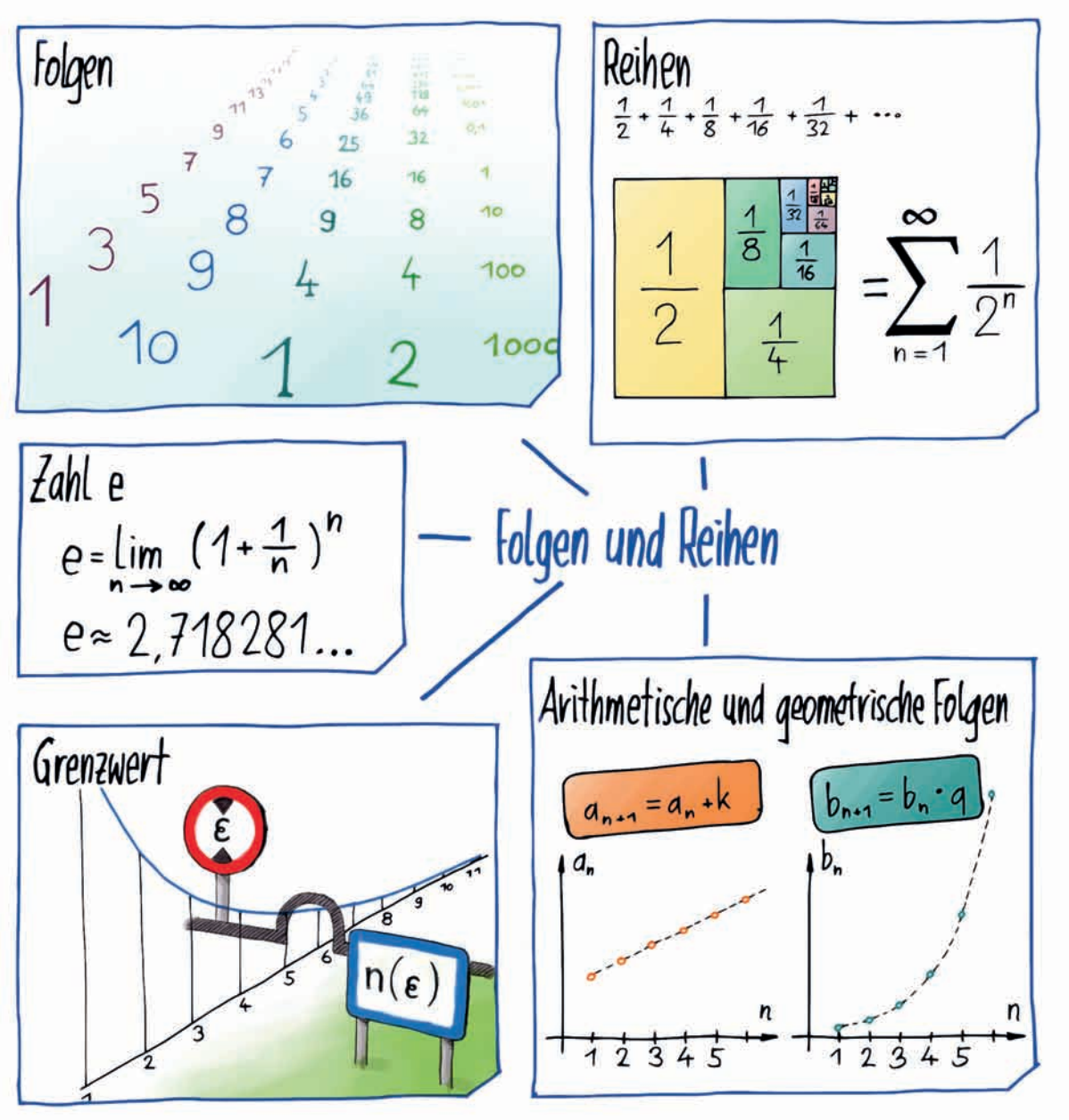
- ☐ a) und b) ☐ a) und c)
- ☐ b) und c) ☐ a) und b) und c)

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 6 Lösungen (SBNR 150.261)

3. Folgen und Reihen

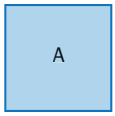
Unsere Geisteskraft ist überzeugt, *sich die unendliche Wiederholung eines und desselben Schrittes vorstellen zu können, wenn dieser Schritt einmal als möglich erkannt ist.* (Henri Poincaré)

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. (David Hilbert)



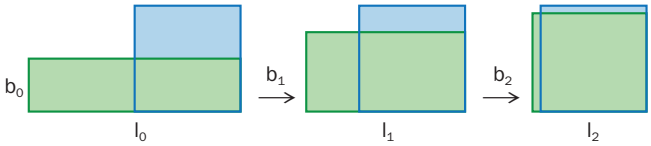
3.1 Iterationsprozesse E

Das Heron-Verfahren (1. Jh. n. Chr.)



Wir kennen die Fläche A eines Quadrats und wollen die Seitenlänge bestimmen. Das bedeutet, wir wollen $\sqrt{A}$ berechnen.

Idee: Wir beginnen mit einem Rechteck der Fläche A und machen es schrittweise dem Quadrat ähnlicher.



Wir wählen dazu für das erste Rechteck eine beliebige Seitenlänge l_0. Die zugehörige Breite ergibt sich zu $b_0 = \frac{A}{l_0}$. Wir bilden das arithmetische Mittel aus Länge und Breite und nehmen es als Seitenlänge des nächsten Rechtecks: $l_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(l_0 + \frac{A}{l_0}\right)$. Wieder errechnen wir die zugehörige Breite $b_1 = \frac{A}{l_1}$, mitteln l_1 und b_1, erhalten eine neue Seitenlänge l_2 …

249 Führe das Heron-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{3}$ aus.

a) Beginne mit dem Startwert $l_0 = 3$ und berechne l_1, l_2, l_3.

b) Gib das allgemeine Bildungsgesetz für den Rechenschritt $l_n \to l_{n+1}$ an.

c) Zeichne ein Iterationsdiagramm für den Näherungsprozess.

Ausführung:

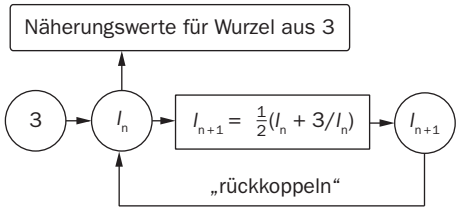
Wir suchen die Seitenlänge eines Quadrates mit $A = 3$.

a) Länge l_n und Breite b_n flächengleicher Rechtecke sind

l_n	$b_n = 3 : l_n$	Probe $A = l_n \cdot b_n$
$l_0 = 3$	$b_0 = 3 : 3 = 1$	$l_0 \cdot b_0 = 3 \cdot 1 = 3$
$l_1 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 1) = 2$	$b_1 = 3 : 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$l_1 \cdot b_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$
$l_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1{,}75$	$b_2 = 3 : \frac{7}{4} = \frac{12}{7} = 1{,}714285 \ldots$	$l_2 \cdot b_2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{7} = 3$
$l_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) = \frac{97}{56} = 1{,}732142 \ldots$	$b_3 = 3 : \frac{97}{56} = \frac{168}{97} = 1{,}731958 \ldots$	$l_3 \cdot b_3 = \frac{97}{56} \cdot \frac{168}{97} = 3$

b) Das Bildungsgesetz für den nächsten Nährungswert lautet: $l_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(l_n + \frac{3}{l_n}\right)$

c) Das Iterationsdiagramm beschreibt den zyklischen Vorgang dieser näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{3}$. Das Ergebnis jedes Rechenschritts wird in der nächsten Berechnung verwendet.



Das Heron-Verfahren zeigt eine häufige Vorgangsweise bei mathematischen Problemstellungen:
Es wird *schrittweise* („iterativ“) ein immer besseres Ergebnis angestrebt (vergleiche Abschnitt 2.7). Dabei entsteht jeweils eine Folge von Zahlen.

Folgen sind ein wichtiges mathematisches Werkzeug mit vielen interessanten Eigenschaften. Eine der wichtigsten Eigenschaften hängt damit zusammen, dass Folgen kein Ende haben müssen. Iterative Verfahren können (zumindest theoretisch) *unendlich* lang laufen und legen dabei einen gesuchten Wert immer genauer fest.

Die Archimedes-Abschätzung des Kreisumfangs (3. Jh. v. Chr.)

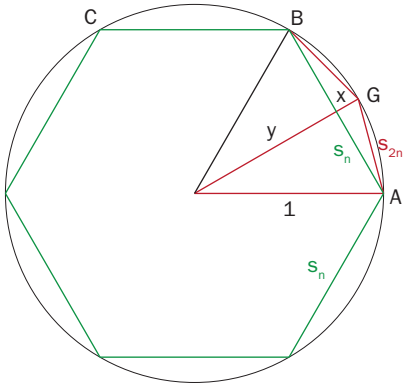
250 Gib eine iterative Rechenvorschrift zur näherungsweisen Berechnung des Einheitskreis-Umfangs an. Gehe vom regelmäßigen Sechseck aus!

Ausführung:

Die Sehnenlänge s_6 eines eingeschriebenen Sechsecks ist gleich dem Radius.

Die erste Näherung ist also: $u \approx 6 \cdot s_6 = \approx 6 \cdot 1 = 6$

Wir nähern uns dem Umfang nun immer genauer durch eingeschriebene Vielecke mit immer mehr Seiten.
Dazu überlegen wir uns eine Iterationsformel, die uns sagt, wie wir von der Sehnenlänge des n-Ecks gleich auf die des $2n$-Ecks kommen.



$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + x^2$ mit $x = 1 - y = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$

Setzen wir für x ein, ergibt sich: $s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$

Sorgfältiges Ausrechnen und Umformen (s. Beispiel 254) liefert eine Formel für s_{2n}.

Ergebnis:

Die Rechenvorschrift für die Sehnen lautet: $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ mit $s_6 = 1$
Der entsprechende Umfang ist $u_n = n \cdot s_n$.

Aufgaben

251 Berechne mit dem Heron-Verfahren die ersten fünf Näherungswerte für

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{4}$

Starte jeweils mit $l_0 = 1$.

252 Berechne mit dem Heron-Verfahren die ersten fünf Näherungswerte für $\sqrt{10}$.

a) Führe das Verfahren mit zwei verschiedenen selbst gewählten Startwerten aus! (Was lässt sich über den Einfluss der Startwerte sagen?)

b) Schreibe auch die allgemeine Iterationsgleichung an!

c) Zeichne ein Iterationsdiagramm!

253 Die folgende Iterationsgleichung liefert Näherungswerte für $\sqrt[k]{a}$:

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{k} \cdot \left(k - 1 + \frac{a}{l_n^k}\right)$$

a) Überprüfe dies an $\sqrt[3]{2}$ mit $l_0 = 1$. Führe eine Probe durch!

b) Begründe, inwiefern das Heron-Verfahren ein Spezialfall dieses allgemeinen Verfahrens ist. Wie muss k gewählt werden?

254 **a)** Ergänze die fehlende Umformung bei der Herleitung von $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ für den (Einheits-)Kreisumfang in Beispiel 250.

b) Zeige, dass die Beziehung

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

zur Iterationsformel aus a) gleichwertig ist.

c) Berechne mittels der Iterationsformeln aus a) und b) den Kreisumfang näherungsweise (mindestens 5 Iterationsschritte). Welche der beiden Formeln ist praktisch besser verwendbar?

3.2 Reelle Zahlenfolgen

Definition: Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$ heißt eine *reelle Zahlenfolge*. Die einzelnen Zahlen werden als *Glieder* der Folge bezeichnet.

Wir können Folgen unter Verwendung des allgemeinen Glieds a_n kürzer auch so anschreiben: $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle = \langle a_n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle = \langle a_n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Die tiefgestellte Zahl gibt die Nummer des Folgengliedes an und wird als Index bezeichnet. Ob wir dabei mit 0 oder mit 1 beginnen wollen, hängt vom Problem ab oder ist oft auch Geschmackssache.

Bemerkung: Etwas abstrakter definiert ist eine unendliche Folge eine Funktion $f(n)$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{N}$ (oder $D_f = \mathbb{N}^*$). Im Unterschied zu Mengen ist bei Folgen die Reihenfolge wesentlich, und derselbe Wert darf mehrfach an verschiedenen Stellen vorkommen.

Explizite Darstellung: Das n-te Glied der Folge ist durch einen Term von n gegeben: $a_n = T(n)$

255 Berechne die Glieder der Folgen mit $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

Ausführung: $a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$; $a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$; $a_4 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$b_1 = \frac{(-1)^2}{1} = 1$; $b_2 = \frac{(-1)^3}{2} = -\frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{(-1)^4}{3} = \frac{1}{3}$; $b_4 = \frac{(-1)^5}{4} = -\frac{1}{4}$

Rekursive Darstellung: Der Anfangswert der Folge ist gegeben;
das n-te Glied ist durch einen Term vom vorigen Folgenglied gegeben: $a_n = T(a_{n-1})$

G

Grundvorstellung:

Explizite Darstellung: $n \longrightarrow \boxed{T(n)} \longrightarrow a_n$

rekursive Darstellung: $a_{n-1} \longrightarrow \boxed{T(a_{n-1})} \longrightarrow a_n$

256 Gegeben ist $d_1 = 2$, $d_n = \frac{d_{n-1}}{2} - \frac{1}{d_{n-1}}$ für $n > 1$. Berechne drei weitere Glieder der Folge!

Ausführung: $d_2 = \frac{d_1}{2} + \frac{1}{d_1} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $d_3 = \frac{d_2}{2} + \frac{1}{d_2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$ $d_4 = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408}$

Oft ergeben sich rekursive Darstellungen bei Anwendungsaufgaben, wo nur beschrieben werden muss, wie man von einem Zustand zum nächsten kommt (vergleiche Abschnitt 3.1). Auch mehrere frühere Glieder dürfen vorkommen – dann müssen entsprechend mehr Anfangswerte gegeben sein.

257 Berechne vier weitere Glieder der Folge $f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$.

Ausführung: $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$; $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$; $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$

Konstruktive Darstellung: Für manche Folgen gibt es keine einfache Termdarstellung (oder wir kennen sie nicht), aber eine Konstruktionsvorschrift.

Beispiele: z_n = Augenzahl des n-ten Würfelversuchs; t_n = Durchschnittstemperatur des Tages n.

Aufgaben

258 Berechne die ersten fünf Glieder der explizit gegebenen Folge ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) $a_n = \frac{1}{n}$ **b)** $a_n = 1 + (-1)^n$

c) $a_n = 3^n$ **d)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot n^n$ **f)** $a_n = \sqrt[n]{n}$

259 Berechne die ersten fünf Glieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$

b) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 3$

c) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n \cdot (1 - a_n)$

d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}$

260 Gib die ersten zehn Glieder der konstruktiv gegebenen Folge an.

a) a_n = Anzahl der Teiler von n

b) a_n = Zahl (0) oder Kopf (1) beim n-ten Münzwurf

c) a_n = n-te Nachkommastelle der Zahl π

d) a_n = n-te Primzahl

261 Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ und stelle sie auf der Zahlengeraden dar. Wähle die Skalierung geeignet!

a) $a_n = \frac{1}{n}$ **b)** $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ **c)** $a_n = 2^n$

262 Es sind die ersten drei Glieder einer Folge gegeben. Finde eine möglichst einfache explizite Darstellung, die zu dieser Folge gehören könnte.

a) $\langle 1, 4, 9, \ldots \rangle$ **b)** $\langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots \rangle$

263 Stelle eine Vermutung für die explizite Darstellung des n-ten Folgengliedes auf!

a) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + 2$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5 \cdot a_n$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1$

264 Stelle eine Vermutung für die rekursive Darstellung des n-ten Folgengliedes auf und überprüfe diese durch Berechnung der ersten fünf Folgenglieder!

a) $a_n = 0{,}2\,n$ **b)** $a_n = n^2 + n - 2$

c) $a_n = (n-1)^2 + 3$ **d)** $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$

265 Gib für die Folge jeweils eine explizite Darstellung und wenn möglich auch eine rekursive Darstellung an!

a) $\langle 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$

b) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \rangle$

c) $\langle -2, -10, -18, -26, \ldots \rangle$

d) $\langle 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots \rangle$

266 Die ersten drei Glieder einer Folge sind durch $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ gegeben.

a) Gib eine möglichst einfache explizite Darstellung der Folge an!

b) Zeige, dass auch die Folge $a_n = 6 - 10\,n + 6\,n^2 - n^3$ diesen Folgenbeginn besitzt. Was lässt sich daraus schließen?

267 Überprüfe, ob Elemente der Menge {29, 245, 253, 509, 731} Glieder der angegebenen Folgen $\langle a_n \rangle$ sind. Wenn ja, gib an, an welcher Stelle der Folge sie auftreten!

a) $a_n = 2^n - 3$

b) $a_n = 3^n + 2$

268 Ein Getränk hat – frisch aus dem Kühlschrank – eine Temperatur von 6 °C. Die Temperatur nach n Minuten beträgt:

$$T_n = 20 - 14 \cdot 0{,}8^n$$

Ermittle die ersten 20 Folgenglieder. Nach wie vielen Minuten hat das Getränk mehr als 18 °C? Interpretiere die Ergebnisse! Was kannst du über die Raumtemperatur vermuten?

269 Ein Braten hat – frisch aus dem Backrohr – im Kern eine Temperatur von 84 °C. Während er in der Küche noch etwas rastet, beträgt seine Kern-Temperatur nach n Minuten:

$$T_n = \frac{22\,n^2 + 21\,000}{n^2 + 250}$$

Ermittle die ersten 20 Folgenglieder. Interpretiere die Ergebnisse! Nach wie vielen Minuten ist der Braten im Zentrum kälter als 50 °C?

270 Wie kann ein Computeralgebrasystem

a) explizit gegebene Folgen,

b) rekursiv gegebene Folgen darstellen?

Erstellt dazu ein Kurzreferat, das die verschiedenen Möglichkeiten auch an konkreten Beispielen demonstriert.

3.3 Eigenschaften von Folgen

Bei Folgen ist oft interessant: Wachsen die Folgenglieder immer weiter an oder kommt das Wachstum zum Stillstand? Gibt es eine Grenze, die nicht überschritten werden kann?

Monotonie von Folgen

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist

streng monoton wachsend,	wenn $a_n < a_{n+1}$	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
monoton wachsend,	wenn $a_n \leqslant a_{n+1}$	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
konstant,	wenn $a_n = a_{n+1}$	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
monoton fallend,	wenn $a_n \geqslant a_{n+1}$	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
streng monoton fallend,	wenn $a_n > a_{n+1}$	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Eine Folge, bei der das Vorzeichen stets wechselt, heißt *alternierend*.

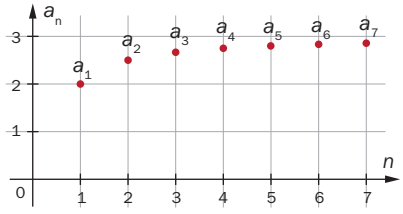
Grafische Veranschaulichungen von Folgen:

Das Monotonieverhalten von Folgen lässt sich leicht in der grafischen Darstellung erkennen. Dazu fassen wir die Folge als Funktion mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}^*$ auf und zeichnen ihren Graphen. Diese Darstellung heißt $(n - a_n)$-Diagramm.

271 **a)** Stelle die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ $(n > 0)$ als $(n - a_n)$-Diagramm dar.

b) Was vermutest du über das Monotonieverhalten der Folge?

Ausführung: **a)**



b) Die Folge zeigt im dargestellten Bereich streng monotones Wachstum.

Eine grafische Darstellung ist natürlich kein strenger Beweis, aber schon ein sehr starkes Indiz!

272 Beweise deine Vermutung über die Monotonie bei der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 3 - \frac{1}{n}$.

Ausführung: $\langle a_n \rangle = \left\langle 2;\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{11}{4};\ \ldots \right\rangle = \langle 2;\ 2{,}5;\ 2{,}\dot{6};\ 2{,}75;\ \ldots \rangle$

Schon aus diesen Werten, besser noch aus einer grafischen Darstellung wie in Beispiel 271 vermutet man: Diese Folge ist streng monoton wachsend, d.h. es gilt $a_n < a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

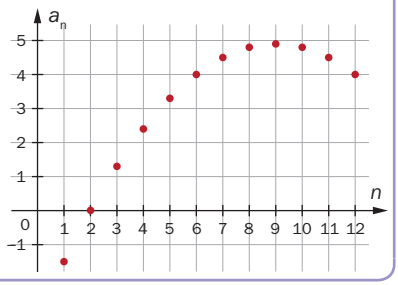
Beweis: $3 - \frac{1}{n} < 3 - \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 > n$

Die letzte Aussage in der Äquivalenzkette ist sicher für alle $n \in \mathbb{N}^*$ zutreffend. $\Rightarrow$ w. A.!

273 Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{10}(n - 2)(16 - n)$ nicht monoton ist!

Ausführung: $\langle a_n \rangle = \langle -1{,}5;\ 0;\ 1{,}3;\ 2{,}4;\ 3{,}3;\ \ldots \rangle$

Die Folge beginnt monoton wachsend. Doch es genügt, ein Glied zu finden, das wieder kleiner wird. Im $(n - a_n)$-Diagramm erkennst du: Ab $n = 10$ werden die Werte wieder kleiner.



Ergebnis: Wegen $a_8 = 4{,}8 < a_9 = 4{,}9$ und $a_9 = 4{,}9 > a_{10} = 4{,}8$ ist die Folge nicht monoton.

Aufgaben

274 Zeichne ein $(n - a_n)$-Diagramm und beweise, dass die Folge streng monoton wächst:

a) $a_n = \frac{3n - 1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{5n + 1}{3n + 2}$

c) $a_n = \frac{-1 + 2n}{1 + n}$ **d)** $a_n = \frac{3n^2}{1 + 2n}$

275 Zeichne ein $(n - a_n)$-Diagramm und beweise, dass die Folge streng monoton fällt:

a) $a_n = \frac{-3n + 1}{2n}$ **b)** $a_n = -\frac{7n + 1}{3n + 2}$

c) $a_n = \frac{1 - 2n}{1 + n}$ **d)** $a_n = \frac{1}{1 + 2n^2}$

276 Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, stelle $\langle a_n \rangle$ grafisch dar und beweise ihr Monotonieverhalten!

a) $a_n = \frac{6n - 1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2n + 1}$ **c)** $a_n = \frac{n}{3n + 2}$

277 Wie 276, berechne jedoch die ersten sieben Glieder der Folge.

a) $a_n = \frac{4n - 3}{n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{n + 4}$ **c)** $a_n = \frac{4n^2}{n + 2}$

278 Ist die Folge (streng) monoton wachsend, (streng) monoton fallend oder keines von beiden? Begründe deine Entscheidung!

a) $a_n = \frac{1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$

c) $a_n = -\frac{1}{2n}$ **d)** $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

279 Wie 278:

a) $a_n = \frac{3n - 1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{5n + 1}{3n - 2}$

c) $a_n = \frac{1 + 2n}{2n}$ **d)** $a_n = \frac{3n}{1 - 2n}$

280 Die Folge ist erst ab einem bestimmten Index streng monoton wachsend. Finde mithilfe des $(n - a_n)$-Diagrammes den Index.

a) $a_n = (n - 5)^2$ **b)** $a_n = (n - 2)(n - 4)$

c) $a_n = n(n - 5)(n - 10)$ **d)** $a_n = \frac{1}{25 - 2n}$

281 Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n > 0$ nicht monoton ist:

a) $a_n = \sqrt{n^2 - 44n + 500}$

b) $a_n = n^2 \cdot 0{,}9^n$

c) $a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{2}{n + 2}$

d) $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$

282 Beweise, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{1 + (n - 10)^2}$ bis zum Index 10 streng monoton wachsend ist, ab dem Index 10 aber streng monoton fallend.

283 Beweise, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{(n - 5)^2 - 5}$ nicht monoton ist.

284 Findet je zwei Beispiele für

a) streng monoton wachsende,

b) streng monoton fallende,

c) alternierende Folgen!

285 Ab welchem Folgenglied ist die Folge $a_n = \frac{2n - 100}{3n - 10}$ monoton wachsend? Begründe deine Behauptung!

286 Bildet die Folge der Differenzen der Folgenglieder $(a_{n+1} - a_n)$. Was lässt sich daraus über das Monotonieverhalten der jeweiligen Folge schließen?

a) $a_n = n^2 - 6n$ **b)** $a_n = \frac{2n}{3n + 1}$

287 Bildet die Folge der Quotienten der Folgenglieder $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Was lässt sich daraus über das Monotonieverhalten der jeweiligen Folge schließen?

a) $a_n = n^2 - 6n$ **b)** $a_n = \frac{2n}{3n + 1}$

288 Gegeben ist die Folge:

$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = k \cdot a_n(1 - a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Untersucht das Verhalten der Folge für verschiedene Werte von k im Bereich $0 < k < 5$. Lasst den Computer viele Folgenglieder berechnen und grafisch darstellen.

Könnt ihr Bereiche von k finden, in denen die Folge immer monoton wächst oder fällt? Gibt es Bereiche, wo sich die Folge völlig regellos (chaotisch) verhält?

289 Die Folge aus Aufgabe 288 ist ein Beispiel dafür, wie aus einfachen Bildungsgesetzen komplexes, chaotisches Verhalten entstehen kann. Recherchiert im Internet zum Stichwort „Logistische Gleichung“. Wie hängt das Bildungsgesetz aus Aufgabe 288 mit dieser Gleichung zusammen? Was beschreibt sie, wer hat sie erforscht und welche besonderen Eigenschaften hat sie? Erstellt eine Präsentation.

Beschränktheit von Folgen

Definition:
Eine reelle Zahl S_o heißt *obere Schranke der Folge* $\langle a_n \rangle$, wenn $a_n \leqslant S_o \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Eine reelle Zahl S_u heißt *untere Schranke der Folge* $\langle a_n \rangle$, wenn $S_u \leqslant a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Die Folge heißt nach *oben* (*unten*) *beschränkt*, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.
Sie heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

290 Formuliere eine Vermutung, ob die Folge $\langle a_n \rangle = 3 - \frac{1}{n}$ beschränkt ist oder nicht. Beweise diese!

Ausführung: $\langle a_n \rangle = \left\langle 2;\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{11}{4};\ \ldots \right\rangle = \langle 2;\ 2{,}5;\ 2{,}\dot{6};\ 2{,}75;\ \ldots \rangle$

Vermutung: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist beschränkt, da für alle Indizes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $2 \leqslant a_n < 3$

Beweis: Du kannst verbal oder formal argumentieren.

Untere Schranke $S_u = 2$

Verbale Formulierung:
Aus dem Bildungsgesetz erkennst du: Ist $n = 1$ so wird 1 von 3 abgezogen, sonst (wenn $n > 1$) stets weniger als eins. Also müssen alle Folgenglieder $\geqslant 2$ sein.

Formale Schreibweise:

$$2 \leqslant 3 - \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 2n \leqslant 3n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant n \qquad \text{w. A.}$$

Obere Schranke $S_o = 2$

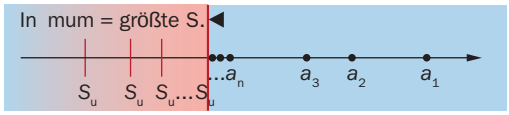
Wieder siehst du aus dem Bildungsgesetz: Es wird von 3 stets etwas Positives abgezogen, d. h. sämtliche Folgenglieder müssen kleiner als 3 sein, 3 ist somit eine obere Schranke.

$$3 - \frac{1}{n} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3n - 1 < 3n \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 0 \qquad \text{w. A.}$$

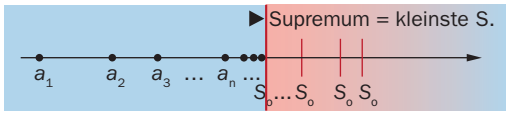
Bemerkungen:

(1) Eine beschränkte Folge besitzt unendlich viele obere bzw. untere Schranken. Mit jeder oberen Schranke ist auch jede größere Zahl ebenso eine obere Schranke. Mit jeder unteren Schranke ist auch jede kleinere Zahl ebenso eine untere Schranke.

(2) Von allen unteren Schranken gibt es eine, die „am knappesten" an die Folge heranreicht. Diese ist die *größte* untere Schranke.



(3) Von allen oberen Schranken gibt es eine, die „am knappesten" die Folge nach oben abschließt. Diese ist die *kleinste* obere Schranke.



Definition: Die größte untere Schranke wird als *Infimum*, die kleinste obere Schranke als *Supremum* bezeichnet. Infimum und Supremum können selbst Glieder der Folge sein, sie müssen es aber nicht sein.

Beim obigen Beispiel sind 2 und 3 Infimum und Supremum. Das Infimum ist hier selber Folgenglied, das Supremum wird von keinem Folgenglied erreicht.

Aufgaben

291 Prüfe, ob die angegebenen Werte obere Schranken für die jeweiligen Folgen sind!

a) $2;\ \frac{5}{4};\ a_n = \frac{(6n-2)}{4n+1}$

b) $\frac{3}{2};\ \frac{5}{4};\ a_n = \frac{(-1)^n \cdot 3n}{2n+1}$

292 Prüfe, ob die angegebenen Werte untere Schranken für die jeweiligen Folgen sind!

a) $1;\ \frac{3}{2};\ a_n = \frac{8n+1}{6n-3}$

b) $-1;\ -\frac{1}{2};\ a_n = (-1)^n \cdot \frac{5n+2}{10n+1}$

293 Ermittle obere und untere Schranken für die Folgen und beweise deine Aussagen ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $a_n = \frac{5n+1}{3n-2}$ **b)** $a_n = 5 - \frac{2}{n}$

c) $a_n = \frac{2}{n^3}$ **d)** $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$

294 Stelle die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ grafisch dar, finde dadurch mögliche untere und obere Schranken. Beweise deine Vermutungen.

a) $a_n = \frac{4n-3}{n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{n+4}$ **c)** $a_n = \frac{4n^2}{n+2}$

295 Die Folgen sind (streng) monoton wachsend. Ermittle jeweils eine obere Schranke! Kannst Du auch die kleinste obere Schranke finden?

a) $a_n = \frac{3n-1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{5n+1}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{-1+2n}{1+n}$ **d)** $a_n = \frac{3n^2}{1+n^2}$

296 Die Folgen sind (streng) monoton fallend. Ermittle jeweils eine untere Schranke! Kannst Du auch die größte untere Schranke finden?

a) $a_n = \frac{-3n+1}{2n}$ **b)** $a_n = -\frac{7n+1}{3n+1}$

c) $a_n = \frac{1-2n}{1+n}$ **d)** $a_n = \frac{1}{1+2n^2}$

297 Ist die Folge $\langle a_n \rangle$ nach oben oder/und nach unten beschränkt? Wenn ja, gib die jeweils kleinste obere bzw. größte untere Schranke an!

a) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$

b) $\left\langle -\frac{3}{4}, -\frac{8}{9}, -\frac{15}{16}, -\frac{24}{25}, \ldots \right\rangle$

298 Findet je zwei Beispiele für

a) nach oben beschränkte,

b) nach unten beschränkte,

c) unbeschränkte Folgen!

299 Berechnet einige Folgenglieder, untersucht die Monotonie und findet etwaige Schranken!

a) $a_n = \frac{6n-1}{2n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2n+1}$

c) $a_n = \frac{n}{3n+2}$ **d)** $a_n = \frac{n+2}{4n-1}$

300 Gebt Folgen an, für die

a) 2 eine obere, 1 keine obere Schranke ist.

b) 10 obere Schranke, aber 5 kein Folgenglied ist.

c) –3 Infimum und 3 Supremum ist.

d) 5 Supremum ist, unendlich viele Folgenglieder gleich 5 und unendlich viele Folgenglieder ungleich 5 sind.

301 Begründet, warum die Folgen nach unten und oben beschränkt sind. Gebt jeweils ihre größte untere (Infimum) und ihre kleinste obere Schranke (Supremum) an!

a) $a_n = (-1)^n + 1$ **b)** $a_n = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^n$

302 Begründe die folgende Behauptung:

Das erste Folgenglied einer streng monoton fallenden Folge ist die kleinste obere Schranke dieser Folge.

303 Begründe die folgende Behauptung:

Das erste Folgenglied einer streng monoton wachsenden Folge ist die größte untere Schranke dieser Folge.

304 **a)** Beweise: Wenn a_n und b_n die Glieder zweier nach oben beschränkter Folgen sind, dann ist auch die Folge $a_n + b_n$ nach oben beschränkt.

b) Gilt auch diese Behauptung? Wenn a_n und b_n die Glieder zweier nach oben beschränkter Folgen sind, dann ist auch die Folge $a_n - b_n$ nach oben beschränkt.

305 Gegeben ist die Folge:

$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = k \cdot a_n(1 - a_n) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$

Untersucht das Verhalten der Folge für verschiedene Werte von k im Bereich $3 < k < 5$. Lasst den Computer Folgenglieder berechnen und grafisch darstellen.

Für welche Bereiche von k ist die Folge beschränkt? Ab welchem Wert gibt es keine obere Schranke? Vergleicht mit Aufgabe 288!

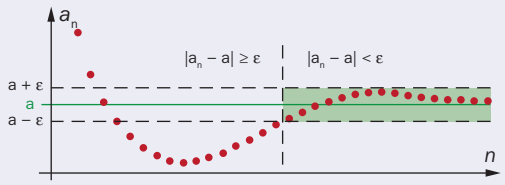
3.4 Grenzwerte

G

Grundvorstellung:

Ab dem n-ten Folgenglied bleibt die Folge im grünen Bereich $a \pm \varepsilon$.

Für jeden Bereich – wie schmal er auch sein mag – gibt es ein entsprechendes n.



Definition: Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a der *Grenzwert* der Folge $\langle a_n \rangle$.

Wir schreiben dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.“)

Besitzt eine Folge einen *Grenzwert*, so heißt sie *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Das (beliebig kleine) Intervall $]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ nennen wir ε-Umgebung. Um nachzuweisen, dass eine Folge $\langle a_n \rangle$ den Grenzwert a besitzt, gehe in zwei Schritten vor:

1. Wähle dir allgemein einen Abstand $\varepsilon > 0$.
2. Berechne jenes n, ab dem immer $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Du findest eine Ungleichung, die für beliebig kleines ε ein entsprechendes n liefert. Damit ist der Nachweis gelungen.

306 Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$ ist.

Ausführung: **1.** Sei $\varepsilon > 0$ ein beliebiger Abstand zum Grenzwert 3.

2. Wir berechnen den Index n, ab dem alle Folgenglieder einen kleineren Abstand als ε zu 3 haben:

$$|a_n - 3| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \left|3 - \tfrac{1}{n} - 3\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{\varepsilon} < n \text{ d.h. } \forall\, n > \tfrac{1}{\varepsilon} \text{ gilt } |a_n - 3| < \varepsilon$$

Definition: Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

Beispiele für Nullfolgen $\langle a_n \rangle$ sind $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$. Siehe auch Aufgabe 312.

Zur einfacheren Berechnung von Grenzwerten lassen sich die folgenden Sätze heranziehen:

Grenzwertsätze: Sind die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \langle b_n \rangle = b$, so gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \pm b_n \rangle = a \pm b$ **(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \cdot b_n \rangle = a \cdot b$ **(3)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \frac{a}{b}$ $(b_n, b \neq 0)$

307 Ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1}$ und argumentiere dabei mit den Grenzwertsätzen.

Ausführung: Wir dividieren zuerst Zähler und Nenner durch n^2: $\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{\frac{n^2 - n}{n^2}}{\frac{2n^2 + 1}{n^2}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$

Durch diesem Trick können wir verwenden, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Die Grenzwertsätze sagen nun: Weil hier nur Summen, Differenzen und Quotienten konvergenter Folgen auftreten, dürfen wir den Limes einzeln für Zähler und Nenner bzw. für deren einzelne Summanden bilden.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Aufgaben

Grenzwerte explizit gegebener Folgen

308 Überprüfe die Behauptung mithilfe der Definition des Grenzwertes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n}{4n+5} = 3$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{3n+5} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-3} = \frac{3}{4}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+3n}{2n+3} = \frac{3}{2}$

309 Ab welchem Folgenindex n liegen alle späteren Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwerts a für $\varepsilon = 0{,}05$?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{4n+5} = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+3}{2n-2} = \frac{5}{2}$

310 Ermittle den Limes und beweise dein Resultat mithilfe der Grenzwertdefinition. Ab welchem Index ist der Abstand der Folgenglieder vom Grenzwert kleiner als $\frac{1}{1000}$?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-13}{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+10}$

311 Besitzt die alternierende Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ einen Grenzwert? Stelle eine Behauptung auf und zeige bzw. widerlege sie mithilfe der Definition des Grenzwertes. Überlege, was der Betrag von $(-1)^n$ ist.

312 Zeige, dass die Folgen $\langle a_n \rangle$ Nullfolgen sind!

a) $a_n = \frac{1}{n}$ **b)** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **c)** $a_n = \frac{10}{n}$

d) $a_n = -\frac{1}{3n}$ **e)** $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3n}{3n^2+3}$

313 Berechne mithilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der Folgen:

a) $a_n = \frac{3-6n}{12+8n}$ **b)** $a_n = \frac{n^2-n}{n^3}$

c) $a_n = \frac{3n^2}{2+4n}$ **d)** $a_n = \frac{4n^2-n+1}{8n^2+2n+1}$

314 Wie 313:

a) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ **b)** $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4n+4}$

c) $a_n = \frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2}$

315 Welche der Folgen besitzen einen Grenzwert? Gib gegebenenfalls diesen Grenzwert an!

a) $a_n = \frac{n+5}{n}$ **b)** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ **c)** $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n}$

316 Wie 315:

a) $a_n = \frac{1{,}1^n}{n}$ **b)** $a_n = \frac{n}{n^{1{,}1}}$ **c)** $a_n = \frac{n^5}{1{,}5^n}$

317 Gib eine Folge $\langle a_n \rangle$ an, die die folgende Bedingung erfüllt.

a) $\langle a_n \rangle$ besitzt den Grenzwert 1.
b) $\langle a_n \rangle$ ist eine Nullfolge.
c) $\langle a_n \rangle$ ist konvergent.
d) $\langle a_n \rangle$ ist divergent.
e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$

318 Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet dasselbe wie $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$, indem du beide Aussagen in die Definition des Grenzwertes einsetzt.

319 Was stimmt an dieser Aussage nicht ganz?
Der Grenzwert einer Folge ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig annähern, sie aber nie erreichen.
Gebt Beispiele konvergenter Folgen an, für die diese Aussage nicht stimmt!

Grenzwerte rekursiv gegebener Folgen

320 **(1)** Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ streng monoton fallend und nach unten beschränkt ist. (Aus diesen Eigenschaften folgt, dass ein Grenzwert existiert, wenn auch sein Wert dadurch noch nicht bekannt ist.)

(2) Sobald die Konvergenz und eine passende untere Schranke gesichert sind, kannst du aufgrund der Grenzwertsätze so vorgehen: Setze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ in der rekursiven Definitionsgleichung ein und löse nach a. (Ergibt sich dabei mehr als eine Lösung, dann kann aufgrund der unteren Schranke nur eine richtig sein.)

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n}$

b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$

c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$

321 Entscheide, ob die Folgen $\langle a_n \rangle$ einen Grenzwert besitzen. Wenn ja, stelle eine Vermutung auf und überprüfe sie wie in der vorangegangenen Aufgabe.

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3}$

b) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n - 2$

c) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + 2$

d) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \cdot a_n$

e) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$

3.5 Vollständigkeit der reellen Zahlen E

Der Grenzwertbegriff bildet die Schwelle von der elementaren zur höheren Mathematik. Er ist ein zentraler Begriff im Zusammenhang mit Änderungen von Funktionswerten (Differentialrechnung) und bei der Berechnung von Flächen oder Volumina (Integralrechnung). Vor allem ermöglicht er aber ein besseres Verständnis der reellen Zahlen.

Kehren wir dazu zum Ausgangsbeispiel dieses Kapitels, zur iterativen Berechnung von $\sqrt{3}$, zurück:

322 Bestimme $\sqrt{3}$ näherungsweise mittels Intervallschachtelung.

Ausführung: Bei der Intervallschachtelung geben wir immer genauere Schranken für eine gesuchte Zahl an. Wir überlegen: $\sqrt{3}$ ist die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 3$. Wir gehen ähnlich vor wie beim Bisektionsverfahren (Abschnitt 2.7): Unsere Suche beginnt zwischen zwei ganzen Zahlen und in dezimalen Schritten verfeinern wir immer mehr:

Wegen	$f(1) < 0$	und	$f(2) > 0$	gilt:	$1 < a < 2$	$\Rightarrow$	$a \in]1; 2[$
	$f(1{,}7) < 0$		$f(1{,}8) > 0$		$1{,}7 < a < 1{,}8$	$\Rightarrow$	$a \in]1{,}7; 1{,}8[$
	$f(1{,}73) < 0$		$f(1{,}74) > 0$		$1{,}73 < a < 1{,}74$	$\Rightarrow$	$a \in]1{,}73; 1{,}74[$
	$f(1{,}732) < 0$		$f(1{,}733) > 0$		$1{,}732 < a < 1{,}733$	$\Rightarrow$	$a \in]1{,}732; 1{,}733[$

Wir erhalten so zwei rationale Zahlenfolgen, die sich beliebig genau $\sqrt{3}$ annähern:

die monoton wachsende Folge unterer Schranken $\langle u_n \rangle = \left\langle 1; \frac{17}{10}; \frac{173}{100}; \frac{1\,732}{1\,000}; \ldots \right\rangle$

die monoton fallende Folge oberer Schranken $\langle o_n \rangle = \left\langle 2; \frac{18}{10}; \frac{174}{100}; \frac{1\,733}{1\,000}; \ldots \right\rangle$

Die Intervallbreiten $\langle d_n \rangle = \left\langle 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1\,000}; \ldots \right\rangle$ bilden eine Nullfolge. Genügend viele Schritte machen das Intervall beliebig klein und können $\sqrt{3}$ dadurch beliebig genau festlegen.

Satz: Reelle Zahlen lassen sich als Ergebnis von *Intervallschachtelungen* definieren.

Wie beim Heron-Verfahren sind die einzelnen Folgenglieder – egal, wie viele wir berechnen – stets rationale Zahlen. Der Grenzwert $\sqrt{3}$, dem sich die Folgenglieder annähern, kann aber – wie wir bereits in der fünften Klasse gezeigt haben – keine rationale Zahl sein.

Dass zwischen den natürlichen Zahlen Lücken sind, sieht man „mit freiem Auge“. Offensichtlich sind auch die rationalen Zahlen lückenhaft, obwohl sie die Zahlengerade dicht ausfüllen: In jedes noch so kleine Intervall zwischen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}$ lassen sich beliebig viele weitere rationale Zahlen hineinquetschen. Wo hat dann $\sqrt{3}$ in den – eigentlich gar nicht vorhandenen – Zwischenräumen Platz?

Vielleicht verstehst du nun, warum griechische Mathematiker aus der Schule des Pythagoras schwer verstört waren, als sie irrationale Zahlen entdeckten! Der Name sagt alles: „irrational“ heißt wörtlich „in keinem Verhältnis stehend“. Doch weil solche Zahlen mit Logik und Vernunft nicht fassbar waren, ging „irrational“ in der Bedeutung „unvernünftig“ in den allgemeinen Sprachgebrauch über. Erst Mathematikern im 19. Jahrhundert (*Georg Cantor*, *Richard Dedekind*) gelang es, den Begriff der reellen Zahlen als lückenloses Modell für „wirklich alle“ Punkte der Zahlengeraden logisch streng zu erfassen.

Definition: Eine Zahlenmenge, die für jede beliebige konvergente Folge neben allen Folgengliedern auch den Grenzwert enthält, nennt man *vollständig*.

Satz: Die *reellen Zahlen* sind vollständig.

Vollständigkeit besagt also: Die reellen Zahlen sind *lückenlos* im Hinblick auf Grenzwertberechnungen. Grenzwerte reeller Zahlenfolgen liefern keinen neuen Typ von Zahlen, sondern immer nur reelle Zahlen.

Potenzen mit reellen Exponenten

Wir kennen bereits Potenzen mit rationalen Exponenten, z. B. 2^3, 2^0, 2^{-4}, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{-\frac{2}{5}}$, … Was kann aber $2^{\sqrt{3}}$ bedeuten? Hier tritt im Exponenten eine irrationale Zahl auf. Lassen sich auch solche Potenzen sinnvoll berechnen? Ja! Aber wir müssen dazu auf die Intervallschachtelung zurückgreifen.

Potenzen positiver Zahlen mit reellen Exponenten sind durch Intervallschachtelung definiert.

323 Berechne: $2^{\sqrt{3}}$

Ausführung: Wir verwenden die Intervallschachtelung für $\sqrt{3}$ aus Beispiel 322.

Schachtelung für $\sqrt{3}$	Schachtelung $2^{\sqrt{3}}$
$1 < a < 2$	$2{,}00000\ldots = 2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4{,}00000\ldots$
$1{,}7 < a < 1{,}8$	$3{,}24900\ldots = 2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8} = 3{,}48220\ldots$
$1{,}73 < a < 1{,}74$	$3{,}31727\ldots = 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} = 3{,}34035\ldots$
$1{,}732 < a < 1{,}733$	$3{,}32188\ldots = 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} = 3{,}32418\ldots$

Wir sehen, wie diese Intervallschachtelung den Wert von $2^{\sqrt{3}}$ immer genauer festlegt.

Für die Potenzen mit reellen Exponenten gelten die gleichen Rechenregeln wie für rationale Exponenten. Den Beweis dafür wollen wir hier aber nicht führen.

Satz: Rechenregeln für Potenzen mit reellen Exponenten ($x, y \in \mathbb{R}$; $a, b > 0$)

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\quad \frac{a^x}{a^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Aufgaben

324 Führe eine Intervallschachtelung für

a) $\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{7}$

aus (5 Schritte)!

Gehe von der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ bzw. von $f(x) = x^2 - 7$ aus; schranke die Nullstellen ein, indem du das Ausgangsintervall schrittweise verkleinerst.

325 Berechne mit dem Taschenrechner die folgenden Potenzen:

a) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{\sqrt[3]{2}}$; $2^{\sqrt[4]{2}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$; $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$

326 Gib eine Intervallschachtelung an für:

a) $2^{\sqrt{2}}$ **b)** $3^{\sqrt{2}}$ **c)** $3^{\sqrt{3}}$

327 Gib eine Intervallschachtelung für $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ an!

Hinweis: Beachte, dass hier die Schranken, die sich bei der Intervallschachtelung des Exponenten ergeben, bei der Intervallschachtelung der Potenz vertauscht werden müssen.

328 Welchen Wert hat $(-2)^{\frac{4}{3}}$? Warum könnt ihr für $(-2)^{\frac{3}{4}}$ keinen reellen Wert angeben? Wie sieht es mit $(-2)^{\frac{5}{3}}$ aus?

Diskutiert und gebt Beispiele an: Unter welchen Bedingungen könnt ihr von negativen Zahlen Potenzen mit rationalen Exponenten berechnen? Was liefern die $\boxed{y^x}$-Taste und die $\boxed{\sqrt[x]{y}}$-Taste am Taschenrechner für negative Werte von y?

Lässt sich $(-2)^{\sqrt{3}}$ sinnvoll definieren?

3.6 Arithmetische und geometrische Folgen

Zwei Arten von Folgen haben in der Praxis eine besondere Bedeutung: Ist der absolute Zuwachs von einem Folgenglied zum nächsten stets gleich, so liegt eine arithmetische Folge vor. Wächst ein Folgenglied im Verhältnis zum vorhergehenden relativ stets um den gleichen Faktor, so liegt eine geometrische Folge vor.

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}^*$) heißt *arithmetische Folge*, wenn die *absolute Änderung* k zwischen a_n und a_{n+1} konstant ist.

Grundvorstellung:

$$a_0 \xrightarrow{+k} a_1 \xrightarrow{+k} a_2 \xrightarrow{+k} a_3 \xrightarrow{+k} \ldots$$

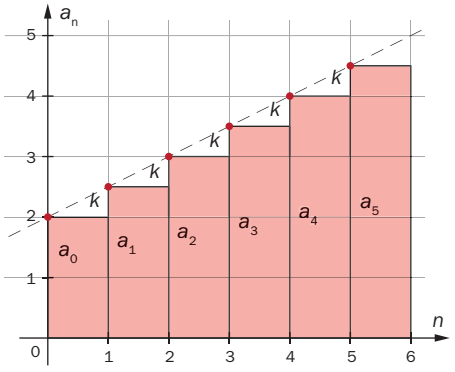
Ein Wert $k > 0$ bedeutet Zuwachs, ein Wert $k < 0$ Abnahme. Bei $k = 0$ liegt der Sonderfall einer *konstanten Folge* vor.

Die Definition der arithmetischen Folge ergibt unmittelbar die rekursive Darstellung:

$a_{n+1} = a_n + k \quad (k, a_0 \in \mathbb{R})$

Schrittweises Einsetzen liefert die explizite Darstellung:

a_0 gegeben
$a_1 = a_0 + k$
$a_2 = a_1 + k = (a_0 + k) + k = a_0 + 2k$
$a_3 = a_2 + k = (a_0 + 2k) + k = a_0 + 3k$
...
$a_n = a_{n-1} + k = a_0 + n \cdot k$



Bemerkungen:

(1) Die Differenz aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Folge ist stets konstant: $a_{n+1} - a_n = k$

(2) Fasst man die Folge als lineare Funktion mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$ auf, also $f(n) = a_0 + k \cdot n$, dann ist k die Steigung der Funktion.

Darstellung der arithmetischen Folge:

rekursiv: a_0 und $k \in \mathbb{R}$ gegeben; $a_{n+1} = a_n + k$ für $n \in \mathbb{N}$

explizit: $a_n = a_0 + n \cdot k$ für $n \in \mathbb{N}$

Wenn die Folge mit a_1 beginnt, so verändert sich die Gleichung der rekursiven Darstellung nicht. Die explizite Darstellung lautet: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$

329 Gegeben ist eine arithmetische Folge mit dem Startwert $a_0 = \frac{1}{2}$ und dem absoluten Zuwachs $k = \frac{3}{2}$. Berechne a_5 und gib die explizite Termdarstellung für das allgemeine Folgenglied a_n an.

Ausführung: $a_5 = a_0 + 5 \cdot k = \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{2} = 8$

$a_n = \frac{1}{2} + n \cdot \frac{3}{2}$

330 Ermittle a_0 und k der arithmetischen Folge, die durch die beiden Glieder $a_4 = 5$ und $a_{10} = 23$ festgelegt wird.

Ausführung: Du kannst in die explizite Darstellung $a_n = a_0 + n \cdot k$ die Werte $n = 4$ und $a_4 = 5$ einsetzen: $5 = a_0 + 4k$. Für $n = 10$ und $a_{10} = 23$ ergibt sich $23 = a_0 + 10k$. Das sind zwei lineare Gleichungen für die beiden Unbekannten a_0 und k.

$$\begin{aligned} &\text{I:} && a_0 + 4k = 5 \\ &\text{II:} && a_0 + 10k = 23 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -7, \; k = 3 \end{aligned}$$

Du kannst aber auch so überlegen:
Die Differenz aufeinander folgender Glieder ist k. Von a_4 bis a_{10} sind es $4 - 10 = 6$ Schritte, daher ist $a_{10} - a_4 = 6k$, also $23 - 5 = 18 = 6k$, und daraus $k = 3$.
Von a_0 nach a_4 sind es vier Schritte zurück, daher: $a_0 = a_4 - 4k \Leftrightarrow a_0 = 5 - 4 \cdot 3 = -7$

Aufgaben

331 Berechne die ersten sechs Glieder der arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$ und stelle sie in einem $(n - a_n)$-Diagramm dar!

a) $a_n = 2 \cdot n + \frac{1}{2}$

b) $a_n = -0{,}25 \cdot n - 1$

c) $a_0 = 0; \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3}{4}$

d) $a_0 = -5; \quad a_{n+1} = a_n + 2$

332 Berechne die ersten drei Glieder der arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$, das zehnte a_{10} und das zwanzigste Folgenglied a_{20}.

a) $a_n = 4 \cdot n + 3$ **b)** $a_n = -5 \cdot n + 5$

c) $a_n = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{3}{2}$ **d)** $a_n = -0{,}25 \cdot n - 1{,}25$

333 Ermittle a_0 und k der arithmetischen Folge, die durch die beiden Glieder festgelegt wird und gib a_n explizit und rekursiv an:

a) $a_3 = 7, \; a_7 = 3$ **b)** $a_2 = 5, \; a_4 = 1{,}5$

c) $a_2 = 0, \; a_5 = -1{,}5$ **d)** $a_3 = 15, \; a_6 = 35$

334 **a)** Wie lautet das 8. Folgenglied einer arithmetischen Folge mit $a_0 = 72$ und $k = -0{,}75$?

b) Zeige, dass die Folge $\langle a_n = 5n + 3 \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ eine arithmetische, die Folge $\langle b_n = n^2 - 1 \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ hingegen keine arithmetische ist.

335 Berechne die Glieder a_8 und a_{100} der arithmetischen Folge:

a) $a_5 = 22, \; k = -2$

b) $a_3 = 17, \; k = -3$

336 Ein Buch mit 500 Seiten ist ohne Einband 45 mm dick.
Berechne, wie dick ein Buch ohne Einband ist, wenn es 180 Seiten bzw. 460 Seiten hat und auf gleichem Papier gedruckt wird!

337 In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Längen der Seiten die Anfangsglieder einer arithmetischen Folge.
Berechne den Umfang des Dreiecks,

a) wenn die kürzere Kathete 21 cm lang ist,

b) wenn die längere Kathete 32 cm lang ist,

c) wenn die Hypotenuse 45 cm ist.

338 Können die angegebenen Glieder Teil einer arithmetischen Folge sein?

a) $a_5 = 0, \quad a_{10} = 10, \quad a_{19} = 28$

b) $a_1 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3$

c) $a_4 = -\frac{1}{3}, \quad a_6 = 1, \quad a_9 = 3$

d) $a_1 = \frac{7}{6}, \quad a_2 = \frac{5}{4}, \quad a_3 = \frac{4}{3}$

339 Wann ist eine arithmetische Folge

a) nach unten beschränkt,

b) nach oben beschränkt,

c) monoton wachsend,

d) monoton fallend,

e) konstant,

f) divergent,

g) konvergent?

340 Beweise: Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei arithmetische Folgen sind, dann ist die Folge der Summen $\langle s_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$ ebenfalls eine arithmetische Folge.

341 Zeige: Ab dem zweiten Glied ist jedes Glied einer arithmetischen Folge das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder.

Hinweis: Von dieser Eigenschaft leitet sich der Name „arithmetische Folge“ her.

Definition: Eine Folge $\langle b_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}^*$) heißt *geometrische Folge*, wenn der Quotient q zwischen b_n und b_{n+1} konstant ist.

G

Grundvorstellung:

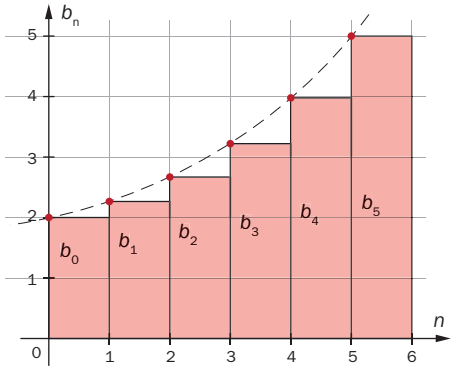
$$b_0 \xrightarrow{\cdot q} b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \xrightarrow{\cdot q} \dots$$

Ein Wert $q > 1$ bedeutet Zuwachs, ein Wert $0 < q < 1$ Abnahme. Auch negative Werte von q sind möglich; dann wechselt das Vorzeichen der Folgenglieder alternierend. Bei $q = 1$ liegt der Sonderfall einer konstanten Folge vor, ebenso bei $q = 0$ ab dem zweiten Folgenglied.

Die Definition der geometrischen Folge ergibt unmittelbar die rekursive Darstellung: $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (q, b_0 \in \mathbb{R})$

Schrittweises Einsetzen liefert die explizite Darstellung:

b_0 gegeben
$b_1 = b_0 \cdot q$
$b_2 = b_1 \cdot q = (b_0 \cdot q) \cdot q = b_0 \cdot q^2$
$b_3 = b_2 \cdot q = (b_0 \cdot q^2) \cdot q = b_0 \cdot q^3$
…
$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_0 \cdot q^n$



Bemerkungen:

(1) Der Quotient aufeinander folgender Glieder einer geometrischen Folge ist stets konstant: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

(2) Auch die **relative Änderung** aufeinander folgender Glieder ist konstant: $\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} = q - 1$

(3) Eine geometrische Folge kann man als Exponentialfunktion mit Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ auffassen: $f(n) = b_0 \cdot q^n$ (siehe Seite 146, Abschnitt 5.7).

Darstellung der geometrischen Folge:
rekursiv: b_0 und $q \in \mathbb{R}$ gegeben; $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für $n \in \mathbb{N}$
explizit: $b_n = b_0 \cdot q^n$ für $n \in \mathbb{N}$

Wenn die Folge mit b_1 beginnt, so verändert sich die Gleichung der rekursiven Darstellung nicht. Die explizite Darstellung lautet: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

342 Gegeben ist eine geometrische Folge mit dem Startwert $b_0 = 2$ und dem Quotienten $q = \frac{3}{2}$. Berechne b_4 und gib die explizite Termdarstellung für das allgemeine Folgenglied b_n an.

Ausführung: $b_4 = b_0 \cdot q^4 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{81}{16} = \frac{81}{8}$ $\qquad b_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

343 Ermittle b_0 und q der geometrischen Folge, die durch die beiden Glieder $b_1 = 108$ und $b_4 = 256$ festgelegt wird.

Ausführung: Du kannst, ähnlich wie in Beispiel 330, die Werte in die Formel $b_n = b_0 \cdot q^n$ einsetzen und erhältst die Gleichungen $108 = b_0 \cdot q$ und $256 = b_0 \cdot q^4$. Lösungsvorschlag: multipliziere die erste Gleichung mit q. Dadurch werden beide rechten Seiten gleich (Gleichsetzungsmethode), und die linken Seiten ergeben $108q^3 = 256 \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = \frac{256}{108} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{4}{3}$
Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhältst du schließlich: $b_0 = 108 : \frac{4}{3} = 81$

Du kannst aber auch mithilfe der rekursiven Darstellung argumentieren: von b_1 zu b_4 wird dreimal mit q multipliziert. Daraus folgt direkt: $108\,q^3 = 256 \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{4}{3}$. Von b_1 rückwärts nach b_0 wird einmal durch q dividiert, also: $b_0 = b_1 : q = 108 : \frac{4}{3} = 81$

344 Beweise: Die Folge $\langle q^n \rangle$ geht für $|q| < 1$ gegen 0.

Ausführung:

a) Sei $0 < q < 1$. Dann ist $|q| = q$, und q lässt sich in der Form $q = \frac{1}{1+h}$ anschreiben (für $h > 0$). Wir brauchen nun die Bernoullische Ungleichung $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (siehe Aufgabe 431). Sie liefert für $|q^n| = q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\cdot h}$. Für genügend großes n wird der rechte Bruch kleiner als jedes beliebig vorgegebene ε. Das ist genau die Bedingung in der Definition des Grenzwertes.

$|q^n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

b) Sei $-1 < q < 0$. Dann alterniert das Vorzeichen der Folgenglieder, aber für deren Betrag gilt $|q^n| = |q|^n$. Die Folge $\langle |q|^n \rangle$ hat nach Punkt a) den Grenzwert 0, also gilt auch hier $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Aufgaben

345 Berechne die ersten sechs Glieder der geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$ und stelle sie in einem $(n - b_n)$-Diagramm dar!

a) $b_n = 0{,}5 \cdot 2^n$ **b)** $b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

346 Berechne die ersten drei Glieder der geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$, sowie b_{10} und b_{20}:

a) $b_0 = 3, \quad q = 2$ **b)** $b_0 = -0{,}7, \quad q = -0{,}25$

c) $b_0 = 1, \quad q = 1{,}2$ **d)** $b_0 = -4\sqrt{2}, \quad q = \sqrt{8}$

347 Ermittle b_0 und q der geometrischen Folge, die durch die beiden Glieder festgelegt wird und gib b_n explizit und rekursiv an:

a) $b_3 = 2, \quad b_5 = 8$

b) $b_2 = 1, \quad b_4 = \frac{1}{16}$

c) $b_2 = 64, \quad b_4 = 256$

d) $b_2 = 0{,}25, \quad b_3 = 0{,}0625$

348 Sind die angegebenen Glieder Teile einer geometrischen Folge?

a) $b_7 = \frac{1}{8}, \quad b_{10} = 1, \quad b_{12} = 4$

b) $b_1 = 108, \quad b_3 = 192, \quad b_4 = 256$

c) $b_1 = -192, \quad b_2 = 144, \quad b_4 = 81$

d) $b_{12} = 1, \quad b_{17} = -1, \quad b_{33} = 1$

349 Die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Anfangsglieder einer geometrischen Folge. Berechne die Längen der Seiten, wenn die Hypotenuse 112 mm lang ist!

350 Gibt es eine Folge, die sowohl eine arithmetische als auch eine geometrische Folge ist?

351 Beweise: Die relative Änderung $\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}$ aufeinander folgender Glieder einer geometrischen Folge ist konstant.

352 Beweise: Wenn $\langle b_n \rangle$ und $\langle c_n \rangle$ zwei geometrische Folgen sind, dann ist

a) die Folge der Produkte $\langle p_n \rangle = \langle b_n \cdot c_n \rangle$

b) die Folge der Quotienten $\langle r_n \rangle = \left\langle \frac{b_n}{c_n} \right\rangle$

ebenfalls eine geometrische Folge.

353 Beweise:

Die absoluten Änderungen $d_n = b_{n+1} - b_n$ aufeinander folgender Glieder einer geometrischen Folge bilden selber eine geometrische Folge.

354 Gib eine Begründung für folgenden Satz an!

Satz: Eine geometrische Folge $\langle b_n \rangle$, $(n \in \mathbb{N})$ mit $b_n = b_0 \cdot q^n$ und $b_0 > 0$ ist

(1) streng monoton wachsend, wenn $q > 1$,

(2) streng monoton fallend, wenn $0 < q < 1$,

(3) konstant, wenn $q = 1$,

(4) alternierend, wenn $q < 0$.

355 Zeige: Ab dem zweiten Glied ist jedes Glied b_n einer geometrischen Folge das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Hinweis: Von dieser Eigenschaft leitet sich der Name „geometrische Folge“ her.

3.7 Arithmetische und geometrische Reihen

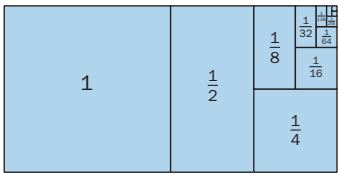
Summiere die Glieder der Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots \right\rangle$ schrittweise:

$s_1 = a_1 = 1$

$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\vdots$



Die Abbildung zeigt, wie du alle a_n als Flächen in ein Rechteck schlichten könntest. Wird das Rechteck je voll? Können unendlich viele Terme tatsächlich eine sinnvolle Summe haben?

Definition:

Ist $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge, so bezeichnet man den Ausdruck $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ als die zu dieser Folge gehörige *arithmetische Reihe*.

Ist $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge, so bezeichnet man den Ausdruck $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ als die zu dieser Folge gehörige *geometrische Reihe*.

Satz: *Wert endlicher Reihen*

Der Wert einer endlichen arithmetischen Reihe ist: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Der Wert einer endlichen geometrischen Reihe ist: $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$

Bemerkung: Wir zählen n ab 1 statt ab 0, weil sich so einfachere Summenformeln ergeben.

356 Beweise die Summenformel für die endliche arithmetische Reihe!

Ausführung: Wir zeigen dies mit der Methode von Gauß, indem wir die Reihe zweimal auf verschiedene Art anschreiben und dann einfach addieren.

$$\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + \ldots + (a_1 + (n-1) \cdot k) \\ s_n &=& a_n + (a_n - k) + (a_n - 2k) + \ldots + (a_n - (n-1) \cdot k) \\ \hline 2 \cdot s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) \\ 2 \cdot s_n &=& (a_1 + a_n) \cdot n \end{array}$$

357 Beweise die Summenformel für die endliche geometrische Reihe!

Ausführung: Wir zeigen dies in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden Beispiel. Wir multiplizieren die Summe mit $-q$ und schreiben sie geschickt verschoben nochmals an ($q \neq 1$).

$$\begin{array}{rcl} s_n &=& b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} \\ s_n \cdot (-q) &=& (-b_1 \cdot q) + (-b_1 \cdot q^2) + \ldots + (-b_1 \cdot q^{n-1}) + (-b_1 \cdot q^n) \\ \hline s_n + s_n \cdot (-q) &=& b_1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + (-b_1 \cdot q^n) \\ s_n \cdot (1 - q) &=& b_1 \cdot (1 - q^n) \\ s_n &=& b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{array}$$

Satz: Die *Summe einer unendlichen geometrischen Reihe* (mit $|q| < 1$) ist: $s = b_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$

Beweis: Für $|q| < 1$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (siehe Aufg. 344). Aus den Grenzwertsätzen (S. 62) ergibt sich:

$$s_n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n \to \infty} q^n}{1 - q} \underbrace{=}_{|q| < 1} b_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

Aufgaben

Arithmetische Reihen

358 Berechne $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$ durch Zusammenfassen des ersten und letzten, des zweiten und zweitletzten Gliedes usw.

359 Berechne die Werte der endlichen Reihen:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + 97 + 99$

b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100$

c) $3 + 7 + 11 + \ldots + 79 + 83$

d) $-2 - 7 - 12 - \ldots - 152$

e) $\frac{4}{3} + 2 + \frac{8}{3} + \ldots + 8$

360 Berechne die Werte der endlichen Reihen:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (u - 2) + u$

b) $2 + 4 + 6 + \ldots + (v - 2) + v$

c) $3 + 7 + 11 + \ldots + (r - 4) + r$

d) $-2 - 7 - 12 - \ldots - (s - 5) - s$

361 **a)** Zwischen die Zahlen 18 und 114 sollen 7 Zahlen eingeschaltet werden, sodass eine arithmetische Folge entsteht. Wie lauten die Zahlen und wie lautet die Gesamtsumme aller Zahlen?

b) Ebenso: 17 Zahlen zwischen −4 und 5.

c) Ebenso: 8 Zahlen zwischen 39 und 75.

d) Ebenso: 7 Zahlen zwischen 4 und 10.

362 Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:

a) $a_3 = 9$ und $a_{29} = 139$

b) $a_{10} = 80$ und $a_{45} = 10$

c) $a_{42} = 4$ und $a_{49} = 88$

d) $a_8 = -18$ und $a_{80} = 0$

Berechne s_{30}, s_{100} und s_n.

363 Eine Uhr schlägt die ganzen Stunden. Wie viele Schläge macht sie im Zeitraum von 0:01 Uhr bis 12:01 Uhr?

364 Für die Ausführung einer Brunnenbohrung werden für den ersten Bohrmeter 1 500 € berechnet. Für jeden weiteren Meter steigt der Preis jeweils um 200 €. Wieviel kostet die Bohrung für einen 25 m tiefen Brunnen?

365 Ein Körper fällt in der ersten Sekunde 5 m und in jeder folgenden Sekunde um 10 m mehr als in der vorhergehenden.

a) Gib die Folge der Wegstücke a_n an, die in jeder Sekunde zurückgelegt werden.

b) Gib den Gesamtweg s_n an, der in den ersten n Sekunden zurückgelegt wird.

Geometrische Reihen

366 Berechne die Werte der endlichen Reihen:

a) $1 + 2 + 4 + \ldots + 256$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{256}$

c) $1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^8$

d) $1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^8$

e) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{243}$

367 Berechne die Werte der endlichen Reihen:

a) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}$

b) $1 + y + y^2 + \ldots + y^{20}$

c) $3 + 3u + 3u^2 + \ldots + 3u^{12}$

d) $a + a \cdot v + a \cdot v^2 + \ldots + a \cdot v^{15}$

368 Von einer geometrischen Folge kennt man

a) $b_1 = 4$ und $b_2 = 6$. Berechne s_5 und s_{10}.

b) $b_3 = 9$ und $b_6 = \frac{-64}{3}$. Berechne s_7 und s_{12}.

c) $b_2 = 1$ und $b_4 = \frac{25}{16}$. Berechne s_3 und s_5.

d) $b_3 = 640$ und $b_6 = 512$. Berechne s_{10} und s_{100}.

369 Berechne die Werte der unendlichen geometrischen Reihen:

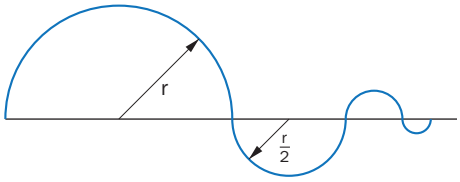
a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

b) $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$

c) $2^2 \cdot 3^{-4} + 2^4 \cdot 3^{-6} + \ldots$

d) $0{,}64 - 0{,}08 + 0{,}01 - \ldots$

370 Eine Wellenlinie entsteht durch Aneinanderhängen von Halbkreisbögen.



a) Gib eine rekursive und eine explizite Darstellung der Länge der Bögen an.

b) Ermittle die Summe der Länge der ersten fünf, zehn und n Bögen.

c) Ermittle die Gesamtlänge der Wellenlinie.

371 Ein Ball wird (vom Boden) 3 m in die Höhe katapultiert. Nach jedem Aufprall springt er nur mehr auf 75 % seiner vorherigen Höhe.

a) Gib eine rekursive und eine explizite Darstellung der Sprunghöhen an.

b) Welchen Weg legt der Ball bei den ersten fünf, zehn und n Sprüngen zurück?

c) Wie lang ist der Gesamtweg?

3.8 Anwendungen in der Finanzmathematik

Der Wert des Geldes – Auf- und Abzinsung

Ein Geldbetrag, den ich sofort erhalte, nützt mir mehr, als wenn ich ihn erst in einem Jahr bekomme. Zum einen deswegen, weil Geld durch Inflation an Wert verliert: In einem Jahr kann ich mit 1 000 € weniger kaufen als jetzt, weil im Allgemeinen die Preise steigen. Zum anderen kann ich den Betrag sofort nutzen, etwa einen Laptop kaufen und damit arbeiten.

Lege ich Geld auf ein Sparbuch, so verzichte ich auf den augenblicklichen Nutzen. Zum Ausgleich dafür zahlt mir die Bank Zinsen.[1]

372 Ein Betrag von 5 000 € wird auf einem Sparbuch angelegt. Das Sparbuch wird mit 4 % verzinst. Wie wird sich das Guthaben in den nächsten Jahren ändern?

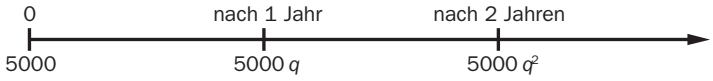
Ausführung:

Wert heute:	$5\,000$	
Wert in 1 Jahr:	$5\,000 \cdot 1{,}04$	$= 5\,200$
Wert in 2 Jahren:	$5\,000 \cdot 1{,}04^2$	$= 5\,408$
⋮	⋮	

Wir erhalten eine geometrische Folge. Der konstante Faktor $q = 1{,}04$ wird **Aufzinsfaktor** genannt.

Bei einem Jahreszinssatz p gilt: Aufzinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$

Den unterschiedlichen Wert des Geldes können wir in einer Zeitleiste veranschaulichen:



373 Auf einem Sparbuch scheint ein Betrag von 4 410 € auf. Welchen Wert hatte dieser Geldbetrag vor 1 Jahr, vor 2 Jahren …, wenn der Jahreszinssatz 5 % beträgt?

Ausführung:

Wert heute:	$4\,410$	
Wert vor 1 Jahr:	$\frac{4\,410}{1{,}05}$	$= 4\,200$
Wert vor 2 Jahren:	$\frac{4\,410}{1{,}05^2}$	$= 4\,000$
⋮	⋮	

Zeitleiste:

Auch hier entsteht eine geometrische Folge. Der Multiplikationsfaktor $q^{-1} = \frac{1}{1{,}05}$ ist nun aber kleiner als eins und heißt (jährlicher) **Abzinsfaktor**. Er ist gleich dem Kehrwert des entsprechenden Aufzinsfaktors $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Definition: Der *Endwert* ist der Wert, den Zahlungen am Ende eines Zeitraumes haben. Er wird durch *Aufzinsung* ermittelt.
Der *Barwert* ist der rechnerische Wert zukünftiger Zahlungen zum gegenwärtigen Zeitpunkt. Er wird durch *Abzinsung* ermittelt.

Hinweis

Du kannst sowohl End- als auch Barwert verwenden, um Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten rechnerisch zu vergleichen. Bei Spareinlagen ist der Endwert interessant; bei Ratenzahlungen und Kreditgeschäften wird eher der Barwert verwendet.

[1] Wir rechnen in diesem Abschnitt generell mit effektiven Zinssätzen. In der Praxis muss man z. B. berücksichtigen, dass 25 % der Zinsen als Kapitalertragssteuer an das Finanzamt gehen.

374 Ein Haus wird verkauft. Der Verkäufer bekommt folgende Angebote:

Angebot A: 100 000 € in bar und 168 000 € nach 5 Jahren.

Angebot B: 150 000 € in bar und 110 000 € nach 3 Jahren.

Wie viel sind die angebotenen Geldbeträge bei einem Jahreszinssatz von 2,5 % zum gegenwärtigen Zeitpunkt wert?

Ausführung: Wir vergleichen die Barwerte und müssen dafür zukünftige Zahlungen abzinsen.

$$\text{Barwert von A} = 100\,000 + \frac{168\,000}{1{,}025^5} = 248\,487{,}52$$

$$\text{Barwert von B} = 150\,000 + \frac{110\,000}{1{,}025^3} = 252\,145{,}94$$

Ergebnis: Der Barwert des Angebots B ist höher.

Aufgaben

375 Vanessa möchte für ein Auslandsstudium in fünf Jahren 5 000 € ansparen. Die Eltern eröffnen für sie ein 4 %-iges Sparbuch mit 1 500 € Anfangseinlage. Ein Jahr später zahlt sie 800 €, nach zwei Jahren 900 € und nach drei Jahren 1 200 € ein. Im 4. Jahr kann sie nichts einzahlen.

a) Wieviel Geld fehlt ihr am Ende des 5. Jahres auf ihr Sparziel?

b) Wie viel hätte sie in 4. Jahr noch einzahlen müssen, um ihr Sparziel zu erreichen?

c) Wie hoch hätte die Anfangseinlage sein müssen, damit sie zusammen mit ihren drei Jahreszahlungen ihr Sparziel erreicht?

376 Herr Huber möchte ein Grundstück verkaufen und kann zwischen zwei Angeboten wählen.

Angebot A: 50 000 € werden sofort bezahlt und 30 000 € nach 3 Jahren.

Angebot B: 75 000 € werden sofort bezahlt.

Beurteile die beiden Angebote

a) bei einem Jahreszinssatz von 4 %.

b) bei einem Jahreszinssatz von 7 %.

377 Herr Karner hat vor 3 Jahren einen Kredit von 25 000 € aufgenommen (Jahreszinssatz 6 %). Nach einem Jahr hat er 10 000 € zurückgezahlt.

a) Wie viel ist Herr Karner noch schuldig?

b) Wie viel ist Herr Karner noch schuldig, wenn der Jahreszinsatz 2 Jahre nach Kreditaufnahme auf 4,5 % gesenkt wurde?

378 Für den Kauf eines Hauses gibt es zwei Interessenten:

A bietet 100 000 € sofort, 80 000 € nach 2 Jahren und 80 000 € nach weiteren 3 Jahren.

B bietet 190 000 € sofort und 80 000 € nach 6 Jahren.

Berechne beide Barwerte

a) bei $p = 2{,}5\,\%$,

b) bei $p = 4\,\%$.

Wie groß ist jeweils die Differenz der Barwerte?

379 Für einen Autokauf werden 20 000 € Kredit aufgenommen. Der Zinssatz beträgt

a) 8,5 % jährlich,

b) 12 % jährlich.

Es wird vereinbart, dass 5 000 € nach einem Jahr, 10 000 € nach 2 Jahren und nach weiteren 2 Jahren der Rest zurückzuzahlen ist. Wie groß ist der Restbetrag?

Lösungshinweis: Der Barwert aller Zahlungen muss die Kreditsumme ergeben.

380 Für den Erwerb eines Grundstückes werden zwei Angebote gelegt:

Angebot A: 20 000 € sofort und dreimal jeweils am Jahresende 10 000 €.

Angebot B: 20 000 € sofort und 35 000 € nach 5 Jahren.

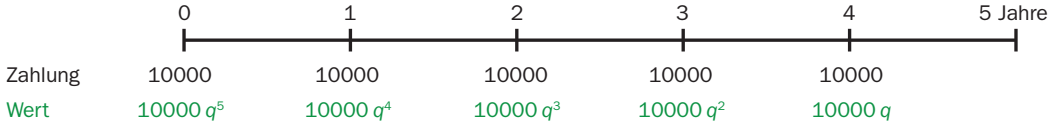
Beurteile beide Angebote bei einem Jahreszinssatz von

a) 5 %,

b) 9 %.

381 Claudia zahlt 5 Mal, jeweils am Jahresbeginn („vorschüssig“) 10 000 € auf ein Sparbuch. Wie viel kann sie nach 5 Jahren abheben? Lege einen Jahreszinssatz von 6 % zugrunde!

Ausführung: Der jährliche Aufzinsfaktor ist $q = 1{,}06$.
Eine Zeitleiste zeigt jede einzelne Zahlung und deren aufgezinsten Wert.
Die Zahlung gleich zu Beginn wird 5 Jahre verzinst und erreicht am Ende den Wert $10\,000\,q^5$. Die nächste Zahlung wird nur 4 Jahre verzinst, sie erreicht daher den Wert $10\,000\,q^4$, usw.



Der Endwert nach 5 Jahren beträgt $10\,000\,q + 10\,000\,q^2 + \ldots + 10\,000\,q^5$, das ist eine geometrische Reihe mit $n = 5$ und $b_1 = 10\,000\,q$. (siehe Summenformel auf Seite 70).

Ergebnis: $10\,000\,q\,\frac{1-q^5}{1-q} \approx 59\,753{,}19$ Claudia kann nach 5 Jahren 59 753,19 € abheben.

382 Fortsetzung von Beispiel 381: Wie entwickelt sich Claudias Guthaben mit Zinsen im Lauf der Jahre? Erstelle eine Anspartabelle!

Ausführung:

Jahr	Guthaben am Beginn	Zinsen am Ende	Guthaben am Ende
1	10 000,00	600,00	10 600,00
2	20 600,00	1 236,00	21 836,00
3	31 836,00	1 910,16	33 746,16
4	43 746,16	2 624,77	46 370,93
5	56 370,93	3 382,26	59 753,19

Bei Zeiträumen innerhalb eines Jahres rechnen Banken ohne Zinseszinsen („lineare Verzinsung“): Bei einem Jahreszinssatz p zahlen sie $\frac{p}{12}$ pro Monat, $\frac{p}{4}$ viertel- und $\frac{p}{2}$ halbjährlich. Wenn du bei regelmäßigen monatlichen, viertel- oder halbjährlichen Zahlungen die entsprechenden linearen Aufzinsfaktoren $\left(1 + \frac{1}{12}\frac{p}{100}\right)$, $\left(1 + \frac{1}{4}\frac{p}{100}\right)$, $\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p}{100}\right)$ in die Summenformel der geometrischen Reihe einsetzt, berechnest du etwas höhere Zinsen als die Bank. Bessere Übereinstimmung mit der Berechnungsmethode der Bank ergeben die **äquivalenten Aufzinsfaktoren**. Der Unterschied zwischen beiden Berechnungsmethoden ist minimal (siehe Aufgabe 391).

Definition: Bei einem Jahreszinssatz p, Aufzinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$, rechnen wir regelmäßige Zahlungen mit dem

äquivalenten monatlichen Aufzinsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{q}$

äquivalenten vierteljährlichen Aufzinsfaktor: $q_4 = \sqrt[4]{q}$

äquivalenten halbjährlichen Aufzinsfaktor: $q_2 = \sqrt{q}$

Claudias Zahlungen auf das Sparbuch erfolgen jeweils am Beginn eines Jahres. Es handelt sich um *vorschüssige Zahlungen*. Demgegenüber erfolgen *nachschüssige Zahlungen* immer erst am Ende der Verzinsungsperiode. Vorschüssige Zahlungen sind typisch, wenn man auf einem Sparbuch regelmäßig einzahlt. Kredite werden mit nachschüssigen Ratenzahlungen zurückbezahlt. Die monatlichen Zahlungen im nächsten Beispiel sind ebenfalls nachschüssig.

383 Herr Krammer bietet für ein Haus eine Sofortzahlung von 45 000 € und 120 monatliche Zahlungen zu je 700 €. Welchem Barwert entspricht dieses Angebot ($p = 5\,\%$)?

Ausführung: $q = 1{,}05 \quad \Rightarrow \quad q_{12} = \sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}00407$

Die erste monatliche Zahlung erfolgt 1 Monat nach der Sofortzahlung. Sie wird daher 119 Monate verzinst. Die nächste Monatsrate wird nur mehr 118 Monate verzinst. Die Zeitleiste veranschaulicht dies (eine Periode = 1 Monat):

$$\text{Endwert} = 700 + 700\,q_{12} + \ldots + 700\,q_{12}^{119} = 700 \cdot \frac{1 - q_{12}^{120}}{1 - q_{12}} \approx 108\,054{,}21$$

Beachte, dass 120 Monate genau 10 Jahre sind. Daher gilt:

$$\text{Barwert} = 45\,000 + \frac{108\,054{,}21}{1{,}05^{10}} \approx 111\,335{,}91$$

Ergebnis: Der Barwert des Angebotes beträgt 111 335,91 €.

Aufgaben

384 Wie viel ist zuletzt am Sparbuch?

a) Anfangseinlage 4 000 € und 48 (nachschüssige) Zahlungen zu je 400 € vierteljährlich. Zinssatz 5 % p. a.

b) Anfangseinlage 3 000 € und 40 (nachschüssige) Zahlungen zu je 500 € vierteljährlich. Zinssatz 6 % p. a.

385 Karla zahlt monatlich 100 € auf ein Sparbuch, das mit 4 % verzinst wird. Wie viel kann sie nach 4 Jahren abheben?

386 Herbert möchte innerhalb von 4 Jahren einen Betrag von 8 000 € durch monatliche Ratenzahlungen ansparen.
Wie hoch müssen diese Raten bei einem Zinssatz von 4,5 % sein? Wie viel Zinsen erhält Herbert?

387 Zwei Interessenten machen für den Kauf eines Hauses folgende Angebote:

A bietet sofort 40 000 € und 48 Mal 4 000 € vierteljährlich (nachschüssig).

B bietet sofort 50 000 € und 20 Mal 9 000 € halbjährlich (nachschüssig).

Berechne die Barwerte der beiden Angebote bei einem Zinssatz von 5 % p. a.!

388 Ein Interessent bietet für ein Haus 45 000 € sofort und 5 Jahre lang monatlich 480 € nachschüssig. Berechne den Barwert dieses Angebotes für einen Zinssatz von 4,5 %.

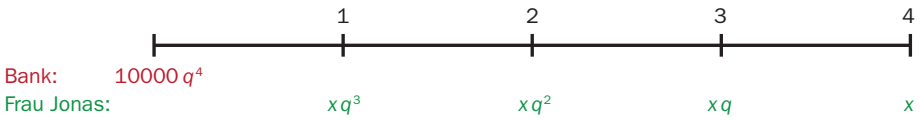
389 Ein Auto wird verkauft. A bietet 4 000 € sofort und 4 000 € nach einem Jahr. B bietet 5 000 € sofort und 12 monatliche Zahlungen zu je 240 €.
Berechne den jeweiligen Barwert ($p = 4\,\%$)!

390 Zeige für ein beliebiges Kapital: Der Endwert nach einem Jahr (Aufzinsfaktor q) ist gleich dem Endwert mit halbjährlicher Verzinsung mit q_2 oder bei monatlicher Verzinsung q_{12}.

391 Zeigt, dass für $p \leqslant 10\,\%$ die linearen und äquivalenten Aufzinsfaktoren sehr gut übereinstimmen.

392 Frau Jonas zahlt einen Kredit von 10 000 € in 4 gleichen Jahresraten zurück. Wie hoch sind die Jahresraten (Annuitäten) und die gesamten Zinsen? Der jährliche Zinssatz beträgt 8 %. Erstelle auch einen Tilgungsplan.

Ausführung: Die Bank zahlt zu Beginn 10 000 € an Frau Jonas. Diese zahlt in 4 Jahresraten zu je x € den Kredit zurück. Die Zeitleiste bewertet alle Zahlungen aufgezinst bis zum Endwert:[1]



Der Endwert der Zahlungen von Frau Jonas (linke Seite) muss dem Endwert der Zahlung der Bank (rechte Seite) entsprechen.

$$\begin{aligned} x + x\,q + x\,q^2 + x\,q^3 &= 10\,000\,q^4 \\ x \cdot \frac{1-q^4}{1-q} &= 10\,000\,q^4 \\ x &= \frac{10\,000\,q^4\,(1-q)}{1-q^4} \\ x &\approx 3\,019{,}21 \end{aligned}$$

Ergebnis:
Frau Jonas muss vier Jahresraten zu je 3 019,21 € bezahlen.
Zinsen: $4x - 10\,000 = 2\,076{,}83 \;\Rightarrow$ Die Zinsen betragen insgesamt 2 076,83 €.

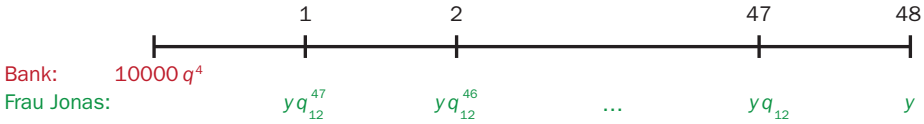
Tilgungsplan:

Jahr	Schulden am Beginn	Zinsen	Rückzahlung	Schulden am Ende
1	10 000,00	800,00	3 019,21	7 780,79
2	7 780,79	622,46	3 019,21	5 384,04
3	5 384,04	430,72	3 019,21	2 795,55
4	2 795,55	223,64	3 019,21	−0,02

(Durch Rundungsfehler bleibt hier ein Restbetrag im Centbereich.)

393 Fortsetzung von Beispiel 392: Frau Jonas möchte den Kredit in monatlichen Raten bezahlen. Wie hoch ist eine Monatsrate und wie viel Zinsen zahlt sie?

Ausführung: 4 Jahre sind 48 Monate. Frau Jonas zahlt daher 48 Monatsraten zu je y €:



Der Endwert der Zahlungen von Frau Jonas entspricht wieder dem aufgezinsten Wert der Zahlung der Bank.

Verwende für q_{12} den äquivalenten monatlichen Aufzinsfaktor $q_{12} = (1{,}08)^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}006434$.
(Speichere den genauen Wert im TR, damit Rundungsfehler klein bleiben!)

$$\begin{aligned} y + y\,q_{12} + y\,q_{12}^2 + \ldots + y\,q_{12}^{47} &= 10\,000\,q^4 \\ y \cdot \frac{1-q_{12}^{48}}{1-q_{12}} &= 10\,000\,q^4 \\ y &= \frac{10\,000\,q^4\,(1-q_{12})}{1-q_{12}^{48}} \\ y &\approx 242{,}82 \end{aligned}$$

Ergebnis: Frau Jonas muss 48 Monatsraten zu je 242,82 € bezahlen.
Zinsen: $48y - 10\,000 \;\Rightarrow$ Die Zinsen betragen insgesamt 1 655,41 €.

Bemerkung: Bei monatlicher Rückzahlung fallen im Vergleich zur jährlichen Rückzahlung weniger Zinsen an, weil bereits nach einem Monat die erste Rückzahlung erfolgt.

[1] Ebenfalls zum Ziel führen würde, die Kreditsumme am Anfang des Zeitraumes mit dem abgezinsten Barwert der Zahlung von Frau Jonas zu vergleichen.

Aufgaben

394 Sabine nimmt einen Kredit von 24 000 € auf (Zinssatz 6 %). Sie zahlt den Kredit in 4 Jahresraten zurück.

Berechne die jährliche Rate (Annuität) und erstelle einen Tilgungsplan.

395 Ein Kredit von 30 000 € wird in 3 nachschüssigen Jahresraten bezahlt. Die Bank verrechnet 9,2 % Zinsen p. a.

Berechne die jährliche Rate (Annuität) und erstelle einen Tilgungsplan.

396 Ein Kredit von 75 000 € wird in 3 nachschüssigen Jahresraten bezahlt. Die Bank verrechnet 8,5 % Zinsen p. a.

Berechne die jährliche Rate (Annuität) und erstelle einen Tilgungsplan.

397 Franz nimmt einen Kredit von 5 000 € auf ($p = 7\,\%$) und zahlt ihn innerhalb von 5 Jahren zurück.

Wie viel Zinsen zahlt Franz bei Jahresraten, wie viel Zinsen zahlt er bei Monatsraten?

398 Ein Kredit von 114 000 € soll innerhalb von vier Jahren bezahlt werden. (Zinssatz 7 % p. a.)

a) Berechne die Annuität, wenn der Kredit in nachschüssigen Jahresraten bezahlt wird. Bestimme die Zinsenbelastung und erstelle einen Tilgungsplan.

b) Berechne die Annuität, wenn der Kredit in nachschüssigen Monatsraten bezahlt wird. Vergleiche die Zinsenbelastung mit jener in a).

c) Berechne die Annuität, wenn der Kredit nicht in vier sondern in 20 nachschüssigen Jahresraten bezahlt wird. Vergleiche die Zinsenbelastung mit jener in a).

399 Ein Kredit von 48 000 € soll innerhalb von vier Jahren bezahlt werden (Zinssatz 9 % p. a.)

a) Berechne die Annuität, wenn der Kredit in nachschüssigen Jahresraten bezahlt wird. Bestimme die Zinsenbelastung und erstelle einen Tilgungsplan.

b) Berechne die Annuität, wenn der Kredit in nachschüssigen Monatsraten bezahlt wird. Vergleiche die Zinsenbelastung mit jener in a).

c) Berechne die Annuität, wenn der Kredit nicht in vier sondern in 10 nachschüssigen Jahresraten bezahlt wird. Vergleiche die Zinsenbelastung mit jener in a).

400 Für den Kauf eines Hauses nimmt jemand einen Kredit in der Höhe von 80 000 € auf. Der Kredit wird in monatlichen nachschüssigen Raten zurückgezahlt. (Laufzeit: 25 Jahre; Zinssatz: 7 %).

a) Berechne die Höhe der monatlichen Rückzahlungsrate.

b) Welcher Betrag an Nettozinsen fällt an?

c) Zehn Jahre nach der Kreditaufnahme macht der Kreditnehmer eine Erbschaft und zahlt die Restschuld sofort zurück. Berechne die Höhe der Restschuld.

401 Für den Verkauf eines Hauses werden dem Verkäufer zwei Angebote gemacht.

Angebot A: 70 000 € werden sofort bezahlt und eine Rate von 10 000 € wird jährlich 10 Jahre lang nachschüssig bezahlt.

Angebot B: Es wird sofort ein Betrag von 120 000 € bezahlt und eine Rate von 4 000 € halbjährlich 5 Jahre lang nachschüssig.

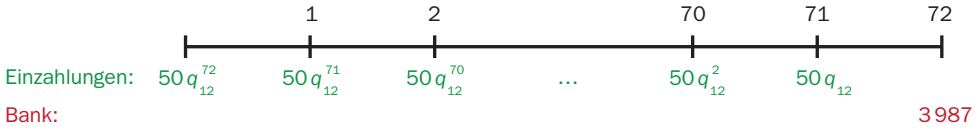
a) Welches der beiden Angebote ist für den Verkäufer finanziell günstiger? (Zinssatz jeweils 4 %)

b) Das Angebot A wird ersetzt durch ein finanziell gleichwertiges ohne Sofortzahlung, bei dem 10 nachschüssige gleiche Jahresraten bezahlt werden. Berechne die Höhe der Annuität und erstelle einen Tilgungsplan.

c) Das Angebot A wird ersetzt durch ein finanziell gleichwertiges, bei dem 20 nachschüssige gleiche Halbjahresraten bezahlt werden. Berechne die Höhe einer Rate und erkläre, warum die Zinsenbelastung im Vergleich zu b) niedriger ist.

402 Eine Bank wirbt mit folgender Sparform: Man zahlt 6 Jahre lang vorschüssige Monatsraten von je 50 € und bekommt nach Ablauf der 6 Jahre 3 987 €. Bestimme den effektiven Jahreszinssatz dieser Sparform.

Ausführung: Die 1. Einzahlung auf das Sparbuch passiert gleich zu Beginn. Sie wird 6 Jahre, also 72 Monate lang verzinst. Die 2. Einzahlung wird nach 1 Monat getätigt und wird 71 Monate lang verzinst, usw. Die letzte Einzahlung erfolgt 1 Monat bevor das angesparte Guthaben samt Zinsen fällig wird. Diese Einzahlungen (grün) besitzen denselben Wert wie die Auszahlung der Bank nach 6 Jahren (rot):



Nun gilt:

$$50\,q_{12} + 50\,q_{12}^2 + \ldots + 50\,q_{12}^{72} = 3\,987$$

$$50\,q_{12} \cdot \frac{1 - q_{12}^{72}}{1 - q_{12}} = 3\,987$$

72 Monate sind genau 6 Jahre.
Daher gilt:

$$50\,\sqrt[12]{q} \cdot \frac{1 - q^6}{1 - \sqrt[12]{q}} = 3\,987 \qquad | : 50$$

$$\sqrt[12]{q} \cdot \frac{1 - q^6}{1 - \sqrt[12]{q}} = 79{,}74$$

$$\sqrt[12]{q} \cdot \frac{1 - q^6}{1 - \sqrt[12]{q}} - 79{,}74 = 0 \quad (*) \ldots \text{ sh. Hinweis}$$

Die Unbekannte in Gleichung (*) ist der jährliche Aufzinsfaktor q. Wir verwenden die Regula Falsi, um diese Gleichung zu lösen (vergleiche Kapitel 2, Abschnitt 2.7). Als Startwerte eignen sich $q_1 = 1{,}01$ und $q_2 = 1{,}05$. Dies entspricht einem Zinssatz zwischen 1 % und 5 %.

Wir berechnen $\text{Rest}_1 = \sqrt[12]{1{,}01} \cdot \frac{1 - 1{,}01^6}{1 - \sqrt[12]{1{,}01}} - 79{,}74 \approx -5{,}5165$ und analog $\text{Rest}_2 \approx 4{,}0771$

und erhalten $q_3 = q_1 - \text{Rest}_1 \cdot \frac{q_1 - q_2}{\text{Rest}_1 - \text{Rest}_2} \approx 1{,}0330$ mit einem $\text{Rest}_3 \approx -0{,}1409$.

Ein weiterer Iterationsschritt liefert $q_4 = q_2 - \text{Rest}_2 \cdot \frac{q_2 - q_3}{\text{Rest}_2 - \text{Rest}_3} \approx 1{,}0336$.

$\text{Rest}_4 \approx -0{,}0034$ ist bereits sehr klein, ein weiterer Iterationsschritt daher nicht mehr notwendig.

Ergebnis: Der effektive Zinssatz der angebotenen Sparform beträgt ca. 3,4 %.

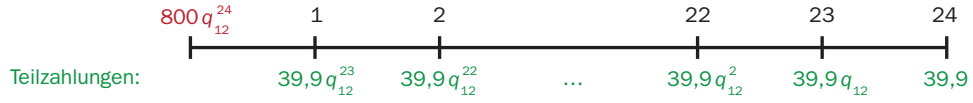
Die in Beispiel 402 auftretende Gleichung (*) muss nicht mit der Regula Falsi gelöst werden. Computeralgebrasysteme bieten dafür Lösungsbefehle (z. B. „Solve“).

Eine weitere Möglichkeit wäre, eine Funktion $f(q) = \sqrt[12]{q} \cdot \frac{1 - q^6}{1 - \sqrt[12]{q}}$ zu definieren und mit einer Wertetabelle q immer genauer zu bestimmen – nach Art einer Intervallschachtelung.

q	$f(q)$
1,03	78,88
1,04	81,31
1,033	79,60
1,034	79,84

403 Ein Computer im Wert von 1 000 € kann mit einer Anzahlung von 200 € und 24 nachschüssigen Monatsraten zu je 39,90 € bezahlt werden. Bestimme den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Teilzahlungsangebot zugrunde liegt.

Ausführung: Nach der erfolgten Anzahlung hat der Computer noch einen Wert von 800 €, das ergibt einen Endwert von $800\,q_{12}^{24}$ nach 24 Monaten. Dies muss gleich viel wert sein wie die Summe aller 24 Ratenzahlungen. Wir veranschaulichen dies auf einer Zeitleiste:



Nun gilt:
$$39{,}9 + 39{,}9\,q_{12} + 39{,}9\,q_{12}^2 + \ldots + 39{,}9\,q_{12}^{23} = 800\,q_{12}^{24}$$
$$39{,}9 \cdot \frac{1 - q_{12}^{24}}{1 - q_{12}} = 800\,q_{12}^{24}$$

24 Monate sind genau 2 Jahre. Daher gilt:
$$39{,}9 \cdot \frac{1 - q^2}{1 - \sqrt[12]{q}} = 800\,q^2 \qquad | : 39{,}9\,q^2$$
$$\frac{\frac{1}{q^2} - 1}{1 - \sqrt[12]{q}} = 20{,}0501$$
$$\frac{\frac{1}{q^2} - 1}{1 - \sqrt[12]{q}} - 20{,}0501 = 0$$

Wir lösen diese Gleichung mit der Regula Falsi. Als Startwerte eignen sich $q_1 = 1{,}05$ und $q_2 = 1{,}15$. Dies entspricht einem Zinssatz zwischen 5 % und 15 %.

Wir berechnen $\text{Rest}_1 = \frac{\frac{1}{1{,}05^2} - 1}{1 - \sqrt[12]{1{,}05}} - 20{,}0501 \approx 2{,}7696$ und $\text{Rest}_2 \approx 0{,}7658$ und erhalten $q_3 = q_1 - \text{Rest}_1 \cdot \frac{q_1 - q_2}{\text{Rest}_1 - \text{Rest}_2} \approx 1{,}1882$ mit einem $\text{Rest}_3 \approx 0{,}1030$.

Ein weiterer Iterationsschritt liefert $q_4 = q_2 - \text{Rest}_2 \cdot \frac{q_2 - q_3}{\text{Rest}_2 - \text{Rest}_3} \approx 1{,}1942$.

$\text{Rest}_4 \approx 0{,}0044$ ist bereits sehr klein, ein weiterer Iterationsschritt daher nicht mehr notwendig.

Ergebnis: Der effektive Zinssatz des Teilzahlungsangebotes beträgt ca. 19,4 %.

Aufgaben

404 Frau Karner hat 6 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 1 200 € auf ein Bausparkonto eingezahlt. Nach Ablauf der 6 Jahre bekommt sie 8 305 € ausbezahlt. Welcher effektive Zinssatz ergibt sich?

405 Die Bank bietet einen Kredit von 5 000 € an, zu zahlen in 5 Jahresraten zu je 1 200 €. Welchem effektiven Jahreszinssatz entspricht dieses Angebot?

406 Eine Bank wirbt mit folgender Sparform: Man zahlt 6 Jahre lang vorschüssige Monatsraten von je 30 € und bekommt nach Ablauf der 6 Jahre 2 392 €. Bestimme den effektiven Jahreszinssatz dieser Sparform.

407 Eine Sitzgarnitur im Wert von 4 000 € kann mit einer Anzahlung von 800 € und 36 nachschüssigen Monatsraten zu je 115,70 € bezahlt werden. Bestimme den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Teilzahlungsangebot zugrunde liegt.

408 Herr Huber zahlt ein Darlehen von 70 000 € in 240 Monatsraten zu je 597,70 € zurück. Welcher effektive Zinssatz liegt diesem Darlehen zugrunde?

409 Bei einer Kaufsumme von 7 500 € wird eine Anzahlung von 2 000 € geleistet und anschließend 48 Monatsraten zu je 126 € bezahlt. Berechne den effektiven Zinssatz bei dieser Zahlungsform?

3.9 Die Zahl e

Ein besonderes finanzmathematisches Problem geht auf *Jakob Bernoulli* (1654–1705) zurück: *Das Problem der stetigen Verzinsung*. Bernoulli wollte wissen, wie sich immer kleiner werdende Verzinsungsperioden auf das Endkapital auswirken.

Stellen wir uns vor, wir finden eine Bank, die 100 % Zinsen gibt: nach einem Jahr werden aus einem Euro zwei Euro. Dessen nicht genug wollen wir die Geschäftsbedingungen ausreizen und heben nach einem halben Jahr den bis dahin angelaufenen Betrag (das sind mit Zinsen 1,5 €) ab und legen ihn sofort wieder ein. Dann bekommen wir für das verbleibende halbe Jahr noch 50 % Zinsen für 1,5 €, also $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ €. Würden wir vierteljährlich neu anlegen, wüchse unser Euro um das $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 = 2{,}44$-fache. Verfolgen wir diese Idee weiter, so erreicht das Endkapital bei …

…	ganzjähriger Verzinsung:	$(1 + 1) = 2$
	halbjährlicher Verzinsung:	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$
	vierteljährlicher Verzinsung:	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44140625$
	monatlicher Verzinsung:	$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613035290\ldots$
	täglicher Verzinsung:	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714567481\ldots$
	stündlicher Verzinsung:	$\left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2{,}718126691\ldots$

Der Betrag wächst – auch wenn wir die Anzahl der Verzinsungperioden noch so weit steigern – nicht unbegrenzt an. Dass er im Grenzwert tatsächlich eine eindeutig bestimmte reelle Zahl ergibt, lässt sich durch Intervallschachtelung begründen: Aufgabe 410 gibt eine monoton wachsende Folge $\langle a_n \rangle$ linker Intervallgrenzen an, 413 eine monoton fallende Folge $\langle b_n \rangle$ rechter Intervallgrenzen. 414 zeigt, dass die Intervallbreiten $\langle c_n \rangle$ eine Nullfolge bilden. Genau so werden in Abschnitt 3.5 reelle Zahlen definiert.

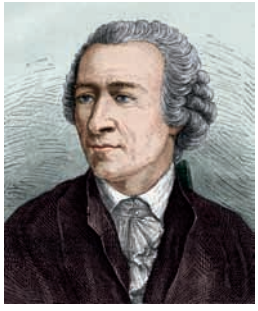
Definition: Die Zahl $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045$ … heißt *eulersche Zahl*.

Bemerkungen:

(1) Die eulersche Zahl e ist – gleich nach der Kreiszahl π – eine der wichtigsten Konstanten in der höheren Mathematik. Sie ist irrational, also nicht als Bruch darstellbar.

(2) Die eulersche Zahl ist aber „noch irrationaler“ als $\sqrt{2}$. Sie lässt sich nämlich weder durch Wurzelausdrücke noch als Lösung einer quadratischen, kubischen, … Gleichung angeben. Solche Zahlen übersteigen gleichsam die Kräfte der Algebra[1] und heißen *transzendente Zahlen*.

(3) Viel rascher als mit dem obigen Grenzwert lässt sich e näherungsweise aus der Reihendarstellung $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ berechnen.



Leonhard Euler (1707–1783)

Der natürliche Logarithmus

Exponentielles Wachstum mit der Basis e spielt in der Natur eine besonders große Rolle. Folglich ist auch die Umkehrfunktion, der Logarithmus zur Basis e, sehr wichtig. Er hat sogar einen eigenen Namen: *logarithmus naturalis*. In der Schulmathematik und auf dem TR gibt es für ihn ein eigenes Formelzeichen ln.

Definition: Der Logarithmus $\ln(x) = {}^e\log(x)$ wird als *natürlicher Logarithmus* bezeichnet.

Es gilt damit: $\ln(e) = 1$, weil $e^1 = e$ ist.

[1] *quod Algebrae vires transcendit* schreibt der Mathematiker und Philosoph *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) und meint damit Ergebnisse, die nur durch Grenzwerte unendlicher Folgen gefunden werden können.

410 Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3\ldots$ streng monoton wachsend ist.

Ausführung: Wir verwenden als Hilfsresultat die Gleichung $\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (siehe Aufgabe 412) und formen damit den Ausdruck für a_n so um, dass a_{n-1} auftritt:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right]^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Wenn der Faktor $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ immer > 1 ist, dann ist die Folge streng monoton wachsend.
Um das zu zeigen, verwenden wir als weiteres Hilfsresultat die für alle $a \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ geltende Bernoullische Ungleichung $(1 - a)^n \geqslant 1 - na$ (siehe Aufgabe 431).

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} - \frac{n-1}{n^3} = 1 + \frac{1}{n^3} > 1$$

Ergebnis: Jedes Folgenglied wächst relativ zum vorhergehenden um einen Faktor > 1, daher wächst die Folge streng monoton.

Die Aufgaben 410 bis 414 sollen schrittweise aufbauend zeigen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tatsächlich existiert.

Aufgaben

411 Berechne die Folgenglieder für $n = 1$ bis 10, sowie $n \in \{100, 101, 1000, 1001\}$. Stelle Vermutungen zu Monotonieverhalten und Schranken der Folge auf.

a) $\langle a_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **b)** $\langle b_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

c) $\langle c_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

412 Zeige durch Ausrechnen die Gültigkeit:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) : \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)$

413 **a)** Verwende 412 b) und zeige, dass die Folge $\langle b_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ für $n = 1, 2, 3\ldots$ monoton fallend ist.

b) Begründe: Jedes Folgenglied b_n ist eine obere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

414 Zeige: Die Folge $\langle c_n \rangle = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) ist streng monoton fallend.

b) hat 0 als Grenzwert.

415 Berechne die folgenden Logarithmen:

a) $\ln e^2$ **b)** $\ln e^5$ **c)** $\ln e^{\frac{1}{2}}$

d) $\ln 0$ **e)** $\ln 1$ **f)** $\ln \frac{1}{e}$

416 Bestimme mit dem Taschenrechner:

a) $\ln 2$ **b)** $\ln 0{,}5$

c) $\ln \sqrt{2}$ **d)** $\ln 2{,}71828$

e) $\ln 20{,}08554$ **f)** $\ln 0{,}36788$

417 Wie lassen sich (1) mit dem Taschenrechner (2) mit einem Computeralgebrasystem

a) Potenzen von e berechnen?

b) natürliche Logarithmen berechnen?

418 Ein Logarithmus zur Basis a lässt sich immer mithilfe des natürlichen Logarithmus berechnen:

$$^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Erklärt, warum die folgende Argumentationskette diese Formel beweist.

$$x = a^{^a\log x} \Rightarrow \ln x = \ln\left(a^{^a\log x}\right) = {}^a\log x \cdot \ln a$$
$$\Rightarrow {}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

419 Entwickle mit deinem Rechenhilfsmittel eine Funktion, die in der Lage ist, Logarithmen mit beliebiger Basis durch Verwendung des natürlichen Logarithmus zu berechnen.

Hinweis: Verwende dazu die Beziehungen aus dem vorhergehenden Beispiel.

3.10 Vollständige Induktion E

Die vollständige Induktion ist eine der drei grundlegenden mathematischen Beweistechniken (neben „direkt“ und „indirekt durch Widerspruch“). Sie läuft in zwei Schritten ab:

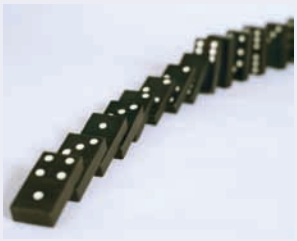
(1) *Induktionsstart:* Du zeigst, dass die Aussage (zumeist eine Formel) für ein bestimmtes n richtig ist (meist nimmt man 0 oder 1 dafür).

(2) *Induktionsschluss:* Du zeigst, dass die Aussage auch für $n + 1$ stimmt, wenn sie für n richtig ist.

Mit diesen zwei Schritten hast du gezeigt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig ist!

G

Grundvorstellung: Denke dir eine Reihe von Dominosteinen. Für jede natürliche Zahl soll genau ein Dominostein aufgestellt sein und das (in deiner Vorstellung) ohne Ende! Wir wissen nun: Damit das Fallen der Dominosteine in Gang kommt, müssen wir dafür sorgen, dass der erste Stein (oder auch ein anderer aus der Reihe) fällt (Induktionsstart). Fällt ein (beliebiger) Stein n, so fällt der nächste $n + 1$. Und dann wieder der nächste und der nächste (Induktionsschluss). Damit ist alles getan: Es werden nun alle Steine fallen.



420 Zeige mithilfe der vollständigen Induktion: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Ausführung:

(1) *Induktionsstart:* Wir zeigen zuerst, dass die Behauptung für $n = 1$ richtig ist. Das ist natürlich sehr einfach! $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, also $1 = 1$, stimmt!

(2) *Induktionsschluss:* Nun zeigen wir, dass die Behauptung auch für $n + 1$ richtig bleibt, wenn sie für n richtig ist. Für ein konkretes n (nämlich für $n = 1$) haben wir dies gerade überprüft.

Annahme: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Voraussetzung: Wir wollen zeigen, dass die Formel auch für $n + 1$ stimmt. Ersetze daher in der Summenformel n durch $n + 1$. Das ergibt die zu beweisende

Behauptung: $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

Der erste (bisher bekannte) Teil der Summe ergibt – laut Voraussetzung – $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Dies können wir bei der Berechnung der neuen Summe nützen:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Damit haben wir nun gezeigt, dass die Behauptung für jedes beliebige n, damit aber für alle natürlichen Zahlen gilt!

Bemerkungen:

(1) Die vollständige Induktion liefert keinen Hinweis darauf, wie eine Summenformel aussieht. Eine Vermutung, welche Gestalt sie hat, muss auf anderem Wege gewonnen werden. Die Beweistechnik der vollständigen Induktion dient dann („lediglich“) zum Nachweis, ob derartige Vermutungen richtig sind.

(2) Die vollständige Induktion kommt vor allem bei allen Behauptungen zum Einsatz, in denen natürliche Zahlen auftreten.

Aufgaben

421 Zeige mithilfe der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

b) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$

c) $1 + 5 + 8 + \ldots + (4n - 3) = n \cdot (2n - 1)$

d) $1 + 6 + 11 + \ldots + (5n - 4) = \frac{n \cdot (5n - 3)}{2}$

422 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$

b) $1 - 4 + 9 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \cdot (n + 1)}{2}$

c) $1 + 9 + 25 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n \cdot (2n - 1) \cdot (2n + 1)}{3}$

423 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$

b) $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)^2$

424 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

b) $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, sofern $q \neq 1$

425 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

426 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}^*$:

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \ldots + (2n - 1)(2n) = \frac{n(n + 1)(4n - 1)}{3}$

427 Zeige die folgenden Teilbarkeitsbehauptungen ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) $3 \mid (n^3 + 2n)$

b) $6 \mid (n^3 - n)$

c) $3 \mid (n^3 + 6n^2 + 14n)$

428 Gegeben ist eine Menge mit n Elementen. Zeige, dass sich daraus genau 2^n Teilmengen bilden lassen!

429 *Geometrie:* Für die Anzahl der Diagonalen $d(n)$ in einem n-Eck gilt:

$d(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$ $\quad (n \geq 4$ und $n \in \mathbb{N})$

430 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $2^n > n$

431 Zeige die Bernoullische Ungleichung!
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $(1 + a)^n \geq 1 + na$ für alle $a \geq -1$

b) $(1 - a)^n \geq 1 - na$ für alle $a \leq 1$

Hinweis:

Diese Gleichung ist nach dem schweizerischen Mathematiker *Jakob Bernoulli* (1654–1705) benannt.

432 Diskutiert die folgende Aussage und ihre Widerlegung!

Aussage: Die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion ist unmöglich, da es unendlich lange dauern würde, den Induktionsschluss für alle $n \in \mathbb{N}$ auszuführen.

Widerlegung: Die Formulierung „für alle n“ scheint das nahezulegen, aber es ist nicht so. Wenn eine Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen ist, dann zeigt der Induktionsbeweis, wie aus vorausgesetztem $A(n)$ die Gültigkeit für $A(n + 1)$ folgt. Niemand wird jemals den Induktionsschritt unendlich oft anwenden. Die Zeit können wir uns sparen, denn:

Die durch vollständige Induktion gewonnenen Formeln und Ergebnisse gelten für jeweils feste *aber beliebige* natürliche Zahlen n.

433 Was ist falsch an dieser (nicht ernst gemeinten) Anwendung der vollständigen Induktion?

Behauptung: In einen Koffer passen unendlich viele Paar Socken.

Beweis: (Induktionsstart $n = 1$) In einen Koffer passt sicher ein Paar Socken.

(Induktionsschluss $n \to n + 1$) Im Koffer sind n Paar Socken. Alle, die schon einmal einen Koffer gepackt haben, wissen, dass ein zusätzliches Paar immer noch Platz findet. Also sind dann $n + 1$ Paar im Koffer.

Vermischte Aufgaben

434 Berechne die ersten fünf Glieder der Folge und beweise mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass sie eine Nullfolge ist. Vermute auch, welches Monotonieverhalten vorliegt und beweise deine Vermutung!

a) $\frac{6}{2n+1}$ **b)** $\frac{12}{4n+1}$ **c)** $\frac{10}{5n+2}$

435 Berechne den Grenzwert der Folge und führe anschließend den Beweis mithilfe der Definition des Grenzwertes. Beweise, dass die Folge beschränkt ist.

a) $a_n = \frac{4n-7}{3n+2}$ **b)** $a_n = \frac{3n+5}{4n-3}$

c) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$ **d)** $a_n = \frac{5n+1}{3n-2}$

436 Bestimme den Grenzwert der Folge. Ab welchem Folgenindex n liegen alle späteren Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwerts für $\varepsilon = 0{,}01$?

a) $a_n = \frac{5n+7}{2n-1}$ **b)** $a_n = \frac{3n-2}{2n+1}$

c) $a_n = \frac{1-7n}{2n+3}$ **d)** $a_n = \frac{1-8n}{2n+5}$

437 Berechne die ersten drei Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ und berechne den Grenzwert.

a) $a_1 = 0{,}3;\quad a_{n+1} = -2a_n^2 + 2a_n$

b) $a_1 = 0{,}5;\quad a_{n+1} = -2a_n^2 + 2a_n$

c) $a_1 = 1;\quad a_{n+1} = 2a_n - 0{,}5a_n^2$

d) $a_1 = 2;\quad a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{32}a_n^2$

438 Entscheide, ob eine arithmetische oder geometrische Folge vorliegt und berechne a_4 bis a_8.

a) $a_1 = 1;\quad a_2 = 0{,}5;\quad a_3 = 0{,}25$

b) $a_1 = 1;\quad a_2 = 0{,}5;\quad a_3 = 0$

c) $a_1 = 0{,}8;\quad a_2 = 1;\quad a_3 = 1{,}25$

439 Von einer arithmetischen Folge kennt man

a) $a_9 = 11$ und $a_{24} = 39$. Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der Folge.

b) $a_7 = 12$ und $a_{22} = 30$. Berechne die Summe der ersten 60 Glieder der Folge.

440 Untersuche, ob die angegebenen Folgenglieder Teil einer arithmetischen Folge sein können!

a) $a_1 = 2;\quad a_{15} = 23;\quad a_{36} = 50$

b) $a_1 = 1;\quad a_{28} = 19;\quad a_{40} = 27$

c) $a_5 = 7;\quad a_{21} = 47;\quad a_{35} = 82$

d) $a_7 = 5;\quad a_{15} = 23;\quad a_{37} = 50$

441 Entscheide, ob eine arithmetische oder geometrische Reihe vorliegt und berechne:

a) $32 + 24 + 16 + \ldots + (-16)$

b) $0{,}05 + 0{,}25 + 1{,}25 + \ldots + 31{,}25$

c) $32 - 16 + 8 - \ldots + 0{,}5$

d) $0{,}05 + 0{,}25 + 0{,}45 + \ldots + 31{,}25$

442 Welche Bedingung muss für die jeweilige Variable gelten, damit die Ausdrücke (als „Summe“) sinnvoll sind? Gib eine Formel für die Summe an!

a) $2 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + \ldots$

b) $-y - y^2 - y^3 - y^4 - \ldots$

c) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \ldots$

443 Stelle die folgenden Funktionsterme als unendliche Summen dar und entscheide, unter welchen Bedingungen das sinnvoll ist:

a) $f(x) = \frac{2}{1-x}$ **b)** $f(x) = \frac{2x}{1-2x}$

c) $f(x) = x - \frac{x}{1-2x}$ **d)** $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

444 Entscheide, ob die unendliche geometrische Reihe einen Grenzwert besitzt. Falls ja, berechne ihn!

a) $125 + 100 + 80 + \ldots$

b) $40 + 42 + 44{,}1 + \ldots$

c) $32 - 16 + 8 - \ldots$

445 Der Physiker *Galileo Galilei* entdeckte folgenden Zusammenhang:

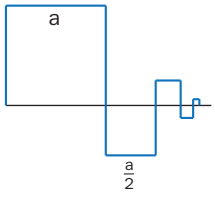
$$\frac{1+3}{5+7} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5+9}{11+13+15+17} = \frac{1}{3}$$

Überprüfe diese drei Beziehungen. Stelle für die Zählersumme und die Nennersumme eine allgemeine Summenformel auf und beweise so den Zusammenhang allgemein.

446 Eine eckige „Wellenlinie“ entsteht dadurch, dass Quadrate aneinander gehängt werden. Das erste Quadrat besitzt eine Seitenlänge von 4 cm, die Seitenlänge des jeweils nächsten ist die Hälfte des vorangehenden.



a) Gib eine rekursive und eine explizite Darstellung der Länge der Haken an.

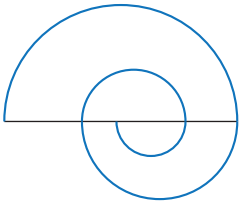
b) Ermittle die Summe der Länge der ersten 5, 10 und n Haken.

c) Ermittle die Gesamtlänge der Linie.

d) Ermittle die Summe der Flächen der ersten 5, 10 und n Quadrate.

e) Ermittle die Gesamtfläche aller Quadrate.

447 Eine Spirale entsteht dadurch, dass an einen Halbkreis wieder ein Halbkreis angehängt wird. Der erste Halbkreis besitzt einen Radius von 3 cm, der Radius des jeweils nächsten ist $\frac{2}{3}$ vom Radius des vorangehenden.



a) Gib eine rekursive und eine explizite Darstellung der Länge der Bögen an.

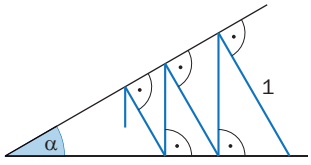
b) Ermittle die Summe der Länge der ersten 5, 10 und n Bögen.

c) Ermittle die Gesamtlänge der Spirale.

d) Ermittle die Summe der Flächen der ersten 5, 10 und n Halbkreise.

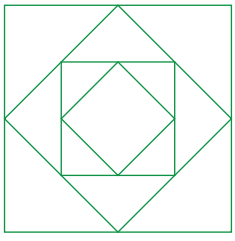
e) Ermittle die Gesamtfläche aller Halbkreise.

448 Eine Zickzacklinie entsteht durch Ziehen von Strecken, die abwechselnd normal auf die Schenkel eines Winkels von **a)** $\alpha = 30°$, **b)** $\alpha = 45°$, **c)** $\alpha = 60°$ sind.



Ermittle die Gesamtlänge des Streckenzugs.

449 In einem Quadrat mit der Seitenlänge s werden die Seitenhalbierungspunkte durch Strecken verbunden. Dadurch entsteht wieder ein Quadrat. In dieses wird auf gleiche Weise ein weiteres Quadrat gezeichnet und so fort.

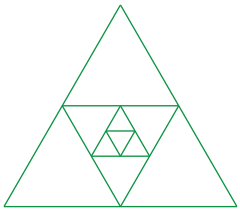


Ermittle die Summe

a) der Umfänge,

b) der Flächeninhalte aller Quadrate.

450 In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a werden die Seitenhalbierungspunkte durch Strecken verbunden. Dadurch entsteht wieder ein gleichseitiges Dreieck. In dieses wird auf die gleiche Weise ein weiteres Dreieck gezeichnet und so fort.

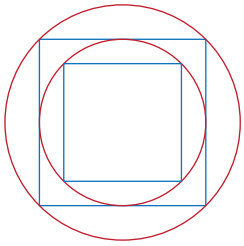


Ermittle die Summe

a) der Umfänge,

b) der Flächeninhalte aller gleichseitigen Dreiecke.

451 Einem Kreis mit Radius 10 cm wird ein Quadrat eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis, diesem wieder ein Quadrat usw.



Wie groß ist die Summe

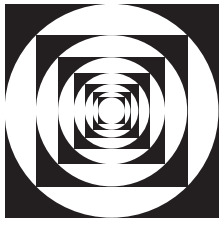
a) der Umfänge aller Kreise?

b) der Umfänge aller Quadrate?

c) der Flächeninhalte aller Kreise?

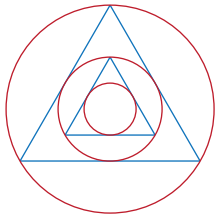
d) der Flächeninhalte aller Quadrate?

452 In der Abbildung wurde dem äußersten Quadrat ein Kreis maximaler Größe eingeschrieben. Diesem Kreis wiederum ein Quadrat, diesem wieder ein Kreis und so weiter.



Wie viel Prozent der Fläche des äußersten Quadrates machen die (unendlich vielen) schwarzen Flächen aus?

453 Einem Kreis mit Radius 2 cm wird ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis, diesem wieder ein gleichseitiges Dreieck usw.



Wie groß ist die Summe

a) der Flächeninhalte aller Dreiecke?

b) der Flächeninhalte aller Kreise?

c) der Umfänge aller Dreiecke?

d) der Umfänge aller Kreise?

454 Einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenusenlänge $c = 5$ cm wird ein auf der Spitze stehendes gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck eingeschrieben, diesem wieder ein ebensolches usw.

a) Wie groß ist die Summe aller Flächeninhalte der entstehenden Dreiecke?

b) Wie groß ist die Summe aller Umfänge der entstehenden Dreiecke?

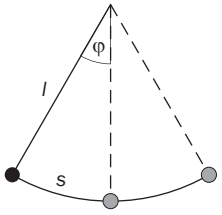
455 Jemand versendet ein E-Mail, das vor einem gefährlichen Virus warnt, mit der Aufforderung es innerhalb eines Tages an fünf Bekannte weiterzuschicken.

a) Begründe, dass eine geometrische Folge vorliegt.

b) Gib den allgemeinen Folgenterm an und bestimme b_{10}. Welche unrealistischen Annahmen werden hier gemacht?

c) Wie viele Leute haben innerhalb von 10 Tagen die Viruswarnung, die selbst den Charakter eines Spams hat, erhalten?

456 Ein Fadenpendel hat eine Länge von 80 cm und wird um 20° von der Vertikalen ausgelenkt. Bei jedem Schwingungsvorgang (= Hin- und Hergang) nimmt die Auslenkung um 10 % des ursprünglichen Wertes ab.



a) Gib eine rekursive und eine explizite Darstellung der einzelnen Auslenkungen an.

b) Welchen Weg legt der Pendelkörper bei den ersten 5, 10 und n Schwingungen zurück?

c) Welchen Gesamtweg legt der Pendelkörper zurück?

457 Ein Klavier, das pro Oktave 12 verschiedene Halbtöne erzeugen kann, lässt sich nicht so stimmen, dass es in allen Tonarten absolut reine Intervalle hervorbringt. Bei einem „wohltemperierten Klavier“ besteht eine Oktave (Frequenzverhältnis 1 : 2) aus 12 gleichen Halbtonintervallen, d.h. die Frequenzen der Intervalle vom Grundton aus verhalten sich wie:

$$1 : q : q^2 : \ldots : q^{12}$$

a) Berechne das Frequenzverhältnis $1 : q$ eines Halbtons.

b) Gib eine explizite Darstellung für die Folge der Frequenzen der Oktave an, die auf dem Kammerton $a^1 = 440$ Hz aufbaut.

c) Eine Quinte setzt sich aus 7 Halbtonintervallen zusammen. Berechne das Frequenzverhältnis einer wohltemperierten Quinte und vergleiche mit dem Verhältnis 2 : 3 einer reinen Quinte.

458 Ein DIN-A0-Blatt besitzt eine Fläche von 1 m^2. Die DIN-A1, -A2, -A3, ... gehen durch Halbierung der Fläche aus dem jeweils vorangehenden Format hervor. Dabei ist zu beachten, dass die Blätter einander ähnlich sind, d. h. die Breite des nächsten Formats ist die Länge des vorhergehenden.

a) Gib das Bildungsgesetz A_n der Flächeninhalte des n-ten DIN-A-Formats an!

b) In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen eines DIN-A-Formats?

c) Gib die Bildungsgesetze l_n, b_n für Längen und Breiten des n-ten DIN-A-Formats an.

d) Berechne die Längen und Breiten von DIN-A0 bis DIN-A8 und kontrolliere durch Berechnung der entsprechenden Flächeninhalte.

459 Bei einem Glücksspiel setzt ein Spieler zunächst 100 €. Verliert er, so setzt er jeweils $\frac{3}{4}$ seines letzten Einsatzes.

a) Wie hoch ist sein Einsatz beim n-ten Spiel, wenn er zuvor stets verloren hat?

b) Wie hoch ist die Gesamtsumme, die er verloren hat, wenn er auch im n-ten Spiel verliert?

460 Ein Glücksspieler setzt im Roulette immer auf Rot. Kommt die Farbe Rot, so erhält er genau seinen Einsatz als Gewinn, andernfalls ist sein Einsatz verloren. Er beginnt dabei mit 5 €. Verliert er, so verdoppelt er im nächsten Spiel seinen Einsatz.

a) Wie hoch ist sein Einsatz im n-ten Spiel, wenn er zuvor stets verloren hat?

b) Wie hoch ist die Gesamtsumme, die er verloren hat, wenn er auch im n-ten Spiel verliert?

c) Was bleibt ihm nach Abzug seiner Einsätze übrig, wenn er im n-ten Spiel gewinnen sollte?

Finanzmathematik

461 Vergleiche die Angebote für den Kauf eines Hauses:

A bietet sofort 60 000 € und 24 Mal 8 000 € halbjährlich (nachschüssig).

B bietet sofort 50 000 € und 40 Mal 5 000 € vierteljährlich (nachschüssig).

Berechne die Barwerte der beiden Angebote bei einem Zinssatz von 6 % jährlich.

462 Ein Notebook kostet bei Sofortzahlung 1 299 € oder 206 € Anzahlung und 48 Monatsraten zu je 30 € . Welcher effektive Zinssatz steht hinter dem Teilzahlungsangebot?

463 Eine Gemeinde möchte ein Grundstück im Wert von 89 500 € erwerben. Die Gemeinde überlegt folgende Finanzierungsmöglichkeiten:

(1) 4 nachschüssige Jahresraten an den Besitzer zu je 25 000 €. Berechne den effektiven Jahreszinssatz dieser Finanzierungsform.

(2) Ein Bankkredit mit einem Zinssatz von 7 % und einer Laufzeit von 3 Jahren. Berechne die monatliche Annuität und die anfallenden Zinszahlungen.

Vergleiche die beiden Finanzierungsmöglichkeiten und gib eine begründete Empfehlung für den Gemeinderat.

464 Ein Kapital von 20 000 € wird 15 Jahre angelegt.
Zuerst liegt es 5 Jahre lang zu 8 % p. a., dann 3 Jahre zu 6,5 % p. a., 4 Jahre zu 6 % p. a., 2 Jahre zu 5 % p. a. und das letzte Jahr zu 3,5 %.

a) Berechne den Endwert des angelegten Kapitals!

b) Welchen stabilen Jahreszinssatz hätte die Bank anbieten müssen, damit sich derselbe Endwert ergibt?

465 Eine Wohnzimmereinrichtung kostet 11 000 €.

a) Die Firma macht folgendes Teilzahlungangebot: Anzahlung 7 200 € und 12 Monatsraten zu je 349 €. Berechne den effektiven Zinssatz dieses Angebots!

b) Wie hoch ist die monatliche Rückzahlungsrate, wenn die Wohnzimmereinrichtung mithilfe eines Kredits finanziert wird, der mit 12 % verzinst ist und innerhalb von zwei Jahren zurückgezahlt wird?

c) Wie viele Monatsraten sind notwendig, wenn monatlich maximal 300 € zurückgezahlt werden können und der Kredit mit 12 % verzinst ist? Wie hoch ist eine Rückzahlungsrate?

466 **Achilles und die Schildkröte**

Auf *Zenon von Elea*, einen griechischen Philosophen im 5. Jh. v. Chr., geht folgendes Paradoxon zurück. Zenon will zeigen, dass unsere naive Vorstellung von Bewegung nicht zutreffen kann.

Achilles tritt zum Wettlauf gegen eine Schildkröte an. Großzügig gewährt er ihr 100 Schritte Vorsprung. Achilles läuft zehnmal schneller als die Schildkröte, und doch kann er sie nicht einholen: Rasch legt er die 100 Schritte Vorsprung zurück, aber die Schildkröte ist inzwischen zehn Schritte weitergekrochen. Achilles läuft zehn Schritte, die Schildkröte einen und hat immer noch Vorsprung. Achilles macht einen Schritt, aber die Schildkröte bleibt einen Zehntelschritt voraus. Immer wenn Achilles den Punkt erreicht, wo die Schildkröte gerade war, ist sie schon wieder ein winzig kleines Stück weiter. Er kann sie nicht einholen.

Diese Schlussfolgerung ist absurd, doch in einer Hinsicht hat Zenon recht: Um die Schildkröte einzuholen, muss Achilles den Weg

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$$

zurücklegen. Jede endliche Anzahl von Summanden wäre immer kleiner als s.

Doch das Paradoxon (= vermeintlicher Widerspruch) löst sich auf, wenn wir mit Reihen argumentieren.

a) Bestimme den Weg, den Achilles zurücklegt, bis er gleichauf ist!

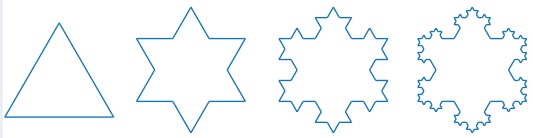
b) Dass Achilles genau zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft, ist sehr unwahrscheinlich. Formuliere den Weg von Achilles, wenn er *k*-mal so schnell ist wie die Schildkröte (bei gleichem Vorsprung s)!

c) Wie würdest du die Aufgabe ohne Reihen lösen?

Hinweis: Nimm an, dass v_S die Geschwindigkeit der Schildkröte ist und v_A die Geschindigkeit von Achill und somit gilt: $v_A = k \cdot v_S$. Setze eine entsprechende Gleichung an!

Fraktale

467 Schneeflockenkurve



Die jeweils neuen Zacken sollen im mittleren Drittel der Seitenlinie ansetzen. Nimm an, dass die Seitenlänge $s = 1$ sei!

a) Berechne den Umfang der 1., 2. und 3. Schneeflockenkurve.

b) Berechne den Umfang der n-ten Schneeflockenkurve.

c) Zeige, was passiert, wenn $n \to \infty$ geht.

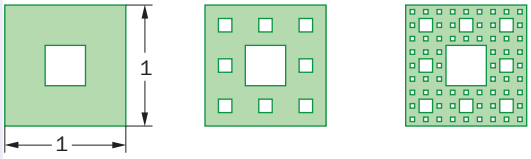
d) Berechne den Flächeninhalt der 1., 2. und 3. Schneeflockenkurve.

e) Berechne den Flächeninhalt der n-ten Schneeflockenkurve.

f) Zeige, was passiert, wenn $n \to \infty$ geht.

g) Kann eine endliche Fläche einen unendlichen Umfang besitzen?

468 Sierpinski-Teppich



Aus einem Einheitsquadrat wird ein quadratisches Stück mit einer Seitenlänge von $\frac{1}{3}$ herausgeschnitten. Das verbleibende Stück wird in acht Teilquadrate unterteilt und aus jedem einzelnen wird wieder jeweils ein quadratisches Stück herausgeschnitten usw. Durch diesen Prozess entsteht eine Folge $\langle A_n \rangle$ von lückenhaften Flächen.

a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des 1., 2. und 3. Teppichstücks.

b) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des n-ten Flächenstücks.

c) Zeige, dass die Folge der Flächeninhalte $\langle A_n \rangle$ gegen 0 konvergiert.

d) Zeige, dass die Folge der Umfänge $\langle u_n \rangle$ divergiert, also über alle Grenzen wächst.

e) Kann es eine Figur mit Flächeninhalt null und unendlich großem Umfang geben?

Summenzeichen

469

Eine Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ kannst du kürzer in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

schreiben. Das Zeichen $\sum$ (Sigma) steht dabei für die Summe (lies: „Summe aller a_k von 1 bis n“). Die Summe der ersten 10 Quadratzahlen lässt sich dann z. B. so anschreiben:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$$

Liegt eine unendliche Reihe vor, so kannst du schreiben: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

470

Schreibe mithilfe des Summenzeichens $\sum$:

a) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{10}$

b) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^9$

c) $2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 9 \cdot 2^9$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

e) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

f) $3 + 12 + 48 + 192 + \ldots$

471

Berechne folgende arithmetische bzw. geometrische Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{100} k$ **b)** $\sum_{k=1}^{100} (2k - 1)$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ **d)** $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k}$

472

Berechne folgende geometrische Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{10} 0{,}2^k$ **b)** $\sum_{k=1}^{8} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

c) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ **d)** $\sum_{k=5}^{15} \left(\sqrt{2}\right)^k$

Hinweis: Achte auf den richtigen Startwert!

Umwandeln einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch

Periodische Dezimalzahlen können als unendliche geometrische Reihen aufgefasst werden, z. B.: $0{,}\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \ldots$

mit $b_1 = \frac{3}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$.

473

Verwandle mithilfe der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe in einen Bruch:

a) $0{,}\dot{2}$ **b)** $0{,}\dot{7}$ **c)** $1{,}\dot{5}$

d) $0{,}\overline{25}$ **e)** $0{,}\overline{90}$ **f)** $0{,}\overline{909}$

474

Begründe mithilfe der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe, warum $0{,}\dot{9} = 1$ ist.

Sprache der Mathematik

475 **Thema reelle Zahlenfolgen – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. Folge der Quadratzahlen in expliziter Darstellung	☐ $b_n = 3^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$
2. Folge der geraden Zahlen in rekursiver Darstellung	☐ $b_{n+1} = b_n \cdot 2,\ b_1 = 2$
3. Folge der Dreierpotenzen in expliziter Darstellung	☐ $a_n = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}^*$
4. Folge der Zweierpotenzen in rekursiver Darstellung	☐ $b_{n+1} = b_n + 2,\ b_1 = 0$

476 **Thema Eigenschaften von Zahlenfolgen – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. eine streng monoton wachsende Zahlenfolge	☐ $a_{n+1} > a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
2. eine monoton fallende Zahlenfolge	☐ $a_{n+1} \leqslant a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
3. eine konstante Zahlenfolge	☐ $a_{n+1} \cdot a_n < 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
4. eine alternierende Zahlenfolge	☐ $a_n \leqslant S$ für ein $S \in \mathbb{R}$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$
5. eine nach oben beschränkte Folge	☐ $\exists\, a_n > S$, für beliebige $S \in \mathbb{R}$
6. eine unbeschränkte Folge	☐ $a_{n+1} = a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

477 **Thema Grenzwerte – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. Der Grenzwert einer Folge ist null.	☐ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. Alle Folgenglieder ab einem n_0 kommen dem Grenzwert beliebig nahe.	☐ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$
3. Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.	☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
4. Die Reihe der Stammbrüche ist divergent.	☐ $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon\ ,\ \forall\, n > n_0$ und $\varepsilon > 0$

478 **Thema arithmetische und geometrische Folgen – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. eine arithmetische Folge in expliziter Darstellung	☐ $b_{n+1} = b_n \cdot q$
2. eine arithmetische Folge in rekursiver Darstellung	☐ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
3. eine geometrische Folge in expliziter Darstellung	☐ $a_{n+1} = a_n + k$
4. eine geometrische Folge in rekursiver Darstellung	☐ $a_n = k \cdot n + a_0$

479 **Thema arithmetische und geometrische Reihen – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe	☐ $b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$
2. die Summe einer endlichen geometrischen Reihe	☐ $\frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$
3. die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe	☐ $b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

480 **Thema Finanzmathematik – Ordne richtig zu!**

Verbale Beschreibung	Formale Beschreibung
1. der jährliche Aufzinsfaktor bei einem Jahreszinssatz von p	☐ $\sqrt[12]{q}$
2. der äquivalente monatliche Aufzinsfaktor	☐ $q = 1 + \frac{p}{100}$
3. der Wachstumsfaktor der stetigen Verzinsung	☐ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Fibonacci

Kaninchenvermehrung

Die folgende Aufgabe geht zurück auf den italienischen Rechenmeister *Leonardo da Pisa* (ca. 1180–1241, genannt *Fibonacci*, was so viel heißt wie „Sohn des Bonacci“). Sie stammt aus seinem 1202 erschienenen Buch *„Liber Abaci“*.

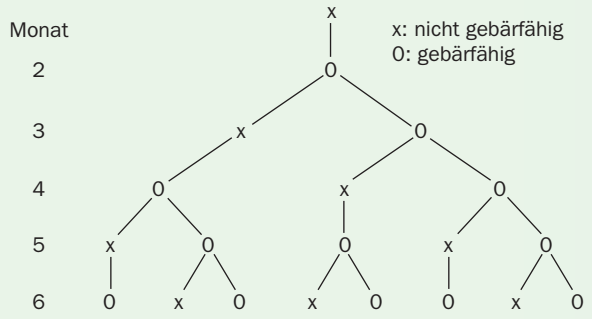
Wie vermehren sich Kaninchen, wenn folgenden drei Annahmen zutreffen?

a) Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von zwei Monaten gebärfähig.

b) Jedes Paar bringt (von da an) jeden Monat (im Durchschnitt) ein neues Paar zur Welt.

c) Kein Kaninchen stirbt während des betrachteten Zeitraums.

Das Baumdiagramm zeigt das Fortpflanzungsverhalten der Kaninchenpaare:



Diese Annahmen führen auf die berühmte Zahlenfolge:

$\langle 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; \ldots \rangle$

Für die einzelnen Folgenglieder gilt dann der bemerkenswerte Zusammenhang:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Die Fibonacci-Folge besitzt zahlreiche erstaunliche **Eigenschaften**:

(1) Je zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen sind teilerfremd: $\text{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$

(2) Das Quadrat jeder Zahl (ab der zweiten) ist um 1 kleiner oder größer als das Produkt der vorhergehenden und der nachfolgenden Zahl:
$1^2 = 1 \cdot 2 - 1$, $2^2 = 1 \cdot 3 + 1$,
$3^2 = 2 \cdot 5 - 1$, $5^2 = 3 \cdot 8 + 1$, …

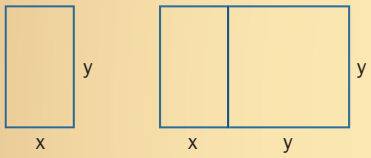
(3) Die Summe der ersten n Folgenglieder ist um 1 kleiner als das $(n + 2)$-te Folgenglied:
$1 = 2 - 1$, $1 + 1 = 3 - 1$, $1 + 1 + 2 = 5 - 1$, $1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$ …

(4) Die Summe der Quadrate der ersten n Folgenglieder ist gleich dem Produkt aus dem n-ten und $(n + 1)$-ten Folgenglied: $1^2 = 1 \cdot 1$, $1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$, $1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$, $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$, …

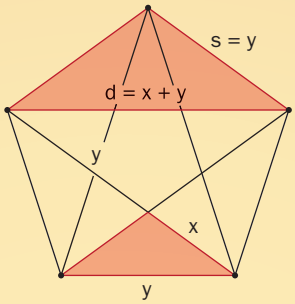
Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Berechnet man den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Zahlen in der Fibonacci-Folge $\left\langle \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \ldots \right\rangle$ so erhält man von Schritt zu Schritt (immer bessere) Näherungswerte für die Zahl Φ, den *Goldenen Schnitt* (*sectio aurea*).

Tritt bei einem Bild oder Bauwerk die Proportion $x : y = y : (x + y)$ auf, so wird diese als besonders ästhetisch empfunden.



Für ein Rechteck heißt das, dass sich die kürzere Seite zur längeren so verhält wie die längere zur Summe der beiden Seiten.



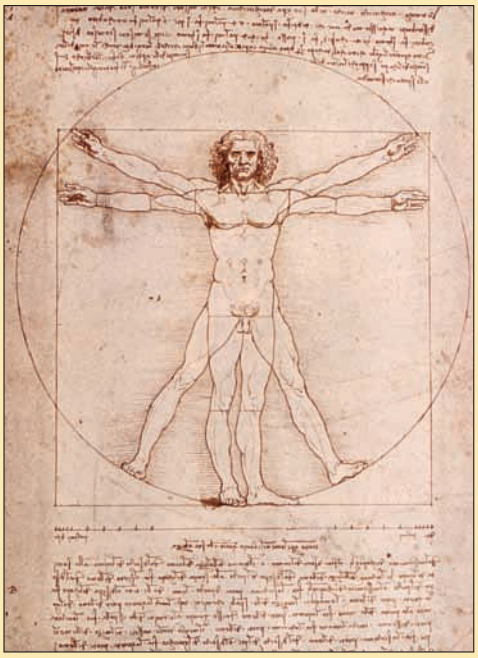
Beim **regelmäßigen Fünfeck** bildet das Verhältnis von Seite und Diagonale ebenfalls einen Goldenen Schnitt.
Gehen wir von den beiden markierten Dreiecken, die zueinander ähnlich sind, aus. Nennen wir den Schenkel im kleineren Dreieck x und die Seite des Fünfecks y, so ergibt sich für die Diagonale $d = x + y$. Somit taucht auch hier plötzlich der Goldene Schnitt auf, wenn wir das Verhältnis von Schenkel zu Basis im kleinen und großen Dreieck betrachten:

$$x : y = y : (x + y)$$

Um das Verhältnis zu berechnen, kürzen wir die Proportion durch x:

$$1 : \frac{y}{x} = \frac{y}{x} : \left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

nennen wir $\frac{y}{x} = \varphi \quad \Rightarrow \quad 1 : \varphi = \varphi : (1 + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = 1 + \varphi$



Wir erhalten so die quadratische Gleichung: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert dann $\varphi_{1,\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Die beiden Lösungen werden mit dem griechischen Buchstaben Φ bzw. $\overline{\Phi}$ bezeichnet, es gilt:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749894848204586834365638 \ldots$$

$$\overline{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi}$$

Für den Goldenen Schnitt gilt nun aber $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, woraus sich durch wiederholte Anwendung ergibt:

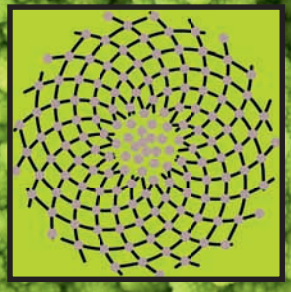
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Wenn man man diesen Kettenbruch irgendwo abbricht, so erhält man als Näherungswert einen Bruch, dessen Zähler und Nenner aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen sind.

Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at

Die Fibonacci-Zahlen in der Natur

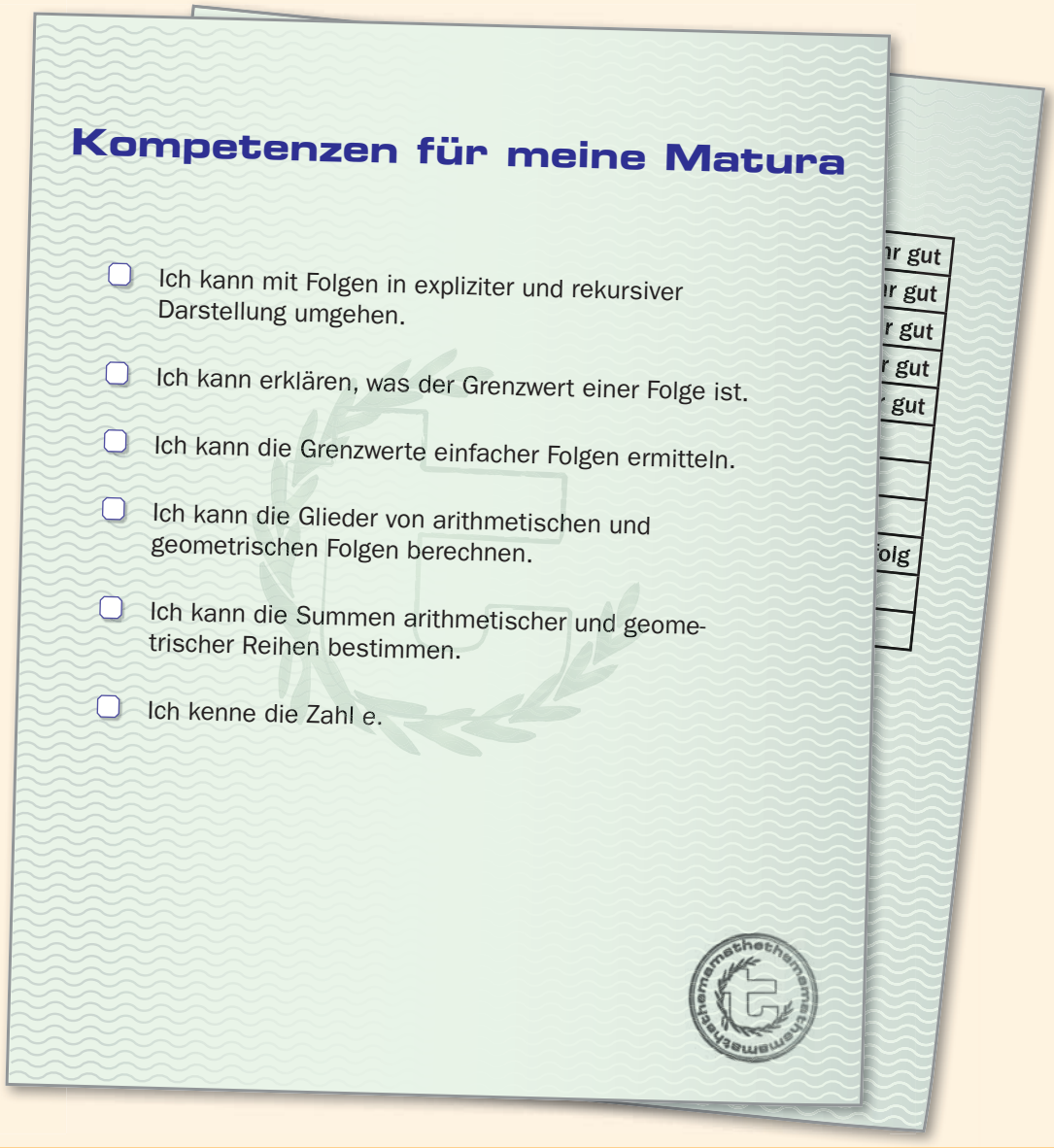
Blätter und Blüten ordnen sich oft zu Spiralmustern. Zählst du die Spiralen in der einen und anderen Richtung, entdeckst du meist aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen: 5 (Agave), 8 und 13 (Zapfen), 13 und 21 (Grafik), 21 und 34 (Blüte).



Meine Kapitelcheckliste zu Folgen und Reihen

Ich weiß … (d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	Ich kann … (d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)	Ich übe … z.B. Aufgaben
thema Reelle Zahlenfolgen		
☐ … was eine explizite und eine rekursive Darstellung einer Folge ist.	☐ … Glieder einer Folge berechnen.	… 258, 259
☐ … wie sich Folgen grafisch darstellen lassen.	☐ … eine gegebene Folge grafisch darstellen.	… 261, 274
	☐ … explizite und rekursive Darstellungen einer Folge finden.	… 263, 264, 265
thema Eigenschaften von Folgen		
☐ … was unter der Monotonie einer Folge zu verstehen ist.	☐ … das Monotonieverhalten einer Folge ermitteln.	… 276, 277
☐ … was untere und obere Schranken einer Folge sind.	☐ … entscheiden, ob eine Zahl eine Schranke einer Folge ist.	… 291, 292
	☐ … die Beschränktheit einer Folge untersuchen.	… 297
thema Grenzwerte		
☐ … was ein Grenzwert einer unendlichen Zahlenfolge ist.	☐ … Grenzwerte mithilfe der Definition des Grenzwertes bestimmten.	… 310
☐ … was konvergent und divergent bedeutet.	☐ … Grenzwerte mithilfe der Grenzwertsätze berechnen.	… 313, 314
☐ … was eine Nullfolge ist.		
☐ … wie Grenzwerte verknüpft werden können (Grenzwertsätze).		
thema Arithmetische und geometrische Folgen		
☐ … was eine arithmetische Folge ist.	☐ … aus expliziten und rekursiven Darstellungen die einzelnen Folgenglieder berechnen.	… 331
☐ … was eine geometrische Folge ist.	☐ … entscheiden, ob eine arithmetische oder eine geometrische Folge vorliegt.	… 438
	☐ … für arithmetische und geometrische Folgen explizite und rekursive Darstellungen angeben.	… 333, 347
thema Arithmetische und geometrische Reihen		
☐ … was eine arithmetische Reihe ist.	☐ … entscheiden, ob eine arithmetische oder eine geometrische Reihe vorliegt.	… 441
☐ … was eine geometrische Reihe ist.	☐ … die Summen von endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen berechnen.	… 359, 366
☐ … die Summenformeln für die arithmetische und die geometrische Reihe.	☐ … entscheiden, ob eine unendliche geometrische Reihe einen Grenzwert besitzt, und diesen ermitteln.	… 444

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
thema Anwendungen in der Finanzmathematik		
☐ … was ein Auf- bzw. Abzinsfaktor ist.	☐ … Endwerte und Barwerte ermitteln.	… 378, 384
☐ … was Endwert und Barwert sind.	☐ … Kreditraten berechen.	… 394
☐ … was vor- und nachschüssig bedeutet.	☐ … effektive Zinssätze berechnen.	… 404
☐ … dass ein Kapital zu unterschiedlichen Zeitpunkten unterschiedlich bewertet wird.		
thema Die Zahl *e*		
☐ … welche Bedeutung die eulersche Zahl hat und wie groß ihr Wert ungefähr ist.	☐ … natürliche Logarithmen berechnen.	… 415, 416
☐ … den Zusammenhang zwischen der Zahl e und dem natürlichen Logarithmus		



Teste dein Wissen!

Kreuze die richtigen Antworten an!

481

	wahr	falsch
a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot n - 2$ ist streng monoton wachsend.	☐	☐
b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$ ist streng monoton wachsend.	☐	☐
c) $a_n = (-1)^n$ ist konstant.	☐	☐
d) $a_n = 2^n - 1$ ist streng monoton wachsend.	☐	☐

482

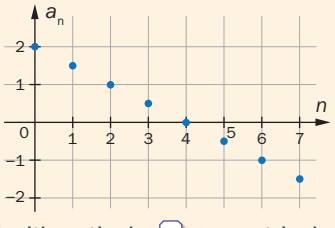
	wahr	falsch
a) Jede streng monoton wachsende Folge ist divergent.	☐	☐
b) Jede beschränkte Folge ist auch konvergent.	☐	☐
c) Jede konvergente Folge ist auch beschränkt.	☐	☐
d) Jede unbeschränkte Folge ist divergent.	☐	☐
e) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.	☐	☐
f) Jede monoton fallende Folge hat eine obere Schranke.	☐	☐

483

	wahr	falsch
a) Eine arithmetische Folge ist ein Spezialfall einer linearen Funktion.	☐	☐
b) Bei geometrischen Folgen ist die absolute Änderung zwischen aufeinander folgenden Folgengliedern konstant.	☐	☐
c) Bei arithmetischen Folgen ist die relative Änderung zwischen aufeinander folgenden Folgengliedern konstant.	☐	☐
d) Der Quotient zweier aufeinander folgender Folgenglieder einer geometrischen Folge ist stets konstant.	☐	☐

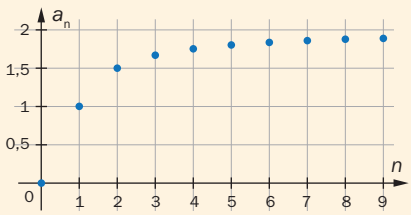
484 Um welche Folge handelt es sich?

a)



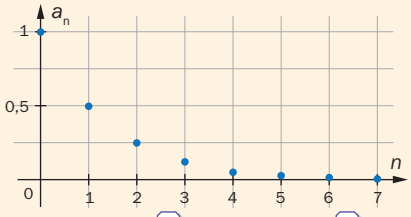
☐ arithmetisch ☐ geometrisch ☐ weder noch

b)



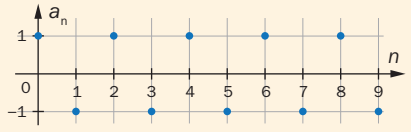
☐ arithmetisch ☐ geometrisch ☐ weder noch

c)



☐ arithmetisch ☐ geometrisch ☐ weder noch

d)



☐ arithmetisch ☐ geometrisch ☐ weder noch

485

	wahr	falsch
a) Die Summe von zwei konvergenten Folgen ist immer konvergent.	☐	☐
b) Die Summe von zwei divergenten Folgen ist immer divergent.	☐	☐
c) Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist immer eine Nullfolge.	☐	☐
d) Der Quotient zweier beschränkter Folgen ist immer konvergent.	☐	☐

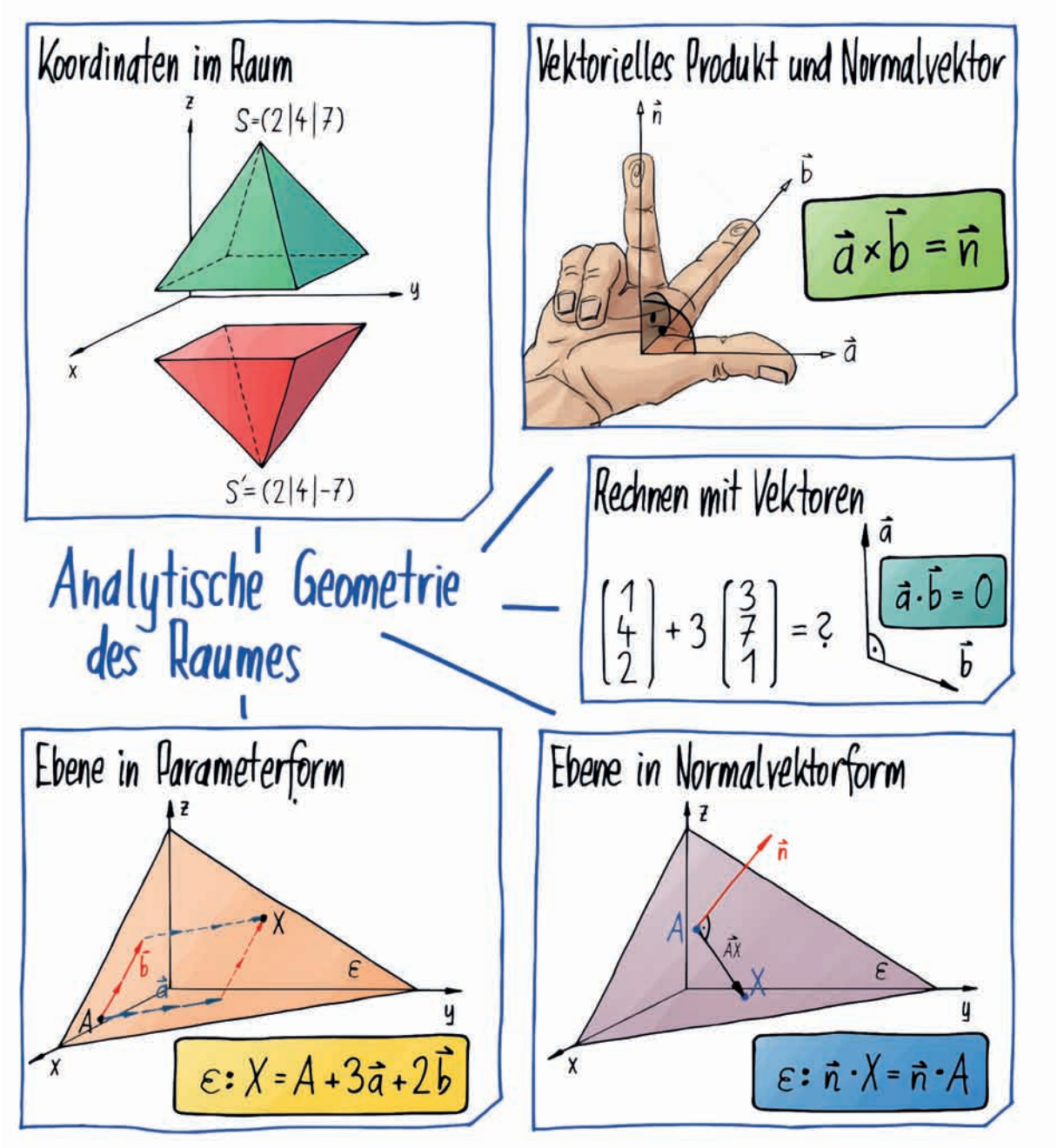
486

	wahr	falsch
a) Eine arithmetische Folge konvergiert wenn $\lvert k \rvert < 1$.	☐	☐
b) Eine geometrische Folge konvergiert wenn $\lvert q \rvert < 1$.	☐	☐
c) Eine Summe einer endlichen arithmetischen Reihe ist $\frac{a_1 + a_n}{2}$.	☐	☐
d) Eine Summe einer endlichen geometrischen Reihe ist $\frac{1 - q^n}{1 - q}$.	☐	☐
e) Die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ ist konvergent.	☐	☐

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 5 Lösungen (SBNR 145.638)

4. Analytische Geometrie des Raumes

Vektoren legen Punkte im Koordinatensystem fest, geben Wegstücke in bestimmten Richtungen an oder speichern allgemein Daten. In diesem Kapitel wirst du die Lage von Punkten im räumlichen Koordinatensystem, gerichtete Wegstrecken sowie Geraden und Ebenen mit Vektoren beschreiben und entsprechende Berechnungen kennenlernen.
Die Aufgabenstellungen zeigen dir außerdem, wie du dreidimensionale Objekte im Schrägriss skizzieren kannst.



4.1 Vektoren im Raum

Positionen (Punkte) und Wegbeschreibungen (Pfeile) in der Ebene können wir mithilfe von Zahlentupeln angeben, im Raum werden wir nun dazu Zahlentripel verwenden.

Definition: Ein Vektor im Raum ist ein Zahlentripel.

G

Grundvorstellung: Ein Vektor beschreibt eine Position (Punkt) oder einen Weg (Pfeil).

Bemerkung:
Wie in Band 5 werden wir Vektoren wieder (je nach Bedarf) in Spalten- oder Zeilenform anschreiben.

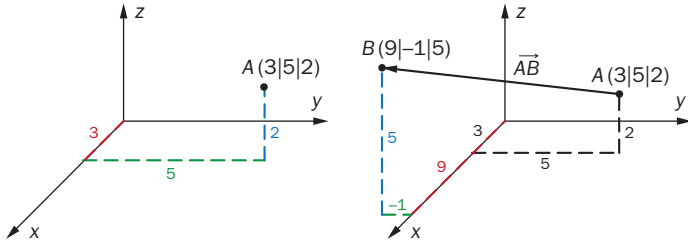
Definition: Zwei Vektoren sind dann *gleich*, wenn sie in allen drei Koordinaten übereinstimmen.

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so wird $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ als *Gegenvektor* zu $\vec{v}$ bezeichnet.

Mit dem räumlichen Koordinatensystem legen wir den Ort von Objekten im Raum fest. In der Zeichenebene wird es als **Schrägriss** dargestellt. Wir zeichnen dazu die x-Achse schräg (unter 45°) und verkürzen darauf alle Abstände auf die Hälfte.

487 Stelle die Punkte $A(3|5|2)$ und $B(9|-1|5)$ und den Weg $\overrightarrow{AB}$ von A nach B im Koordinatensystem dar!

Ausführung: Punkt A: Gehe 3 E nach vorn, 5 E nach rechts und 2 E nach oben.
Punkt B: Gehe 9 E nach vorn, 1 E nach links und 5 E nach oben.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnest du genauso wie bei Vektoren in der Ebene mit der „Spitze-minus-Schaft-Regel“: $\overrightarrow{AB} = B - A$

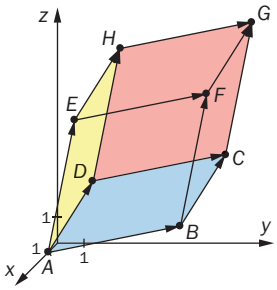
Hinweis

Wenn der Punkt A und die Wegbeschreibung $\overrightarrow{AB}$ bekannt sind, kann die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ wieder umgekehrt verwendet werden, um die Position von B zu bestimmen:

$$B = A + \overrightarrow{AB}$$

488 Die Seitenflächen eines Parallelepipeds $ABCDEFGH$ sind Parallelogramme. Daher sind jeweils vier Kanten des Parallelepipeds parallel. Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(1|0|0)$, $B(2|5|1)$, $D(0|1|2)$ und $E(2|1|5)$. Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte!

Ausführung: Aus der Angabe berechnen wir die Vektoren der Kanten AB, AD und AE:



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechne die Eckpunkte paralleler Kanten ($\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$) durch Vektoraddition:

$$C = D + \overrightarrow{DC} = D + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F = B + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{Analog: } G = C + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$H = D + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $C(1|6|3)$, $F(3|6|6)$, $G(2|7|8)$, $H(1|2|7)$

Aufgaben

489 Beschreibe den Weg von A nach B mit einem Vektor:

a) $A(1|0|3)$, $B(5|7|3)$

b) $A(-2|4|-3)$, $B(2|-7|-6)$

c) $A\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{5}\right)$, $B(2|0|1)$

d) $A(0{,}1|2{,}4|3{,}6)$, $B(2{,}3|1{,}7|0{,}5)$

490 Beschreibe die Wege von A nach B und von B nach C mit Vektoren.

a) $A(2|0|1)$, $B(-3|4{,}2)$, $C(4|6|5)$

b) $A(-3|-7|8)$, $B(2|2|2)$, $C(5|8|7)$

491 Die Basiseckpunkte eines Quaders liegen in der xy-Ebene: $A(4|-1|0)$, $B(5|3|0)$, $C(-1|6|0)$, $D(0|1|0)$. Der Quader ist 4 E hoch.

Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte der Deckfläche!

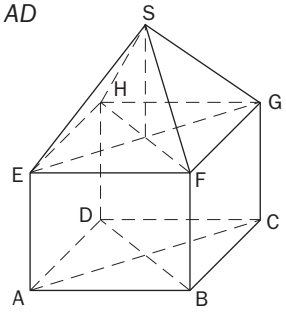
492 Die Kanten eines Würfels sind parallel zu den Koordinatenachsen. Die Eckpunkte $A(5|0|0)$, $D(0|0|0)$ und $E(5|0|5)$ sind gegeben.
Bestimme die Koordinaten aller anderen Eckpunkte!

493 Überprüfe, ob durch $ABCD$ [$A(-6|10|-1)$, $B(-4|0|3)$, $C(2|-6|5)$, $D(0|4|1)$] ein Parallelogramm festgelegt wird, d. h. ob gilt:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

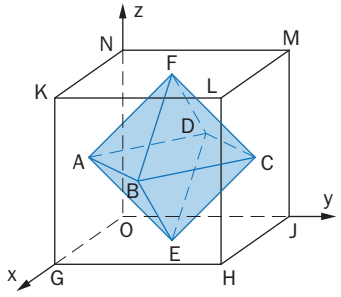
494 Welche Wege in der Figur werden mit dem Vektor **a)** $\overrightarrow{AB}$, **b)** $\overrightarrow{AE}$, **c)** $\overrightarrow{EG}$ beschrieben?

Zeichne sie als Pfeile ein!



495 Die Basiskante eines quadratischen Prismas ist 5 E, seine Höhe 7 E lang. Gib die Koordinaten der Eckpunkte an, wenn alle Koordinaten positiv sind und ein Eckpunkt des Prismas im Koordinatenursprung liegt!

496 Einem Würfel mit Seitenlänge 2 E ist ein Oktaeder eingeschrieben. Die Oktaederpunkte sind die Seitenmitten der Würfelflächen. Der Würfelpunkt O liegt im Ursprung eines xyz-Koordinatensystems.



a) Gib die Koordinaten der Oktaedereckpunkte an!

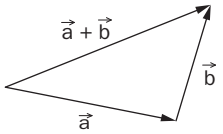
b) Beschreibe die Kanten des Oktaeders mit Vektoren!

497 Die Koordinaten der Basiseckpunkte eines sechsseitigen geraden, 2 E hohen Prismas liegen in der xy-Ebene: $A(2|0|0)$, $B(4|2|0)$, $C(4|6|0)$, $D(0|8|0)$, $E(-2|5|0)$, $F(-1|2|0)$. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte der Deckfläche!

498 Wie lassen sich mit dem Computeralgebrasystem Vektoren numerisch, algebraisch und grafisch darstellen? Wie kann die Endposition B ermittelt werden, wenn A und $\overrightarrow{AB}$ bekannt sind?

4.2 Rechnen mit Vektoren im Raum – Betrag eines Vektors

Definition: *Addition von Vektoren*
Vektoren addieren wir komponentenweise: $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$



Füge den Fußpunkt des Vektors $\vec{b}$ an die Spitze des Vektors $\vec{a}$: Du erhältst den Summenvektor, wenn du den Fußpunkt des ersten Vektors mit der Spitze des zweiten Vektors verbindest.

Definition: *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar*
Vektoren multiplizieren wir komponentenweise mit einem Skalar $t \in \mathbb{R}$: $t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \\ t \cdot a_z \end{pmatrix}$

Parallelitätskriterium
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann parallel, wenn es eine reelle Zahl t gibt, sodass der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist, d. h. $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ gilt.

499 Überprüfe, ob die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}$ parallel sind:

Ausführung: Ja, da $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ gilt.

$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}$, daher: $\begin{aligned} -2 &= t \cdot 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad t = -2{,}5 \\ -5 &= t \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad t = -2{,}5 \\ 6 &= t \cdot (-2{,}4) \quad \Rightarrow \quad t = -2{,}5 \end{aligned}$ also $\vec{a} = -2{,}5 \cdot \vec{b}$

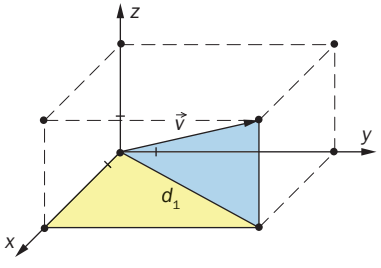
Betrag eines Vektors

500 Berechne den Betrag des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ausführung: Berechne die Länge der Raumdiagonale des „Koordinatenquaders“:

$d_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$

$|\vec{v}| = \sqrt{72 + 3^2} = \sqrt{81} = 9$



Ergebnis: Der Vektor $\vec{v}$ ist 9 E lang.

Definition: *Betrag eines Vektors im Raum*
Der Betrag eines Vektors gibt die Länge des ihm entsprechenden Weges an.

$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Der Betrag eines Vektors im Raum ist nicht negativ. Der Nullvektor $\vec{o}$ hat den Betrag $|\vec{o}| = 0$.

Aufgaben

501 Addiere:

a) $\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\\-8\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}7\\8\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}7\\2\\-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-11\\18\\25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12\\21\\14\end{pmatrix}$

502 Berechne:

a) $4\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}$ **b)** $2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

c) $3\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

d) $6\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

503 Berechne mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\-3\\-5\end{pmatrix}$:

a) $5\cdot\vec{a}$ **b)** $3\cdot\vec{b}$ **c)** $(-1)\cdot\vec{b}$ **d)** $0\cdot\vec{a}$

504 Berechne mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ **b)** $2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}$

c) $-3\vec{a}+2\vec{b}$ **d)** $5\vec{a}+4\vec{b}$

505 Überprüfe, ob die Vektoren parallel sind:

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\-3\\-15\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1{,}4\\-0{,}5\\2{,}3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\-2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

506 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$. Zeige durch direktes Nachrechnen, dass gilt: $|t\cdot\vec{a}|=|\vec{t}|\cdot|\vec{a}|$

507 Für den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ gilt: $S=\frac{A+B+C}{3}$.
Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts:

a) $A(1|7|3)$, $B(4|-2|1)$, $C(1|4|6)$

b) $A(-5|3|0)$, $B(-2|-1|3)$, $C(1|4|6)$

c) $A(7|-2|3)$, $B(-1|1|1)$, $C(3|7|8)$

508 Berechne die Koordinaten des Punktes D des Parallelogramms $ABCD$ und seinen Umfang!

a) $A(4|-1|5)$, $B(7|2|3)$, $C(-3|0|2)$, D

b) $A(3|1|6)$, $B(8|-1|-4)$, $C(2|-2|-4)$, D

c) $A(0|11|2)$, $B(6|4|0)$, $C(3|0|9)$, D

509 Von einem geraden vierseitigen Prisma sind die Koordinaten der Eckpunkte der Basisfläche gegeben:
$A(4|-1|0)$, $B(5|3|0)$, $C(-1|6|0)$, $D(0|1|0)$.

a) Berechne die Koordinaten aller Eckpunkte des Prismas mit der Höhe $h=3$ E.

b) Berechne alle Kantenvektoren.

510 Berechne die Länge der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}-7\\\sqrt{2}\\7\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}\sqrt{11}\\-3\\-4\end{pmatrix}$

511 Berechne den Abstand $\overline{AB}$:

a) $A(4|0|5)$, $B(1|8|9)$

b) $A(-2|1|-3)$, $B(2|7|5)$

c) $A(3|-2|3)$, $B(2|-6|-4)$

d) $A(2|2|7)$, $B(-1|3|7)$

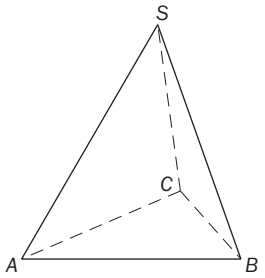
512 Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$:

a) $A(3|3|4)$, $B(3|4|3)$, $C(4|3|3)$

b) $A(0|2|8)$, $B(1|1|8)$, $C(2|0|8)$

c) $A(2|4|4)$, $B(4|4|2)$, $C(4|2|4)$

513 Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Koordinaten ihrer vier Eckpunkte $A(1|-2|3)$, $B(3|4|2)$, $C(-2|5|1)$, $S(0|2|8)$ festgelegt.



Es soll ein Drahtmodell angefertigt werden.
Welche Drahtlänge ist (mindestens) erforderlich?

514 Einheitsvektoren haben die Länge 1.
Es gilt wie in der Ebene: $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$
Berechne die Einheitsvektoren!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

c) $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\-10\\10\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix}$

515 Wie lässt sich mit dem Computeralgebrasystem

a) die Länge eines Vektors,

b) der Einheitsvektor ermitteln?

4.3 Das skalare Produkt

Definition: Das *skalare Produkt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Das skalare Produkt ist eine reelle Zahl.

Satz: *Vektorielle Winkelformel*

Für den (eingeschlossenen) Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Beweis: Siehe Thema Mathematik 5, Seite 192.

Orthogonalitätskriterium: Das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist genau dann null, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Beweis: Betrachte die Beziehung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90° \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

516 Bestimme die fehlende Koordinate c so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ c \end{pmatrix}$ aufeinander normal stehen!

Ausführung: Verwende das Orthogonalitätskriterium $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ c \end{pmatrix} = 6 - 28 - c \quad \Rightarrow \quad 0 = -22 - c \quad \Rightarrow \quad c = -22$$

Ergebnis: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -22 \end{pmatrix}$ steht normal auf den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Länge der Normalprojektion $\vec{b}_{\underline{a}}$

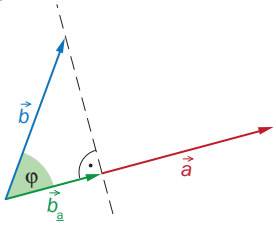
Wir berechnen die Länge der Normalprojektion $|\vec{b}_{\underline{a}}|$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

Für den Winkel φ gilt: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{b}_{\underline{a}}|}{|\vec{b}|}$

Ebenso gilt: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Setze gleich und multipliziere mit $|\vec{b}|$, daher: $|\vec{b}_{\underline{a}}| = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

Da $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ ist, ergibt sich: $|\vec{b}_{\underline{a}}| = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}_0$ für $-90° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.



Da die Orientierung der Vektoren keine Rolle spielen soll, verwenden wir den Betrag:

Satz: Wird ein Vektor $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ projiziert, so gilt für die Länge des (normal-)projizierten Vektors: $|\vec{b}_{\underline{a}}| = |\vec{b} \cdot \vec{a}_0|$

Bemerkung:

Der Unterstrich in der Schreibweise $\vec{b}_{\underline{a}}$ soll anzeigen, dass die Projektion von $\vec{b}$ parallel zu $\vec{a}$ liegt.

Aufgaben

517 Berechne das skalare Produkt und überprüfe, ob die Vektoren aufeinander normal stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

518 Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} d \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

519 Bestimme den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

520 Berechne die Länge der Normalprojektion $|\vec{b}_{\vec{a}}|$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

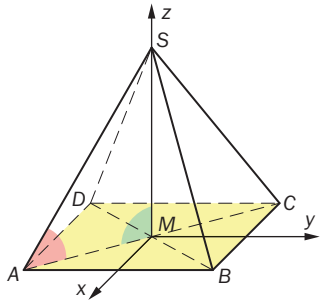
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

521 **a)** Begründe, dass bei der dargestellten Pyramide die Normalprojektion der Seitenkante *AS* auf die Diagonale *AC* der Basis genau der Strecke *AM* entspricht!



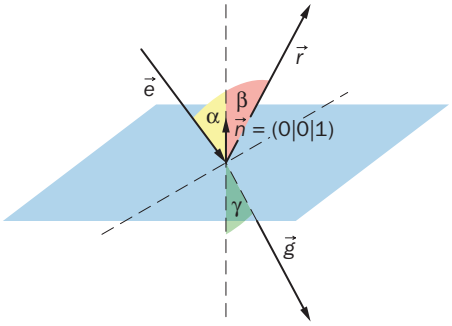
b) Berechne für die Pyramide *ABCDS* [$A(2|-2|0)$, $B(2|2|0)$, $C(-2|2|0)$, D, $S(0|0|4)$] den Winkel unter dem die Seitenkante *AS* gegen die Basisebene *ABCD* geneigt ist.

522 **a)** Wie lässt sich bei zwei vorgegebenen Vektoren ein Vektor $\vec{w}$ ermitteln, der in Richtung der Winkelsymmetrale zwischen den beiden Vektoren zeigt? (Zwei Lösungen!)

b) Überprüfe deine Überlegungen anhand der Vektoren $\vec{u} = (2|-3|-1)$ und $\vec{v} = (-4|5|2)$.

Hinweis:
Zeige, dass $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cdot \sphericalangle(\vec{u}, \vec{w})$ ist.

523 Durch den Vektor $\vec{e} = (-2|0|-3)$ wird ein Lichtstrahl beschrieben. Er trifft auf eine in der xy-Ebene liegende ebene Glasplatte und wird an dieser teilweise reflektiert und teilweise gebrochen. Die Glasplatte ist durch ihren Normalvektor $\vec{n} = (0|0|1)$ festgelegt.



a) Zeige, dass das Reflexionsgesetz gilt, d. h. dass der Einfallswinkel $\alpha = 180° - \sphericalangle(\vec{e}, \vec{n})$ gleich dem Reflexionswinkel $\beta = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{n})$ ist, wenn der reflektierte Strahl durch $\vec{r} = (-2|0|3)$ beschrieben wird.

b) Der Vektor $\vec{g} = (-2|0|-4)$ beschreibt den gebrochenen Lichtstrahl. Berechne, wie groß der Brechungswinkel γ ist.

524 Zeige durch Nachrechnen, dass für das skalare Produkt die Beziehungen

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ und **(2)** $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ gelten.

525 Entwickle mit dem Computeralgebrasystem eine Funktion, die bei Eingabe zweier Vektoren

a) den Winkel zwischen diesen Vektoren,

b) die Länge der Normalprojektion des ersten Vektors auf den zweiten Vektor ermittelt.

4.4 Geraden im Raum

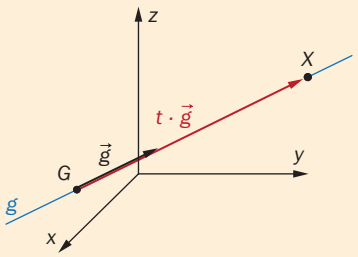
Wir haben bereits mit Parameterdarstellungen von Geraden in der Ebene gearbeitet. Nun wollen wir unser Wissen auf den Raum übertragen. Es kommt dabei lediglich eine Koordinate hinzu.

Geradengleichung in Parameterform

Eine Gerade g wird durch einen *(Einstiegs-)Punkt* G und durch den *Richtungsvektor* $\vec{g}$ beschrieben:

$g\colon\ X(t) = G + t \cdot \vec{g}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ … allgemeiner Punkt auf g

G … (Einstiegs-)Punkt für g
$t \in \mathbb{R}$ („Parameter")
$\vec{g}$ … Richtungsvektor für g, RV(g)



Hinweis

Die Parameterform der Geradengleichung ist nicht eindeutig. Der Punkt G kann ein beliebiger Punkt auf der Geraden sein, darüberhinaus kommt es auf die Länge des Richtungsvektors nicht an. Dieser kann beliebig multipliziert werden, sodass er „möglichst einfach" wird.

526 Gib die Geradengleichung für die Gerade $g\,[A(3|{-2}|5), B(1|2|1)]$ an.

Ausführung: Bestimme den Richtungsvektor $\vec{g}$ und schreibe die Geradengleichung an:

RV(g): $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $g\colon\ X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

527 Gib die Geradengleichung für die Gerade $g\,[A(-2|4|6), B(3|{-3}|2)]$ an und überprüfe, ob der Punkt $C(13|{-17}|{-6})$ auf g liegt.

Ausführung: $g\colon\ X(t) = A + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

$C \in g \ \Rightarrow\ C = A + t \cdot \vec{g} \qquad \begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ daher: $\begin{aligned} 13 &= -2 + 5t \ &\Rightarrow\ t = 3 \\ -17 &= 4 - 7t \ &\Rightarrow\ t = 3 \\ -6 &= 6 - 4t \ &\Rightarrow\ t = 3 \end{aligned}$

Ergebnis: $C = A + 3 \cdot \vec{g}$, der Punkt C liegt auf der Geraden g.

G

Grundvorstellung: Ein Punkt wandert auf einer Geraden.

528 Die Bahn eines Meteoriten wird beschrieben durch die Parameterform (Angaben in m)

met: $X = \begin{pmatrix} 300 \\ -150 \\ 1\,820 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 110 \\ 180 \\ -140 \end{pmatrix}$ Dabei soll der Parameter t die Zeit (in s) angeben.

a) An welchen Positionen befindet sich der Meteorit zur Zeit $t_1 = 0$ s, $t_2 = 5$ s, $t_3 = 10$ s?

b) Wie groß ist seine Geschwindigkeit?

c) Wann und wo schlägt der Meteorit am Boden ($z = 0$) auf?

Ausführung: **a)** $P_0 = (300|{-150}|1820)$; $P_5 = \begin{pmatrix} 300 \\ -150 \\ 1\,820 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 180 \\ -140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 850 \\ 750 \\ 1\,120 \end{pmatrix}$;

analog $P_{10} = (1\,400|1\,650|420)$

b) $v = \frac{\text{Weg in 1 s}}{1\text{ s}} = |(110|180|{-140})| \approx 253 \Rightarrow$ Geschwindigkeit 253 m/s

c) $z = 1\,820 + t \cdot (-140) = 0 \Rightarrow t = 13 \Rightarrow$ er schlägt nach 13 s auf; $P_{13} = (1\,730|2\,190|0)$

Aufgaben

529 Gib die Gleichung der Geraden $g[G, \vec{g}]$ an:

a) $G(4|{-5}|6)$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $G(0|7|1)$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $G(2|7|{-1})$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $G(4|{-2}|7)$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

530 Gib die Gleichung der Geraden $g[A, B]$ an:

a) $A(2|0|5)$, $B(-3|2|7)$

b) $A(-1|4|7)$, $B(2|{-5}|{-1})$

c) $A(3|{-2}|4)$, $B(-4|5|2)$

d) $A(1|8|{-6})$, $B(7|10|3)$

531 Wähle geeignete Punkte auf den Koordinatenachsen und gib die Geradengleichung

a) für die x-Achse, **b)** für die y-Achse,

c) für die z-Achse an.

532 Überprüfe, ob der Punkt P auf der Geraden $g[A, B]$ liegt:

a) $P(2|1|0)$, $A(1|0|0)$, $B(3|1|2)$

b) $P(3|{-2}|5)$, $A(2|{-3}|4)$, $B(6|1|8)$

c) $P(6|3|5)$, $A(4|1|3)$, $B(5|2|4)$

d) $P(2|6|{-5})$, $A(-1|3|{-5})$, $B(1|5|{-5})$

533 Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes P so, dass er auf der Geraden g liegt!

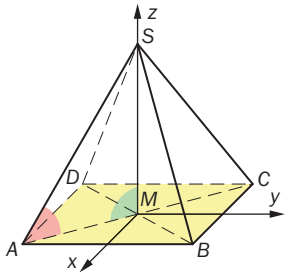
a) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P(7|{-2}|c)$

b) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $P(a|10|{-20})$

c) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P(4|{-3}|c)$

d) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P(3|b|{-7})$

534 Gegeben ist die quadratische Pyramide $ABCDS$ $[A(2|{-2}|0)$, $B(2|2|0)$, $C(-2|2|0)$, $D(-2|{-2}|0)$, $S(0|0|4)]$.



a) Stellt die Gleichungen der Trägergeraden für die Seitenkanten AS, BS, CS und DS auf.

b) Stellt die Gleichungen der Trägergeraden für die Seitenkanten des Basisquadrats auf.

c) Vergleicht die Geradengleichungen aus b): Woran erkennt ihr, dass zwei Geraden parallel sind?

535 Gegeben ist die dreiseitige Pyramide $ABCS$ $[A(-1|1|2)$, $B(1|5|0)$, $C(-3|1|{-1})$, $S(0|0|5)]$.

a) Stelle die Gleichungen der Trägergeraden aller Seitenkanten auf!

b) Untersuche, ob eine dieser Geraden durch den Koordinatenursprung verläuft!

536 Wie 535:
$A(2|1|0)$, $B(0|5|{-2})$, $C(-1|4|2)$, $S(-2|1|7)$.

537 Diskutiert, woran ihr feststellen könnt, ob

a) zwei Geraden g und h parallel sind,

b) zwei Geraden g und h aufeinander normal stehen.

538 Ein Flugzeug befindet sich auf geradliniger Bahn, die durch die angegebene Parameterdarstellung beschrieben wird. (1 E = 1 m, t in s)

$$f\colon X(t) = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 110 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) An welchen Positionen befindet sich das Flugzeug zur Zeit $t_1 = 0$ s, $t_2 = 10$ s, $t_3 = 30$ s?

b) Wie groß ist seine Geschwindigkeit? Welchen Weg legt es innerhalb einer Minute zurück?

c) Wann wird eine Steighöhe von $z = 9\,000$ m erreicht?

4.5 Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum

Geraden können im Raum

- *identisch sein*: $g = h,\ g \cap h = g = h$
- *parallel sein*: $g \parallel h,\ g \cap h = \emptyset$
- *einander schneiden*: $g \cap h = \{S\}$ (S … „Schnittpunkt“)
- *windschief sein*: $g \cap h = \emptyset,\ g \nparallel h$

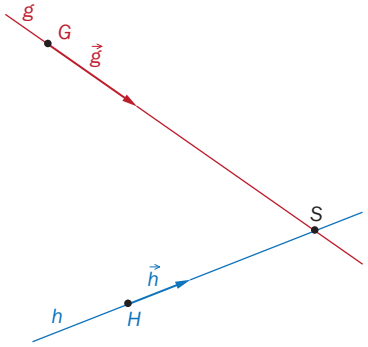
539 Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h.

$g\colon X(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad h\colon X(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ausführung: Der Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden, daher:

$$G + s \cdot \vec{g} = H + t \cdot \vec{h}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Damit erhalten wir ein Gleichungssystem von drei linearen Gleichungen mit den Unbekannten s und t.

Wir berechnen die Unbekannten s und t zum Beispiel aus den ersten beiden Gleichungen und kontrollieren anschließend, ob sie auch die dritte Gleichung erfüllen:

$$\begin{array}{rcll} 3 - s = -3 + t & | \cdot 2 & | \cdot (-2) & \\ -2 + 2s = -2 + 2t & & & \\ \hline 5 - 2s = -4 + t & & & \\ \hline 4 = -8 + 4t & | + 8 & \Rightarrow\ 12 = 4t & \Rightarrow\ t = 3 \\ -8 + 4s = 4 & | + 8 & \Rightarrow\ 4s = 12 & \Rightarrow\ s = 3 \end{array}$$

Kontrolle (Einsetzen in 3. Gleichung): $5 - 2 \cdot 3 = -4 + 3 \ \Leftrightarrow\ -1 = -1$ w. A.

$s = 3$ und $t = 3$ sind somit Lösungen des Gleichungssystems. Wir berechnen die Koordinaten des Schnittpunkts aus einer Geradengleichung. Die Berechnung aus der zweiten Gleichung dient zur Kontrolle:

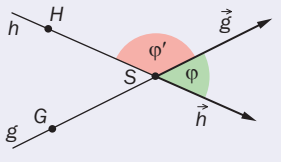
$g\colon S = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h\colon \text{(Kontrolle) } S = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt $S(0\,|\,4\,|\,-1)$.

Hinweis

Für einander schneidende Gerade g und h können wir den **Schnittwinkel** berechnen. Dieser ist der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$.

Im Allgemeinen geben wir den spitzen Winkel an. Erhalten wir bei der Berechnung des Winkels einen stumpfen Winkel, so ist der Schnittwinkel der Supplementärwinkel.



Aufgaben

540 Untersuche die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S und den Winkel φ zwischen den Geraden, wenn die Geraden einander schneiden!

a) $g[A(3|-2|5), B(1|2|1)]$
$h[C(2|-1|-2), D(5|5|1)]$

b) $g[A(-1|0|5), B(2|3|-4)]$
$h[C(-2|2|-1), D(2|0|5)]$

c) $g[A(4|-5|8), B(7|-2|10)]$
$h[C(4|3|-1), D(10|9|3)]$

d) $g[A(0|3|0), B(4|7|-8)]$
$h[C(-1|6|-2), D(5|0|-2)]$

541 Wie 540:

a) $g: X(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h: X(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g: X(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h: X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $g: X(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

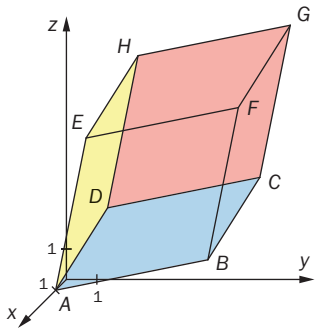
$h: X(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $g: X(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h: X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

542 Bestimme die Trägergeraden der Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ $[A(1|4|-3), B(0|6|1), C(2|12|-7)]$ sowie die Trägergeraden der Schwerlinien. Welche Schwerlinie ist parallel zu einer Koordinatenachse?

543 Stellt die Gleichungen der Geraden aller zwölf Kanten des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ $[A(1|0|0), B(2|5|1), C, D(0|1|2), E(2|1|5), F, G, H]$ auf und beschreibt alle Lagebeziehungen dieser Geraden.



a) Zählt windschiefe Gerade auf!

b) Überprüft, ob einander schneidende Kanten aufeinander normal stehen.

c) Begründet, dass keine Gerade parallel zu den Koordinatenachsen ist.

544 **a)** Stellt die Gleichungen der Geraden aller Kanten der dreiseitigen Pyramide $ABCS$ $[A(0|-1|2), B(-1|5|1), C(-2|-2|-1), S(1|1|4)]$ auf.

b) Berechnet alle Winkel zwischen den Trägergeraden der Strecken AB, AS und BS und überprüft das Ergebnis mit der Winkelsumme im Dreieck!

545 Finde für die Variablen a, b und c Werte, sodass die Geraden

$g: X(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$h: X(t) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) einander schneiden,

b) parallel sind,

c) identisch sind,

d) windschief sind.

Hinweis: Überlege dir, ob es nur eine Lösung oder beliebig viele Lösungen geben kann.

546 Wie lässt sich die Parameterform der Geraden mit dem Computeralgebrasystem darstellen?

547 Versucht eine Methode zu entwickeln, wie die Lage zweier Geraden mit dem Computeralgebrasystem bestimmt werden kann.

4.6 Das vektorielle Produkt – Kreuzprodukt

Die Koordinatenachsen stehen im Raum aufeinander normal. Sie bilden ein **orthogonales Dreibein**. In vielen Anwendungen ist es wichtig, drei (paarweise) aufeinander normal stehende Vektoren zu bestimmen.

548 Welche Eigenschaften müssen die Koordinaten eines Vektors $\vec{c}$ haben, damit er auf den Vektor $\vec{a}$ und auf den Vektor $\vec{b}$ normal steht? Berechne dies mithilfe des Orthogonalitätskriteriums!

Ausführung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$

$\vec{c} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = 0$

$\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z = 0$

$c_x a_x + c_y a_y = -c_z a_z \quad | \cdot b_y$

$c_x b_x + c_y b_y = -c_z b_z \quad | \cdot (-a_y)$

$c_x a_x b_y + c_y a_y b_y = -c_z a_z b_y$

$-c_x a_y b_x - c_y a_y b_y = -(-c_z a_y b_z)$ } Addiere!

$c_x (a_x b_y - a_y b_x) = -c_z (a_z b_y - a_y b_z) \quad |$ Dividiere!

$c_x = \frac{a_y b_z - a_z b_y}{a_x b_y - a_y b_x} \cdot c_z$

Analog: $c_y = \frac{-a_x b_z + a_z b_x}{a_x b_y - a_y b_x} \cdot c_z$

Setze nun $c_z = a_x b_y - a_y b_x$, dann gilt: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$. Rechne nach!

Definition: Das *vektorielle Produkt* zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein neuer Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Er steht normal auf die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$

Dieser Ausdruck heißt *Determinante*.

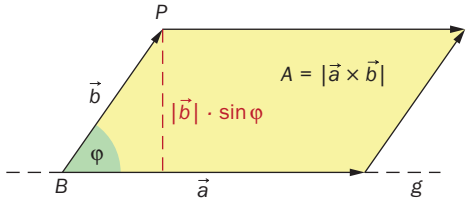
Satz: Für den *Flächeninhalt A des Parallelogramms*, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird, gilt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Beweis: Siehe Aufgabe 556.

Normalabstand

Wir berechnen den Normalabstand $|\vec{b}_{a|}|$ des Punktes P von der durch B und $\vec{a}$ festgelegten Geraden g.



Für die Fläche gilt: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Ebenso gilt: $A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_{a|}|$

Setze gleich und dividiere durch $|\vec{a}|$: $|\vec{b}_{a|}| = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$

Da $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ ist, ergibt sich aus dem letzten Ausdruck: $|\vec{b}_{a|}| = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}_0 \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}_0|$

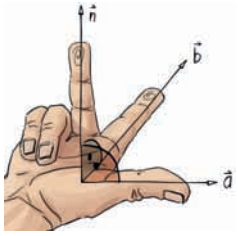
Satz: Für den Normalabstand eines Punktes P von einer durch B und $\vec{a}$ gegebenen Geraden gilt:

$$|\vec{b}_{a|}| = |\vec{b} \times \vec{a}_0| \qquad \text{(Dabei ist } \vec{b} = \overrightarrow{BP}\text{)}$$

Bemerkung:
Der senkrechte Strich in der Schreibweise $\vec{b}_{a|}$ soll anzeigen, dass die Strecke $|\vec{b}_{a|}|$ normal zu $\vec{a}$ liegt.

Aufgaben

549 Bestimme das vektorielle Produkt $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ und kontrolliere anschließend, ob $\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$ gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



550 Wie 549:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

551 Zeige: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

552 Berechne das vektorielle Produkt für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und überprüfe ob gilt: $\vec{a} \times (2 \cdot \vec{b}) = 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

553 Rechne nach, dass gilt: $\vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

554 **a)** Zeige anhand der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dass das vektorielle Produkt **nicht kommutativ** ist, d.h. dass:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

b) Welcher Zusammenhang lässt sich zwischen $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$ herstellen? Zeige dies allgemein durch Einsetzen der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$.

555 Wähle die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und beweise durch Einsetzen, Ausrechnen und Vergleich:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

556 Zeige, dass für den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Hinweis: Verwende das Ergebnis von Aufgabe 555 und die vektorielle Flächenformel:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

557 Berechne mit dem Ergebnis von Aufgabe 556 den Flächeninhalt A der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramme:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

558 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen in der xy-Ebene des Koordinatensystems. Berechne den Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ und zeige, dass dieser Vektor parallel zur z-Achse ist!

559 Beweise allgemein: Das vektorielle Produkt zweier Vektoren, die in der xy-Ebene des räumlichen Koordinatensystems liegen, ist parallel zur z-Achse.

560 Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann auch mit der Beziehung

$\sin \varphi = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = |\vec{a}_0 \times \vec{b}_0|$ bestimmt werden.

a) Begründe diese Beziehung!

b) Für welche Winkel ist diese Beziehung gültig?

561 Wie kann mit dem Computeralgebrasystem das vektorielle Produkt bestimmt werden?

562 Entwickelt mit dem Computeralgebrasystem eine Funktion, die es gestattet den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten

a) Parallelogramms,

b) Dreiecks zu ermitteln.

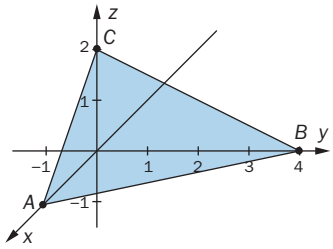
4.7 Ebenengleichung in Parameterform

Eine Ebene kannst du durch drei Punkte festlegen, z. B. durch: $A(3|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|2)$.

Die Punkte A, B und C werden **Spurpunkte** der Ebene genannt; die Dreiecksseiten kennzeichnen die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen. Sie heißen *Spuren der Ebene*.

Das eingezeichnete Dreieck nennen wir **Spurdreieck**.

Beachte, dass jede Ebene unendlich groß ist. Wir kennzeichnen sie durch einen endlichen Ausschnitt, zum Beispiel durch ein Spurdreieck.

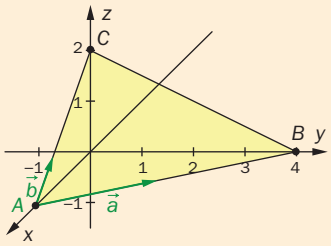


Analog zur Beschreibung einer Geraden kann jeder Punkt X der Ebene durch einen geeigneten Weg von einem *(Einstiegs-)Punkt A* ausgehend erreicht werden. Wir legen dazu noch zwei - nicht parallele - Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ fest, die die Ebene aufspannen, z. B. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Parameterform der Ebenengleichung

Jeder Punkt X der Ebene kann durch eine geeignete Kombination aus *(Einstiegs-)Punkt A* und *zwei Richtungsvektoren* $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erreicht werden:

$\varepsilon: \quad X(s, t) = A + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \qquad$ mit $s, t \in \mathbb{R}$



Hinweis

Wie bei Geraden ist auch hier die Darstellung nicht eindeutig, da als Einstiegspunkt ein beliebiger Punkt der Ebene gewählt werden kann und auch die beiden Vektoren, die die Ebene aufspannen, beliebige Länge und Orientierung besitzen können.

563 Eine Ebene ist durch drei Punkte gegeben $\varepsilon[A(1|-4|-2), B(4|2|7), C(5|-4|10)]$. Bestimme die dritte Koordinate des Punktes $P[2|0|z]$, der auf der Ebene ε liegt!

Ausführung: Wir berechnen zwei Vektoren, die die Ebene aufspannen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Daher } \varepsilon: \; X(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da der Punkt P auf der Ebene ε liegt, müssen seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen.

$P = A + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Vektorgleichung erhalten wir ein Gleichungssystem von drei linearen Gleichungen mit den drei Unbekannten z, s und t:

$$\begin{array}{lll} 2 = 1 + s + t & & \Rightarrow \quad 2 = 1 + 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = -1 \\ 0 = -4 + 2s & \Rightarrow \quad 4 = 2s \quad \Rightarrow \quad s = 2 & \\ \hline z = -2 + 3s + 3t & \Rightarrow \quad z = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad P(2|0|1) & \end{array}$$

Ergebnis: Der Punkt hat die Koordinaten $P(2|0|1)$.

Aufgaben

564 Die Ebene ε ist durch ihre Spurpunkte festgelegt:

a) $A(4|0|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|7)$

b) $A(5|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|10)$

(1) Stelle diese Punkte und die Ebene grafisch in einem Koordinatensystem mithilfe des Spurdreiecks dar!

(2) Gib die Gleichung der Ebene in Parameterform an!

565 Wie 564:

a) $A(6|0|0)$, $B(0|-4|0)$, $C(0|0|6)$

b) $A(5|0|0)$, $B(0|5|0)$, $C(0|0|-3)$

566 Bestimme die Gleichung der Ebene ε, die durch die drei Punkte $A(3|-1|4)$, $B(5|-2|1)$ und $C(0|-3|4)$ gegeben ist. Gib zwei weitere Punkte an, die auf der Ebene ε liegen!

567 Eine Ebene ist durch drei Punkte A, B und C gegeben. Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes P, der auf der Ebene liegt.

a) $A(1|0|1)$, $B(1|5|0)$, $C(-1|4|-1)$, $P(2|3|p_3)$

b) $A(2|1|4)$, $B(2|7|3)$, $C(0|6|2)$, $P(2|5|p_3)$

568 Bestimme die Ebenengleichungen der vier Begrenzungsflächen der dreiseitigen Pyramide $ABCS$:

a) $A(0|0|0)$, $B(1|5|-2)$, $C(-1|3|1)$, $S(1|2|8)$

b) $A(5|0|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|0)$, $S(0|0|7)$

c) $A(-2|-3|4)$, $B(1|7|-1)$, $C(-4|2|1)$, $S(-1|3|9)$

d) $A(4|4|1)$, $B(1|6|2)$, $C(-3|1|3)$, $S(-1|5|-9)$

569 Untersuche, ob die Punkte $P(2|3|1)$, $Q(2|6|2)$ und $R(0|3|9)$ auf der Ebene

$$\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ liegen!

570 Überprüfe, ob die beiden Ebenen

ε_1: $[A(-6|0|8), B(11|8|7), C(-10|6|6)]$ und

$$\varepsilon_2\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ identisch sind!

571 Zwei Gerade g_1 und g_2 sind gegeben.

Zeige, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene, in der die beiden Geraden liegen.

a) $g_1[M(5|4|2), N(2|1|3)]$,
$g_2[P(-1|-2|4), Q(4|2|4)]$

b) $g_1[M(2|0|0), N(4|-2|-4)]$,
$g_2[P(1|1|2), Q(-2|0|-4)]$

572 Überprüfe, ob die vier Punkte ein ebenes Viereck bilden:

a) $A(4|-1|0)$, $B(5|5|0)$, $C(-1|7|0)$, $D(-2|1|0)$

b) $A(1|2|-3)$, $B(4|-1|2)$, $C(3|5|1)$, $D(-1|14|-5)$

c) $A(2|3|-1)$, $B(1|7|2)$, $C(-1|4|3)$, $D(-2|8|1)$

d) $A(1|1|1)$, $B(0|10|0)$, $C(-1|-1|4)$, $D(2|12|-3)$

573 Überprüfe, ob die Punkte ein ebenes Vieleck bilden, d. h. in einer Ebene liegen.

a) $A(5|2|1)$, $B(9|-4|3)$, $C(6|-1|7)$,
$D(5|-1|12)$, $E(8|-1|-3)$, $F(10|4|-2)$

b) $A(-1|3|2)$, $B(1|5|8)$, $C(3|4|5)$,
$D(5|3|2)$, $E(6|1|-4)$, $F(7|2|-1)$

c) $A(-4|0|-3)$, $B(-1|2|-6)$, $C(0|0|-2)$,
$D(-2|-4|5)$, $E(-9|-6|7)$, $F(-11|-10|14)$

d) $A(3|7|8)$, $B(0|4|14)$, $C(3|6|9)$,
$D(0|5|13)$, $E(8|10|0)$, $F(4|7|7)$

574 Gib die Ebenengleichungen der

a) xy-Ebene, **b)** yz-Ebene, **c)** xz-Ebene an!

575 Beschreibe die Lage der Ebenen, die durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden, und nenne einige ihrer Eigenschaften:

a) $$\varepsilon\colon X(s,t) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\varepsilon\colon X(s,t) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Überlege, was es bedeutet, dass hier kein (Einstiegs-)Punkt angegeben ist.

4.8 Ebenengleichung in Normalvektorform

Wir können eine Ebene mit ihrem Normalvektor $\vec{n}$ und einem Einstiegspunkt A festlegen. Dann gilt für jeden Punkt X der Ebene:

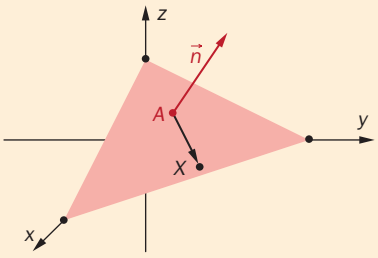
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AX} \;\Leftrightarrow\; \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{n} \cdot (X - A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{n} \cdot X - \vec{n} \cdot A = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$$

Ebenengleichung in Normalvektorform

ε: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ … allgemeiner Punkt der Ebene

$\vec{n}$ … Normalvektor zu ε, NV(ε)

A … (Einstiegs-)Punkt



576 Die Ebene ε ist durch den Einstiegspunkt $A(0|0|2)$ und durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Ebenengleichung in Normalvektorform!

Ausführung: Der Normalvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ … NV(ε)

Mit dem Einstiegspunkt A erhalten wir ε: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$, also $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ daher:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6$$

Hinweis

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten:

ε: $4x - 2y + 3z = 6$

Die Koeffizienten der Unbekannten x, y und z der linearen Gleichung sind genau die Komponenten des Normalvektors.

Allgemein: Aus der **allgemeinen Ebenengleichung** $ax + by + cz = d$ können wir sofort die Koordinaten eines Normalvektors $\vec{n}$ der Ebene ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

577 Ist die Ebene ε: $3x + 4y - z = 3$ parallel zur xy-Ebene?

Ausführung: Der Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zur z-Achse. Daher ist die Ebene nicht parallel zur xy-Ebene.

578 Sind die beiden Ebenen ε_1: $2x - 7y + 3z = 5$ und ε_2: $-6x + 21y - 9z = 17$ parallel?

Ausführung: Wir vergleichen die Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der beiden Ebenen:

NV(ε_1) … $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und NV(ε_2) … $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind parallel.

Ergebnis: Die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 sind parallel.

Aufgaben

579 Gib die Ebenengleichung in Normalvektorform an:

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P(2|3|-1)$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(5|-4|1)$

580 Gib die Ebenengleichung in Normalvektorform an:

a) $A(0|0|-4)$, $B(1|5|1)$, $C(-3|0|4)$

b) $A(4|1|-3)$, $B(1|6|-1)$, $C(-2|3|5)$

c) $A(4|0|-1)$, $B(2|3|2)$, $C(1|-3|6)$

d) $A(0|1|1)$, $B(1|-2|1)$, $C(-2|4|1)$

581 Gib die Ebenengleichungen der Koordinatenebenen in Normalvektorform an:

a) *xy*-Ebene **b)** *xz*-Ebene **c)** *yz*-Ebene

In welche Richtung weist jeweils der Normalvektor?

582 Gib die Ebenengleichungen der vier Begrenzungsflächen der dreiseitigen Pyramide in Normalvektorform an:

a) $A(0|0|0)$, $B(1|5|-2)$, $C(-1|3|1)$, $S(1|2|8)$

b) $A(5|0|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|0)$, $S(0|0|7)$

c) $A(-2|-3|4)$, $B(1|7|-1)$, $C(-4|2|1)$, $S(-1|3|9)$

d) $A(4|4|1)$, $B(1|6|2)$, $C(-3|1|3)$, $S(-1|5|-9)$

583 Bestimme die Normalvektorform der Ebenengleichungen, die in Parameterform gegeben sind. Welcher Punkt liegt auf allen vier Ebenen?

a) ε_1: $X(s, t) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) ε_2: $X(s, t) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) ε_3: $X(s, t) = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) ε_4: $X(s, t) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

584 Gib die Normalvektorform der Symmetrieebene zwischen den beiden Punkten an!

a) $A(3|-2|4)$ und $B(1|6|2)$

b) $A(-1|-5|-6)$ und $B(5|-1|4)$

585 Untersuche, ob die Ebenen parallel sind!

a) ε_1: $4x - 10y + 14z = 33$
ε_2: $-2x + 5y - 7z = 35$

b) ε_1: $-9x + 12y + 51z = -13$
ε_2: $x - 4y - 17z = 23$

586 Gib die Gleichung der Ebene, von der der Einstiegspunkt *A* und die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben sind, in Normalvektorform an!

a) $A(-1|5|0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A(2|1|-3)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

587 Gebt die Gleichung der Ebene, von der drei Punkte *A*, *B* und *C* gegeben sind, in Parameterform und in Normalvektorform an!

a) $A(4|7|5)$, $B(-2|3|0)$, $C(0|8|1)$

b) $A(0|3|4)$, $B(1|-2|6)$, $C(3|-2|-4)$

Diskutiert und begründet, welche Form der Ebenengleichung günstiger ist!

588 Begründet, dass der Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene alleine die Lage der Ebene nicht ausreichend genau beschreibt! Was legt der Normalvektor für die Ebene fest?

589 **a)** Beschreibt ein Verfahren, wie zu einer Ebene, die in Normalvektorform gegeben ist, die Darstellung in Parameterform gefunden werden kann!

b) Gegeben ist die Ebene ε: $2x - y + 3z = 5$. Finde eine Parameterdarstellung der Ebene!

c) Vergleicht eure Ergebnisse! Ist die Parameterdarstellung eindeutig? Begründet eure Antwort!

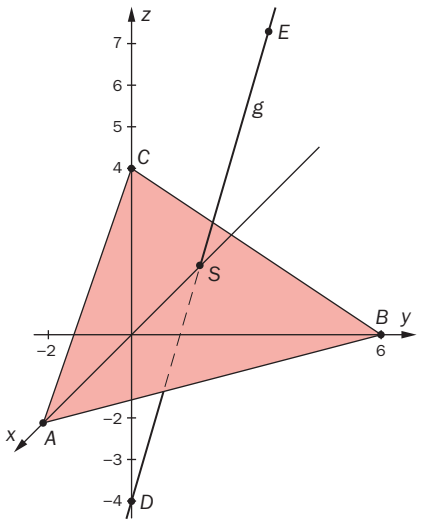
590 Betrachtet Ebenen, die durch den Koordinatenursprung verlaufen. Was lässt sich über ihre Gleichungen in Parameterform und in Normalvektorform aussagen?

591 Betrachtet Ebenen, die parallel zur *xy*-Ebene liegen. Was lässt sich über ihre Gleichungen in Parameterform und in Normalvektorform aussagen?

4.9 Gerade und Ebene

592 Gegeben sind eine Ebene ε und eine Gerade g. Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene ε!

$\varepsilon[A(6|0|0), B(0|6|0), C(0|0|4)]$, $g[D(0|0|-4), E(2|4|8)]$



Ausführung: Für die Ebenengleichung erhalten wir:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: \; X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für die Geradengleichung erhalten wir:

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{ somit } \quad g: \; X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt S erfüllt beide Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen die Vektorgleichung als System von drei linearen Gleichungen dar und lösen es durch geschicktes Eliminieren:

(I)	$0 + u = 6 - s - 3t$	$\mid \cdot 2$
(II)	$0 + 2u = 0 + s$	
(III)	$-4 + 6u = 0 + 2t$	$\mid \cdot 3$
(IV $= 2 \cdot$ I $+ 3 \cdot$ III)	$-12 + 20u = 12 - 2s$	
(V $= 2 \cdot$ II $+$ IV)	$-12 + 24u = 12$	$\mid + 12 \;\Rightarrow\; 24u = 24 \;\Rightarrow\; u = 1$

Aus (II) $2 \cdot 1 = 0 + s \;\Rightarrow\; s = 2$; aus (III) $-4 + 6 \cdot 1 = 0 + 2t \;\Rightarrow\; t = 1$

Wir setzen $u = 1$ in die Geradengleichung ein und erhalten für die Koordinaten des Schnittpunkts:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle setzen wir $s = 2$ und $t = 1$ in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ gleiches Ergebnis!}$$

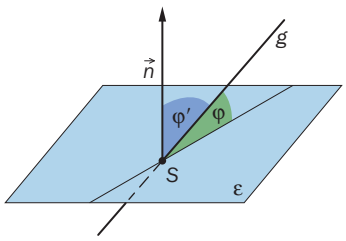
Ergebnis: Schnittpunkt $S(1|2|2)$

593 Berechne den Schnittpunkt und den Winkel, den die Gerade g: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene ε: $2x + y - z = 3$ einschließen!

Ausführung: Der Schnittpunkt ist ein Punkt auf der Geraden g, der auch die Ebenengleichung erfüllt. Wir können daher $x(t) = 1 + t$, $y(t) = -t$, $z(t) = 2$ in die Ebenengleichung einsetzen:

ε: $2 \cdot (1 + t) + (-t) - (2) = 3 \;\Leftrightarrow\; t = 3 \;\Rightarrow\; S(4|-3|2)$

Der gesuchte Winkel wird von der Geraden und ihrer Normalprojektion auf die Ebene aufgespannt.



Wir berechnen zunächst den Winkel φ' zwischen dem Richtungsvektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden und dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene: $\cos\varphi' = \frac{\vec{g} \cdot \vec{n}}{|\vec{g}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \varphi' \approx 73{,}2°$

Beachte: Der gesuchte Winkel φ ist der Komplementärwinkel zu φ', also $\varphi = 90° - \varphi'$.

Ergebnis: Schnittpunkt $S(4|-3|2)$ und Schnittwinkel $\varphi \approx 16{,}8°$.

Aufgaben

594 Wiederhole, wie sich

a) aus dem skalaren Produkt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

b) aus dem vektoriellen Produkt
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen lässt. Wie lassen sich die beiden Beziehungen geometrisch deuten?

595 Berechne den Schnittpunkt und den Winkel, den die Gerade g und die Ebene ε einschließen!

a) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon 3x - 4y + z = 15$

b) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon x + y + z = -5$

c) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon 4x - 3y + 2z = 8$

d) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon 3x + 2y - 5z = 15$

596 Fasst alle Möglichkeiten der Lagebeziehungen einer Geraden g und einer Ebene ε zusammen. Fertigt geeignete Skizzen an und beschreibt die möglichen Schnittmengen!

597 Legt die Koordinaten der Eckpunkte eines 5 E hohen Quaders fest, dessen Basisrechteck die Abmessungen 3 E und 7 E hat.

a) Gebt die Lagebeziehungen der Flächen- und Raumdiagonalen zu den Flächen des Quaders an!

b) Berechnet die Winkel, die die Flächendiagonalen und die Raumdiagonalen mit der Basisebene einschließen!

598 Welchen Schnittpunkt bilden die folgenden Geraden und Ebenen? Welchen Winkel schließen sie ein?

a) $\varepsilon\colon X(s,t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g\colon X(u) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\varepsilon\colon X(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g\colon X(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

599 Liegt eine Gerade parallel zur Ebene, und liegt der Einstiegspunkt der Geraden nicht auf der Ebene, dann haben die Gerade und die Ebene keinen Punkt gemeinsam.

a) Stellt diesen Sachverhalt in einer geeigneten Skizze dar!

b) Begründet, warum diese Aussage richtig ist!

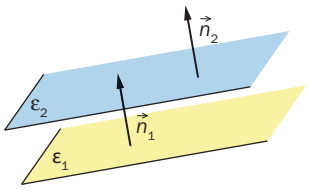
c) Erfindet eine Regel, mit der rasch überprüft werden kann, ob eine Gerade parallel zu einer Ebene ist! Die Gleichung der Ebene soll dabei in Normalvektorform vorliegen.

600 Der Richtungsvektor einer Geraden ist parallel zu einer Ebene, ihr Einstiegspunkt liegt auf der Ebene. **a)** Beschreibt die Lagebeziehung.

b) Erfindet eine konkrete Angabe.

4.10 Lage von zwei Ebenen

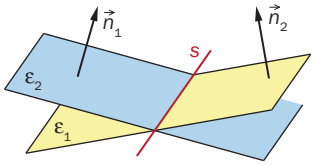
Für zwei Ebenen sind folgende Lagebeziehungen möglich:



Die Ebenen sind parallel.

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

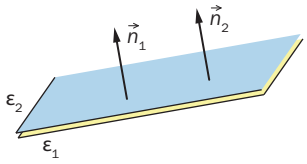
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$



Die Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade s.

$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$



Die Ebenen sind identisch.

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

Identische Ebenen haben äquivalente Gleichungen: ε_1: $4x - 3y + 5z = 2 \quad | \cdot 3$

ε_2: $12x - 9y + 15z = 6$

601 Zeige, dass die beiden Ebenen ε_1: $2x + 7y - z = 1$ und ε_2: $4x + 14y - 2z = 1$ parallel sind!

Ausführung: Betrachte die Normalvektoren: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \vec{n}_n = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Die beiden Ebenen sind parallel oder identisch.

Zwar ist $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, aber die beiden linearen Gleichungen sind **nicht** äquivalent und die Ebenen damit nicht identisch.

Ergebnis: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

602 Zeige, dass die beiden Ebenen ε_1: $x - 2y + 2z = 3$ und ε_2: $2x + y - z = 1$ nicht parallel sind, und berechne die Gleichung der Schnittgeraden g!

Ausführung:
Betrachte die Normalvektoren: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \nparallel \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Die Ebenen schneiden einander.

Das lineare Gleichungssystem in x, y und z lässt sich nicht eindeutig lösen, da wir mehr Unbekannte als Gleichungen haben:

ε_1: $x - 2y + 2z = 3$
ε_2: $2x + y - z = 1$

In dieser Situation können wir eine Unbekannte frei wählen und setzen z. B. $z = t$ als Parameter. Damit erhalten wir ein Gleichungssystem in den Unbekannten x und y:

ε_1: $x - 2y + 2t = 3 \quad | \cdot (-2)$
ε_2: $2x + y - t = 1$
$5y - 5t = -5 \quad | : 5 \Rightarrow y - t = -1 \Rightarrow y = -1 + t$
einsetzen: $\Rightarrow x = 1$

Nun fassen wir zusammen:
$x = 1 = 1 + 0 \cdot t$
$y = -1 + t = -1 + 1 \cdot t$
$z = t = 0 + 1 \cdot t$

Aus dem Gleichungssystem lesen wir die gesuchte Geradengleichung in Parameterform ab:

Ergebnis: Schnittgerade g: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgaben

603 Untersuche die Lagebeziehung der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 und berechne gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden g!

a) ε_1: $x + y + z = 1$
ε_2: $x - y + z = 1$

b) ε_1: $x + y + 4z = 1$
ε_2: $x + 7z = 3$

c) ε_1: $2x + y + 5z = 1$
ε_2: $x - y + 7z = 5$

d) ε_1: $3x - 2y + 2z = 13$
ε_2: $5x - 3y + 3z = 2$

604 Wie 603:

a) ε_1: $x + y + z = 1$
ε_2: $4x + 4y + 4z = 4$

b) ε_1: $x + 2y - 3z = 1$
ε_2: $5x + 10y - 15z = -5$

c) ε_1: $3x + 2y + 4z = 1$
ε_2: $9x + 6y + 12z = 3$

605 Wie 603:

a) ε_1: $x + y + z = 1$
ε_2: $4x + 4y + 4z = 8$

b) ε_1: $x + 2y - 3z = 1$
ε_2: $5x + 10y - 15z = -10$

c) ε_1: $3x + 2y + 4z = 1$
ε_2: $9x + 6y + 12z = 12$

d) ε_1: $14x - 7y + 28z = 13$
ε_2: $2x - y + 4z = 2$

606 Wie 603:

a) ε_1: $3x - 2y + z = 4$

$$\varepsilon_2: X(s,t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) ε_1: $X(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_2: X(s,t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) ε_1: $X(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

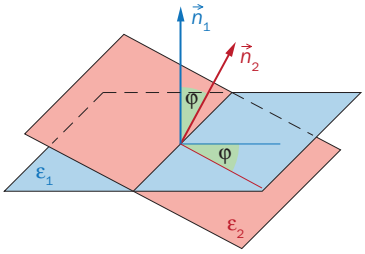
$$\varepsilon_2: X(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

607 Stellt einen Entscheidungsbaum auf, wie ihr am besten vorgeht, um die Lagebeziehung zweier Ebenen zu bestimmen:

a) Welche Rechenschritte führt ihr dabei nacheinander aus?

b) An welchen Stellen endet die Berechnung?

608 Zwei einander schneidende Ebenen ε_1 und ε_2 bilden einen bestimmten Schnittwinkel:



a) Begründet, dass der Schnittwinkel in einer Ebene angegeben wird, die zu beiden Ebenen normal steht!

b) Begründet, dass dieser Winkel gleich ist dem (spitzen) Winkel zwischen den Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der beiden Ebenen ε_1 und ε_2!

c) Beschreibt, in welchen Schritten der Schnittwinkel zweier Ebenen zweifelsfrei bestimmt werden kann!

609 Berechnet die Schnittwinkel zwischen den Ebenen aus Aufgabe 603!

610 Diskutiert und begründet, welchen Winkel zwei parallele Ebenen bilden!

611 Stelle mittels Computer

a) eine Ebene in Parameterform

b) eine Ebene in allgemeiner Form

dreidimensional dar!

612 Gib an, wie du mit dem Computeralgebrasystem

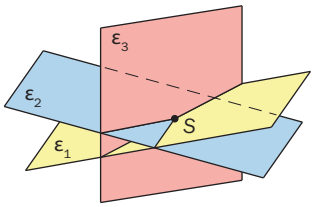
a) die Gleichung der Schnittgeraden s zwischen zwei Ebenen,

b) den Winkel zwischen zwei einander schneidenden Ebenen

angeben kannst.

4.11 Gleichungssysteme und Ebenen

Wenn wir Ebenen schneiden, erhalten wir ein Gleichungssystem in drei Unbekannten. Umgekehrt können wir die Lösung eines Gleichungssystems in drei Unbekannten geometrisch als Schnittmenge von Ebenen deuten.



Im Normalfall schneiden drei Ebenen einander in einem Punkt S – das Gleichungssystem der drei linearen Gleichungen hat genau eine Lösung.

613 Löse das Gleichungssystem und interpretiere die Lösung geometrisch:

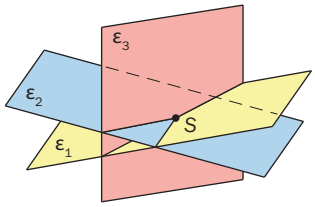
ε_1: $x + 2y - z = 1$
ε_2: $3x + y + 2z = 3$
ε_3: $2x - y + 4z = 2$

Ausführung: Das lineare Gleichungssystem führt auf die Lösung:
$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$
Die drei Gleichungen beschreiben drei Ebenen, die sich in einem Punkt schneiden.

Ergebnis: Schnittpunkt $S(1|0|0)$

Die folgenden Abbildungen zeigen die möglichen Lagebeziehungen dreier Ebenen. Lineare Gleichungssysteme haben entweder eine, keine oder unendlich viele Lösungen (siehe Abschnitt 2.2). Geometrisch entsprechen dem die folgenden Fälle:

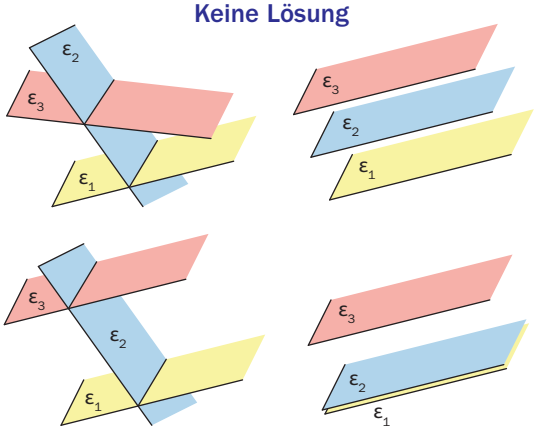
Eindeutige Lösung



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \{S\}$

Ein Punkt – der Schnittpunkt – liegt auf allen drei Ebenen.

Keine Lösung



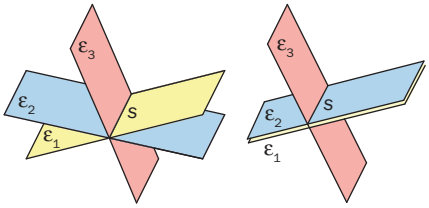
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = 0$

Je zwei Ebenen haben eine Schnittgerade.

Ebenen liegen parallel bzw. zwei sind identisch.

Unendlich viele Lösungen

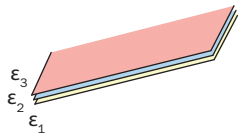
Schnittgerade



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = s$

Die drei Ebenen haben eine Schnittgerade gemeinsam.

Schnittebene



$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

Die Ebenen sind identisch, sie haben alle Punkte gemeinsam.

Aufgaben

614 Löse das Gleichungssystem und interpretiere die Lösung geometrisch!

a) ε_1: $x + 2y + 3z = -1$
ε_2: $3x - y - 2z = 4$
ε_3: $4x + y = -4$

b) ε_1: $x + 2y - z = 1$
ε_2: $3x + y + 2z = 3$
ε_3: $2x + 4y - 2z = 2$

c) ε_1: $x - y + z = 5$
ε_2: $2x + 2y - 3z = 4$
ε_3: $3x + y - 2z = 9$

d) ε_1: $x - y + z = 5$
ε_2: $2x + 2y - 3z = 4$
ε_3: $3x + y - 2z = 5$

615 Wie 614:

a) ε_1: $x - 2y + z = 4$
ε_2: $x - y - z = 0$
ε_3: $2x - 4y + z = 1$

b) ε_1: $x + y - z = -2$
ε_2: $x - 4y + 5z = -5$
ε_3: $x - 2y + z = 9$

c) ε_1: $8x + y - 2z = -15$
ε_2: $x - y + z = -15$
ε_3: $x + y - z = 5$

d) ε_1: $3x - 2y - z = -2$
ε_2: $x - 4y - 5z = -5$
ε_3: $x - 2y + z = 4$

616 Wie 614:

a) ε_1: $x + 6y - 5z = 2$
ε_2: $x - y + z = 2$
ε_3: $3x + 5y - 3z = 6$

b) ε_1: $x + 2y - 5z = 2$
ε_2: $x - y + z = 2$
ε_3: $x - z = 2$

c) ε_1: $x + y - 5z = 2$
ε_2: $x - y + z = 8$
ε_3: $x - z = 2$

d) ε_1: $4x - y + 3z = 11$
ε_2: $x + 2y - 5z = -8$
ε_3: $5x + y - 2z = 3$

617 Untersuche, wie die Ebenen zueinander liegen, und begründe, warum sie keine Punkte gemeinsam haben!

a) ε_1: $6x - 5y + 2z = -1$
ε_2: $-12x + 10y - 4z = \boxtimes 5$
ε_3: $-6x + 5y - 2z = -9$

b) ε_1: $2x + 3y - z = 2$
ε_2: $-2x - 3y + z = 5$
ε_3: $3x - 4y + 2z = -3$

c) ε_1: $4x + 3y - z = 10$
ε_2: $x - 2y + 3z = 6$
ε_3: $7x + 4y - 5z = 8$

d) ε_1: $2x - 5y + z = 3$
ε_2: $4x - 10y + 2z = 6$
ε_3: $-6x + 15y - 3z = 21$

618 Wie 617:

a) ε_1: $x - y + z = -1$
ε_2: $4x - 4y + 4z = -8$
ε_3: $-2x + 2y - 2z = 2$

b) ε_1: $2x - 3y + 5z = -3$
ε_2: $-6x + 9y - 15z = 10$
ε_3: $4x - 6y + 10z = 15$

c) ε_1: $7x - 11y - z = 12$
ε_2: $x - 3y - 5z = 2$
ε_3: $3x - 4y + 2z = -6$

619 Berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts der gegebenen Ebenen. Nützt die besonderen Koeffizienten des Gleichungssystems, um rasch die Lösung zu finden!

a) ε_1: $x - y - z = 1$
ε_2: $x + y - z = 1$
ε_3: $x + y + z = 3$

b) ε_1: $x + y = 1$
ε_2: $y + z = 1$
ε_3: $x + z = 0$

c) ε_1: $x + y + z = 1$
ε_2: $x - y - z = 1$
ε_3: $x + z = -1$

d) ε_1: $14x - 23y + 17z = 0$
ε_2: $5x + 23y - 19z = 0$
ε_3: $31x + 11y - z = 0$

4.12 Abstandsberechnungen

Abstand eines Punktes von einer Geraden

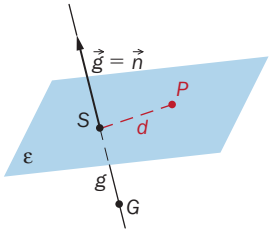
620 **Abstandsberechnung mittels Normalebene durch P**

Berechne den Abstand des Punktes $P(0|5|4)$ von der Geraden g: $X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ausführung: Den *Normalabstand* von P zu g finden wir in einer Ebene, die durch den Punkt P verläuft und *normal* auf g liegt. Der Richtungsvektor $\vec{g}$ der Geraden ist Normalvektor zu dieser Ebene:

ε: $\vec{g} \cdot X = \vec{g} \cdot P$

ε: $2x - y + 2z = 3$



Wir bestimmen den Schnittpunkt $\{S\} = g \cap \varepsilon$:

g: $\begin{matrix} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 9 + 2t \end{matrix}$ in ε: $2(2 + 2t) - (1 - t) + 2(9 + 2t) = 3 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow S(-2|3|5)$

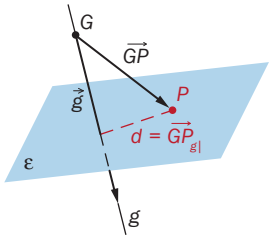
Der gesuchte Abstand d ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SP}$: $d = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ E

Ergebnis: $d(P, g) = 3$ E

Abstandsberechnung mittels vektoriellem Produkt

In Abschnitt 4.6 haben wir mithilfe des vektoriellen Produkts eine Beziehung für den Normalabstand eines Punktes von einer Geraden hergeleitet.
Ist $\overrightarrow{GP}$ der Vektor von einem beliebigen Punkt G der Geraden zum entfernten Punkt P und $\vec{g}$ der Richtungsvektor der Geraden, so ergibt sich der Abstand zu:

$$d = |\overrightarrow{GP}_{g|}| = |\overrightarrow{GP} \times \vec{g}_0|$$



Abstand eines Punktes von einer Ebene

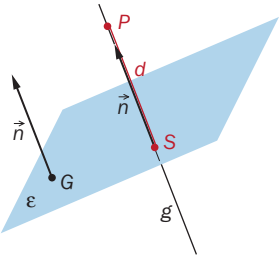
621 **Abstandsberechnung mittels normaler Geraden durch P**

Berechne den Normalabstand des Punktes $P(7|-7|4)$ von der Ebene ε: $2x - 2y + z = 5$.

Ausführung: Wir finden den Normalabstand mithilfe der Geraden g, die durch den Punkt P verläuft und normal auf die Ebene ε steht. Der Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene ε ist Richtungsvektor der Geraden:

g: $X(t) = P + t \cdot \vec{n}$

g: $X(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Schnittpunkt $\{S\} = g \cap \varepsilon$:

$2(7 + 2t) - 2(-7 - 2t) + (4 + t) = 5 \Rightarrow t = -3$

Wir erhalten die Koordinaten: $S(1|-1|1)$

Der gesuchte Abstand d ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SP}$: $d = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$ E

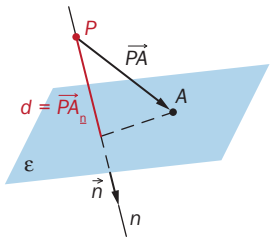
Ergebnis: $d(P, \varepsilon) = 9$ E

Abstandsberechnung mittels skalarem Produkt (Normalprojektion)

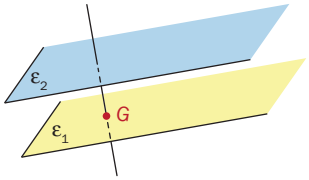
In Abschnitt 4.3 haben wir mithilfe des skalaren Produkts eine Beziehung für die Normalprojektion eines Vektors auf einen anderen Vektor hergeleitet.

Ist $\overrightarrow{PA}$ der Vektor, der vom entfernten Punkt P zu einem beliebigen Punkt A der Ebene zeigt, und $\vec{n}$ ein Normalvektor der Ebene, so ergibt sich der Abstand zu:

$$d = |\overrightarrow{PA}_n| = |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_0| \qquad \text{... Hesse'sche Abstandsformel}$$



Parallele Ebenen
haben einen eindeutigen Abstand zueinander: Berechne den Normalabstand des Einstiegspunktes G der einen Ebene ε_1 zur zweiten Ebene ε_2.



Aufgaben

622 Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g:

a) $P(-8|0|0)$, $g\colon X(s) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$

b) $P(3|4|2)$, $g\colon X(s) = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

c) $P(0|0|0)$, $g\colon X(s) = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

d) $P(6|2|-3)$, $g\colon X(s) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

623 Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene ε:

a) $P(1|1|1)$, $\varepsilon\colon -2x - 2y + 3z = 16$

b) $P(3|-5|2)$, $\varepsilon\colon x + 3y - 7z = 1$

c) $P(1|3|-4)$, $\varepsilon\colon 3x - y + 5z = 4$

d) $P(0|1|-1)$, $\varepsilon\colon 2x + y - 2z = 5$

624 Überprüfe, ob die Ebenen ε_1 und ε_2 parallel sind und berechne ihren Abstand.

a) $\varepsilon_1\colon\ x - 4y + 3z = 1$
$\varepsilon_2\colon\ 2x - 8y + 6z = 0$

b) $\varepsilon_1\colon\ 6x - 3y + 9z = 1$
$\varepsilon_2\colon -2x + y - 3z = 5$

c) $\varepsilon_1\colon\ 6x - 3y + 6z = -7$
$\varepsilon_2\colon -2x + y - 2z = 3$

d) $\varepsilon_1\colon\ 15x - 20y + 5z = 1$
$\varepsilon_2\colon -3x + 4y - z = -3$

625 Überprüfe, ob die Gerade g parallel zur Ebene ε ist, und berechne den Abstand der Geraden von der Ebene!

a) $\varepsilon\colon\ x - 2y + 2z = 3$
$g\colon X(t) = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\varepsilon\colon\ 2x + y - 2z = -8$
$g\colon X(t) = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

c) $\varepsilon\colon\ x + 2z = -4$
$g\colon X(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

626 Berechne jeweils den Abstand zum Koordinatenursprung:

a) $P(6|-3|6)$

b) $g\colon X(t) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\varepsilon\colon\ 4x - 2y + 4z = 11$

627 Fasst alle Varianten der Abstandsberechnungen zusammen. Weist darauf hin, dass es sich in jedem Fall um den Normalabstand handelt, und gebt alle wesentlichen Rechenschritte an.

628 Entwickle mit dem Computeralgebrasystem eine Funktion, die

a) den kürzesten Abstand eines Punktes von einer Geraden,

b) den kürzesten Abstand eines Punktes von einer Ebene

ermittelt.

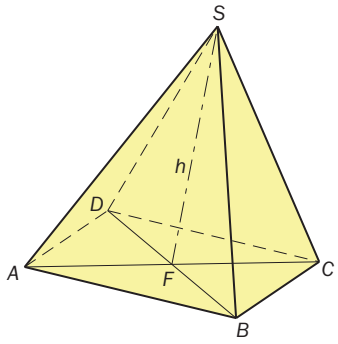
4.13 Geometrische Anwendungen, Volumsberechnungen

629 Gegeben ist eine quadratische Pyramide $ABCDS$ mit $A(-2|-8|2)$, $B(6|0|6)$, $C(2|8|-2)$, $D(-6|0|-6)$ und $S(-8|4|8)$.

a) Zeige, dass eine gerade Pyramide vorliegt.

b) Zeige, dass $\overrightarrow{FS}$ normal auf die Grundfläche steht.

c) Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.



Ausführung:

a) Eine gerade Pyramide liegt dann vor, wenn die Seitenkanten gleich lang sind.

$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{CS}| = |\overrightarrow{DS}| = 6 \cdot \sqrt{2}$

b) Dies folgt bereits aus Teil a). Wir können dies aber auch zeigen, indem wir nachweisen, dass der Vektor $\overrightarrow{FS}$ ein Vielfaches des Normalvektors der Grundfläche ist:

$\vec{F} = \frac{1}{2}(A + C) = (0|0|0) \Rightarrow \overrightarrow{FS} = (-8|4|8)$,

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -96 \\ 48 \\ 96 \end{pmatrix} = 48 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich :

$\overrightarrow{FS} = t \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t = 4$.

c) Aus $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 12$, sowie $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = 12$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ folgt, dass die Grundfläche ein Quadrat ist. $h = |\overrightarrow{FS}| = 12 \Rightarrow V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{144 \cdot 12}{3} = 576\ \text{E}^3$

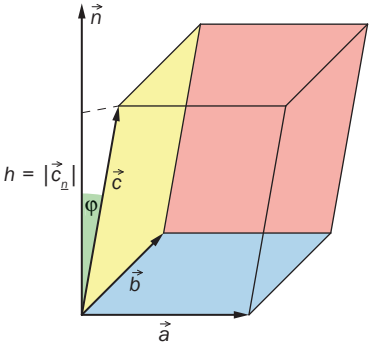
Für die Oberflächenberechnung können wir z. B. das vektorielle Produkt verwenden:

$O = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + 4 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + 2 \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}| = 144 \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 466\ \text{E}^2$

Hinweis: Auch zur Volumsberechnung hätten wir Vektorprodukte nutzen können.

Volumen des Parallelepipeds (Spats, schiefen Prismas)

Für das Volumen des Parallelepipeds gilt $V = G \cdot h$, wobei die Grundfläche $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$ und h die Länge der Normalprojektion des Vektors $\vec{c}$ auf den Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ sind.



Damit erhalten wir: $V = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}_{\vec{n}}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$

Wegen $\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$

ist daher: **Volumen des Parallelepipeds:** $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Bemerkung: Aus dem Vektorprodukt für das Parallelepiped erhalten wir „als Zugabe“ (durch Zerschneiden des Parallelepipeds) Volumsbeziehungen für die quadratische und dreiseitige Pyramide (Tetraeder):

Quadratische Pyramide:

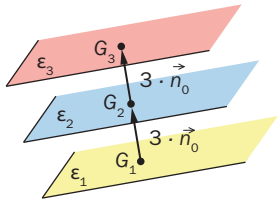
$V = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Dreiseitige Pyramide (Tetraeder):

$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

630 Gegeben ist die Ebene ε_1: $2x - y + 2z = 3$. Bestimme die Gleichungen zweier Parallelebenen, die von ε_1 3 E und 6 E entfernt sind!

Ausführung: Wir gehen vom Einstiegspunkt G_1 der Ebene ε_1 drei Einheitsvektoren $\vec{n}_0$ weiter und erhalten so einen Einstiegspunkt für die Ebene ε_2.
Um G_1 zu erhalten, wählen wir zwei Koordinaten „willkürlich“ und berechnen die dritte aus der Ebenengleichung,



z. B.: $x = 1,\ y = 3 \Rightarrow 2 - 3 + 2z = 3 \Rightarrow z = 2$

$\Rightarrow G_1 = (1|3|2),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit erhalten wir: $G_2 = G_1 + 3 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Daher: ε_2: $2x - y + 2z = 12$ und (analog) ε_3: $2x - y + 2z = 21$

Aufgaben

631 Berechne das Volumen des Parallelepipeds mithilfe von Vektorprodukten:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

632 Für das Volumen einer Pyramide gilt allgemein $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Werden die Grundfläche einer Pyramide durch das Parallelogramm mit den Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die Seitenkante AS durch den Vektor $\vec{c}$ gebildet, so gilt für das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$

Skizziere eine solche Pyramide, zeichne die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein und begründe die Formel!

633 Berechne das Volumen der Pyramide mit der Formel aus Aufgabe 632:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

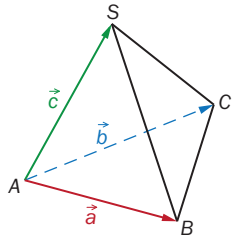
c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

634 Unter welchen Voraussetzungen erhältst du mit der Beziehung $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ein negatives Ergebnis? Begründe, warum daher für das Volumen eines beliebigen Parallelepipeds gilt:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$

635 Ein Tetraeder ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Drei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ legen diesen Körper fest.



a) Leite die Volumsformel für Tetraeder her:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$

b) Berechne das Volumen des Tetraeders, der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ festgelegt wird!

636 Berechne mit der Formel aus Aufgabe 635 das Volumen des Tetraeders $ABCS$: $A(0|-1|2)$, $B(5|2|1)$, $C(1|6|0)$, $S(0|0|9)$

Vermischte Aufgaben

637 Berechne jeweils den Umfang des Vielecks:

a) $A(5|2|1)$, $B(9|-4|3)$, $C(6|-1|7)$, $D(5|-1|12)$, $E(8|-1|-3)$, $F(10|4|-2)$

b) $A(-1|3|2)$, $B(1|5|8)$, $C(3|4|5)$, $D(5|3|2)$, $E(6|1|-4)$, $F(7|2|-1)$

c) $A(-4|0|-3)$, $B(-1|2|-6)$, $C(0|0|-2)$, $D(-2|-4|5)$, $E(-9|-6|7)$, $F(-11|-10|14)$

d) $A(3|7|8)$, $B(0|4|14)$, $C(3|6|9)$, $D(0|5|13)$, $E(8|10|0)$, $F(4|7|7)$

638 Ein dreiseitiges Prisma hat die Basis ABC $[A(1|4|1), B(4|2|0), C(-1|4|2)]$.

Der Eckpunkt D ist gegeben mit $D(-1|3|-3)$.

a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte E und F.

b) Berechne alle Kantenlängen des dreiseitigen Prismas.

639 Berechne mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$:

a) $4 \cdot \vec{a} - \vec{b}$ **b)** $2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$

c) $(-2) \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b}$ **d)** $-\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$

640 Die drei Koordinatenebenen teilen den Raum in die acht **Oktanten** des räumlichen Koordinatensystems. Überlegt, wie diese Bereiche der Reihe nach aufgezählt werden könnten und nennt jeweils die zugehörigen Vorzeichen der Koordinaten in einem solchen Oktanten!

641 **a)** Spiegelt den Punkt $P(2|3|1)$ der Reihe nach an der xy-Ebene, an der yz-Ebene und an der xz-Ebene!

b) Nennt ein Verfahren, mit dem ihr Punkte mit beliebigen Koordinaten an den Koordinatenebenen spiegeln könnt!

642 **a)** Vergleicht die Spiegelung eines Punktes P an den Koordinatenachsen mit der Spiegelung eines Punktes P am Koordinatenursprung!

b) Kann für einen Punkt P im Raum auch eine Spieglung an einer Geraden g festgelegt werden? Gebt eine Abbildungsvorschrift an, falls dies überhaupt möglich ist.

643 Der Punkt $P(2|3|1)$ soll an der Ebene gespiegelt werden, die durch den Ursprung verläuft und die xz-Ebene sowie die yz-Ebene symmetrisch teilt. Gebt die Gleichung dieser Ebene an. Nennt ein Verfahren, mit dem ihr den Punkt spiegeln könnt, und berechnet die Koordinaten des gespiegelten Punktes!

644 Gegeben sind vier Punkte $A(-5|4|-1)$, $B(6|-3|5)$, $C(10|-6|19)$, $D(0|0|23)$.

a) Zeigt dass diese Punkte ein ebenes Viereck bilden.

b) Berechnet Umfang und Flächeninhalt.

c) Diskutiert, ob es für Umfang und Flächeninhalt wichtig ist, dass ein ebenes Viereck vorliegt. Begründet eure Meinung!

645 Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide $ABCS$ $[A(1|-1|2), B(1|4|2), C(-2|-1|2), S(0|0|6)]$.

a) Definiert den Fußpunkt F der Spitze S in der Ebene ABC und berechnet die Koordinaten von F!

b) Berechnet den Flächeninhalt der Grundfläche ABC, die Höhe der Pyramide und ihr Volumen auf verschiedene Arten und vergleicht die Rechenschritte sowie die Ergebnisse!

c) Spiegelt die Spitze S an der Basisfläche ABC und berechnet die Koordinaten des gespiegelten Punktes!

646 Spiegle den Punkt $S(2|6|10)$ an der Ebene, die durch die Punkte $A(-4|-9|1)$, $B(3|3|-1)$ und $C(6|-1|-3)$ geht.

647 Lege durch die Punkte $A(2|-1|3)$, $B(2|-3|1)$ und $C(4|-2|3)$ eine Ebene und gib ihre Gleichung

a) in Parameterform,

b) in Normalvektorform an.

c) Überprüfe, ob der Punkt $S(5|-1|-4)$ in der Ebene liegt.

d) Zeichne das Spurdreieck der Ebene.

648 Zeige, dass die Ebenen

ε_1: $3x - y + 2z = 8$

ε_2: $x - y + z = 7$

ε_3: $4x + 2y - z = 11$

einander in einem Punkt S schneiden und berechne auch den Abstand dieses Punktes vom Ursprung!

649 **a)** Spiegelt den Schnittpunkt S der Ebenen
ε_1: $x - y - z = 1$,
ε_2: $x + y - z = 5$
ε_3: $x + y + z = 3$
an allen Koordinatenebenen. Stellt eine Vermutung auf, welcher Körper durch S und seine Spiegelpunkte gebildet wird, und überprüft sie.

b) Bei welcher Lage des Schnittpunkts entsteht kein Körper? Gebt alle diese Fälle an!

650 Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen
ε_1: $4x - 3y + 5z = 8$,
ε_2: $2x + 3y + z = 4$
und gib gegebenenfalls die Parameterdarstellung der Schnittgeraden der Ebenen an.

651 Gegeben sind die parallelen Geraden

$$g\colon X(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h\colon X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme eine Parameterdarstellung der von g und h aufgespannten Ebene.

b) Gib eine allgemeine Ebenengleichung an.

c) Der Punkt $P(2|1|z)$ liegt auf der Ebene. Bestimme die fehlende Koordinate.

d) Zeichne das Spurdreieck der Ebene.

652 Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon X(s) = A + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad h\colon X(t) = B + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Wie lässt sich nachweisen, dass die beiden Geraden

a) identisch sind,

b) einander schneiden,

c) parallel sind,

d) windschief sind?

Gib jeweils alle Schritte an!

653 Untersuche die Lagebeziehung der Geraden

$$g\colon X(s) = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und der Ebene}$$

$$\varepsilon\colon X(t, u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

654 Wähle die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

und beweise durch direktes Nachrechnen:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

c) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

655 Verwendet die Ergebnisse von Aufgabe 654 und zeigt, dass aus $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ die „Antikommutativität“ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ folgt.

656 Berechne die Normalprojektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.

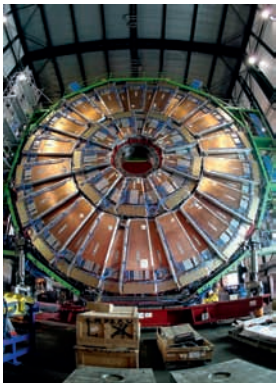
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

657 Auf ein geladenes Elementarteilchen, das sich auf der Bahn g bewegt, wirkt die Kraft $\vec{F}$ ein.

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ermittle, wie groß die Kraft in Bewegungsrichtung des Teilchens ist.



658 Die Geschwindigkeit eines Körpers wird beschrieben durch den Vektor $\vec{v}$. Seine Bahn schneidet die Gerade g.

$$g\colon X(s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit welcher Geschwindigkeit nähert er sich der Geraden g?

659 Von einer geraden, quadratischen Pyramide kennt man die Punkte $A(4|5|3)$, $B(8|1|5)$ und $C(4|y_C|9)$ der Grundfläche. Die Höhe der Pyramide beträgt 6 Einheiten.

a) Berechne y_C, D und die Spitze S.

b) Berechne die Größe einer Seitenfläche mithilfe der Dreieckshöhe h_1.

c) Berechne die Größe einer Seitenfläche mithilfe des vektoriellen Produkts.

660 Von einer geraden, quadratischen Pyramide kennt man die Punkte $B(7|y_B|2)$, $C(3|0|0)$ und $D(5|-4|4)$ der Grundfläche. Die Höhe der Pyramide beträgt 9 Einheiten.

a) Berechne y_B, A und die Spitze S.

b) Berechne die Größe einer Seitenfläche mithilfe der Dreieckshöhe h_1.

c) Berechne die Größe einer Seitenfläche mithilfe des vektoriellen Produkts.

661 Von einer geraden, rechteckigen Pyramide kennt man die Punkte $A(9|0|8)$, $B(6|6|2)$ und $C(x_C|2|0)$ der Grundfläche. Die Höhe der Pyramide beträgt 6 Einheiten.

a) Berechne x_C, D und die Spitze S.

b) Berechne den Winkel, den die Seitenfläche ABS mit der Basis einschließt.

662 Die Gerade g führt durch die Punkte $A(-2|-3|5)$ und $B(-7|-4|7)$, die Ebene ε steht senkrecht zur Geraden g und enthält den Punkt $P(1|0|-1)$.

a) Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden g.

b) Bestimme die Gleichung der Ebene ε.

c) Berechne die Koordinaten des Punktes A_1, der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene ε entsteht.

d) Schneide die Gerade g mit der Geraden h, die durch die Punkte $P(6|6|2)$ und $Q(-2|10|4)$ führt.

663 Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die Punkte $A(6|-4|2)$, $B(0|-6|7)$ und $C(16|-7|0)$ der Basis und die Spitze $S(8|10|2)$.

a) Berechne die Höhe der Pyramide.

b) Berechne die Grundfläche und das Volumen der Pyramide.

c) Welchen Winkel schließt die Kante AS mit der Grundfläche ein?

664 Welchen Winkel

a) schließt eine Raumdiagonale des Würfels mit einer Würfelkante ein?

b) schließen zwei Raumdiagonalen ein?

c) schließt eine Raumdiagonale des Würfels mit einer Würfelfläche ein?

Vektoren zum Speichern von Daten

665 Ein Marathonläufer, der für den Wien-Marathon trainiert, läuft am ersten Tag a_1 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_1 km/h. Am zweiten Tag läuft er a_2 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von b_2 km/h und am dritten Tag schließlich a_3 Stunden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von b_3 km/h.

Die Trainingsstunden pro Tag werden im Vektor $\vec{A}$ dargestellt, die jeweiligen durchschnittlichen Geschwindigkeiten beschreibt der Vektor $\vec{B}$.

a) Was bedeutet $2 \cdot \vec{A}$ in diesem Kontext?

b) Was bedeutet $\vec{A} \cdot \vec{B}$ in diesem Kontext?

c) Was bedeutet $1{,}05 \cdot \vec{B}$ in diesem Kontext?

d) Was bedeutet $0{,}92 \cdot \vec{B}$ in diesem Kontext?

666 In einem Shop werden 12 verschiedene Typen von Mobiltelefonen zum Verkauf angeboten. Die Verkaufspreise aller 12 Produkte werden in einem „Preisvektor“ $\vec{P}$ übersichtlich zusammengefasst, ein „Lagerbestandsvektor“ $\vec{L}$ fasst die Anzahlen der vor der Ladenöffnung je Typ vorhandenen Geräte übersichtlich zusammen, ein „Verkaufsvektor“ $\vec{V}$ zeigt je Typ die Anzahl der an diesem Tag verkauften Stücke:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{12} \end{pmatrix}.$$

Stelle mittels Vektorformeln

a) den Lagerbestand $\vec{S}$ bei Geschäftsschluss,

b) den Umsatz $\vec{U}$ des Geschäftstages dar.

Hinweis:
Umsatz = Summe aller Verkaufserlöse

667 Ein Biobauer bietet 8 verschiedene Apfelsorten an, die unterschiedlich aufwendig in der Wachstumspflege sind. Die Selbstkostenpreise in Euro je 1 kg Apfelsorte lassen sich im Vektor $\vec{S}$, die Verkaufspreise in Euro ohne Mehrwertsteuer im Vektor $\vec{N}$ und die abgesetzten Mengen im Vektor $\vec{M}$ zusammenfassen.

a) Gib eine Formel für den Gewinnvektor $\vec{G}$ in Abhängigkeit von $\vec{N}$ und $\vec{S}$ an.

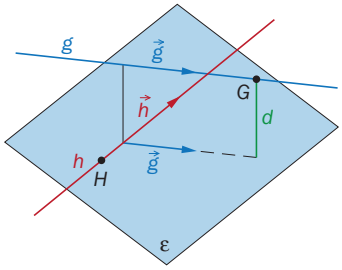
b) Gib eine Formel für den Verkaufspreisvektor $\vec{V}$ inklusive 20 % Mehrwertsteuer in Abhängigkeit von $\vec{N}$ an.

c) Was bedeutet $\vec{M} \cdot \vec{V}$?

Windschiefe Geraden

668 **a)** Diskutiert die folgende Methode zur Bestimmung des kürzesten Abstandes zwischen zwei windschiefen Geraden:

Du legst durch eine der beiden Geraden (z. B. h) eine Ebene ε, die parallel zur anderen Geraden g liegt. Anschließend bestimmst du den Normalabstand eines beliebigen Punktes G, der auf g liegt, von der Ebene ε.



Die Normalvektorform der Ebene ε erhältst du indem du aus den Richtungsvektoren der beiden Geraden $\vec{g}$ und $\vec{h}$ den Normalvektor $\vec{n} = \vec{g} \times \vec{h}$ berechnest und dann mit einem beliebigen Punkt H der Geraden h die Ebenengleichung aufstellst.

b) Begründet mithilfe der Beziehung für Normalprojektion (vgl. Abschnitte 4.3 und 4.12), dass sich der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden mithilfe der folgenden Formel ermitteln lässt:

$$d(g, h) = |\ \overrightarrow{GH} \cdot (\vec{g}_0 \times \vec{h}_0)|$$

669 Berechne den kürzesten Abstand zwischen den windschiefen Geraden:

a) $g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $h\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

670 Lässt sich auch zwischen windschiefen Geraden ein Schnittwinkel angeben?
Wenn ja, versucht eine Definition zu geben!

671 Versucht eine Strategie zu entwickeln, wie sich jene Punkte auf zwei windschiefen Geraden finden lassen, wo der kürzeste Abstand zwischen den beiden Geraden auftritt.

672 Entwickle mit dem Computeralgebrasystem eine Funktion, die den kürzesten Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden ermittelt.

673 Gegeben sind die Gerade

$g\colon X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade h, die durch die Punkte $P(2|1|0)$ und $Q(-4|7|3)$ geht.

a) Zeige, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden normal aufeinander stehen, die Geraden aber windschief zueinander sind!

b) Bestimme den Abstand der beiden windschiefen Geraden!

c) Der Punkt $R(3|1|6)$ liegt auf der Geraden g. Die Punkte PQR bilden ein Dreieck. Untersuche, ob dieses rechtwinklig ist, und berechne seinen Flächeninhalt.

d) Berechne jene beiden Punkte G (auf g) und H (auf h), bei denen der kürzeste Abstand auftritt.

674 Zwei Flugzeuge fliegen mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf geradem Kurs. Das erste befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt eines geeignet gewählten Koordinatensystems. Zur Zeit $t = 1$ ist es in $P(1|6|2)$. Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich das zweite in $Q(2|30|0)$ bzw. $R(3|27|4)$ (Koordinatenangaben in 10 m, Zeiteinheiten in Sekunden).

a) Beschreibe die beiden Flugrouten mithilfe einer Parameterdarstellung. Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Flugzeuge?

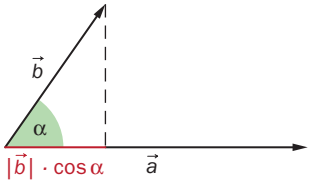
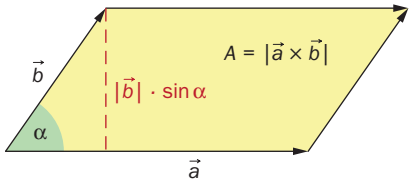
b) Zeige, dass sich die beiden Flugbahnen schneiden und gib den Schnittpunkt an. Würden die beiden Flugzeuge tatsächlich zusammenstoßen?

c) Unter welchem Sehwinkel erscheinen vom Schnittpunkt S aus die beiden Startpunkte O und Q?

d) Um sicherzugehen, wird der Kurs des ersten Flugzeuges so geändert, dass es sich bei gleicher Ausgangsposition nach $t = 1$ im Punkt $T(1|0|5)$ befindet. Die beiden Bahnen sind nun windschief zueinander. Wie groß ist der minimale Abstand der beiden Bahnen?

Vergleich zwischen skalarem und vektoriellem Produkt

675 Vergleicht die Definitionen und Eigenschaften von skalarem und vektoriellem Produkt und diskutiert Übereinstimmungen und Unterschiede! Beweist gültige Aussagen durch direktes Nachrechnen mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und beantwortet die offenen Fragen z. B. dadurch, dass ihr konkrete Zahlen einsetzt.

Skalares Produkt	**Vektorielles Produkt**
Algebraische Definition:	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
Geometrische Definition:	
	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\alpha$
Winkel zwischen zwei Vektoren	
$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 \quad (0° \leq \alpha \leq 180°)$	$\sin\alpha = \frac{\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \lvert\vec{a}_0 \times \vec{b}_0\rvert \quad (-90° \leq \alpha \leq 90°)$
Normalprojektion: $\lvert\vec{b}_{\vec{a}}\rvert = \frac{\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert} = \lvert\vec{b} \cdot \vec{a}_0\rvert$	Normalabstand: $\lvert\vec{b}_{\vec{a}}\rvert = \frac{\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert} = \lvert\vec{b} \times \vec{a}_0\rvert$
Orthogonalität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	Parallelität: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
Gilt das Kommutativgesetz?	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
Multiplikation mit dem Nullvektor	
$\vec{a} \cdot \vec{o} = 0$	$\vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}$
Multiplikation gleicher Vektoren	
$\vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$
Gilt das Assoziativgesetz?	
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
Gilt das Assoziativgesetz mit einem Skalar?	
$k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$	$k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b})$
Gilt das Distributivgesetz?	
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c}$
Verknüpfung der beiden Vektorprodukte mittels Beziehung von Lagrange	
$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$	

Sprache der Mathematik

676 **Thema Vektoren im Raum – Ordne richtig zu!**

1. Der Weg vom Punkt A zum Punkt B wird beschrieben durch …
2. Sind A und der Weg AB bekannt, so ergibt sich B durch …
3. Der Gegenvektor zum Vektor vom Punkt A zum Punkt B …
4. Die Differenz der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ …

- ☐ $2\overrightarrow{AB}$
- ☐ $-\overrightarrow{AB}$
- ☐ $B = A + \overrightarrow{AB}$
- ☐ $\overrightarrow{AB} = B - A$

677 **Thema Winkel, Parallelität und Orthogonalität – Ordne richtig zu!**

1. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum liegen parallel …
2. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum liegen normal …
3. Der Winkel zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus …
4. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ergibt sich mittels …

- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- ☐ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
- ☐ $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- ☐ $\sin \varphi = |\vec{a}_0 \times \vec{b}_0|$

678 **Thema Darstellung von Geraden und Ebenen im Raum – Ordne richtig zu!**

1. Ebene festgelegt durch drei Punkte …
2. Ebene festgelegt durch einen Punkt und einen Normalvektor …
3. Gerade im Raum beschrieben durch Punkt und Richtungsvektor …
4. Gerade im Raum beschrieben durch zwei Punkte …

- ☐ $X = A + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- ☐ $X = G + t \cdot \overrightarrow{GP}$
- ☐ $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$
- ☐ $X = G + t \cdot \vec{g}$

679 **Thema Vektorprodukte – Ordne richtig zu!**

$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$	☐ skalares Produkt	☐ vektorielles Produkt
$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin \alpha$	☐ skalares Produkt	☐ vektorielles Produkt
$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	☐ skalares Produkt	☐ vektorielles Produkt
$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos \alpha$	☐ skalares Produkt	☐ vektorielles Produkt

680 **Thema Lagebeziehungen – Ordne richtig zu!**

1. Die Gerade g schneidet die Ebene ε …
2. Die Gerade g liegt in der Ebene ε …
3. Die Gerade g liegt parallel zur Ebene ε …
4. Die Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden einander …
5. Die Ebenen ε_1 und ε_2 sind identisch …
6. Die Ebenen ε_1 und ε_2 liegen parallel …

- ☐ $g \cap \varepsilon = g$
- ☐ $g \cap \varepsilon = \varnothing \Rightarrow g \parallel \varepsilon$
- ☐ $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g$
- ☐ $g \cap \varepsilon = \{S\}$
- ☐ $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$
- ☐ $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$

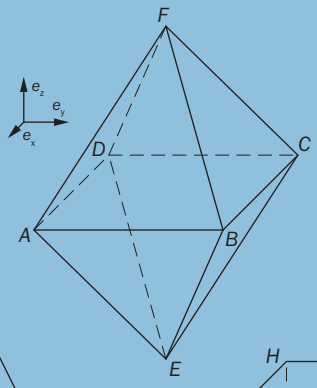
681 **Thema Projektionen, Abstände und Volumina – Ordne richtig zu!**

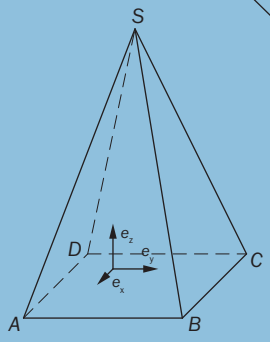
1. Länge der Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ …
2. Normalabstand eines Punktes P von der Geraden $g(G, \vec{g})$ …
3. Normalabstand eines Punktes P von der Ebene $\varepsilon(A, \vec{n})$ …
4. Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten schiefen Prismas …
5. Volumen der von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Pyramide …

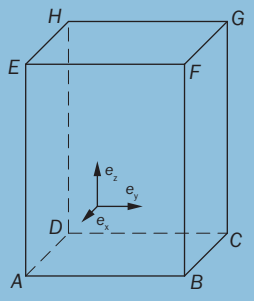
- ☐ $d = |\overrightarrow{PA} \times \vec{n}_0|$
- ☐ $d = |\overrightarrow{GP} \times \vec{g}_0|$
- ☐ $V = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
- ☐ $|\vec{b}_a| = |\vec{b} \cdot \vec{a}_0|$
- ☐ $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Schnitte von Prismen und Pyramiden mit Ebenen

Für die folgenden Überlegungen verwenden wir folgende drei Körper: einen Quader mit der Grundfläche eines Rechtecks, eine quadratische Pyramide und eine Doppelpyramide (“Oktaeder”) mit quadratischer Grundfläche:



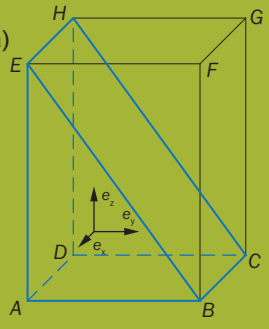




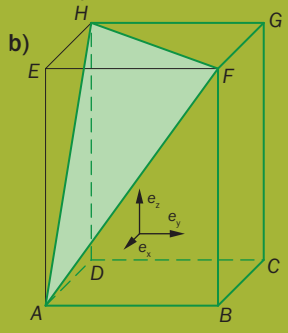
Wir schneiden diese Körper mit ebenen Flächen und erhalten jeweils zwei *Teilkörper*. Wir besprechen jeweils einen dieser Teilkörper und beschreiben die *Schnittfläche*.

▶ **1** Beschreibe folgende Teilkörper und Schnittflächen:

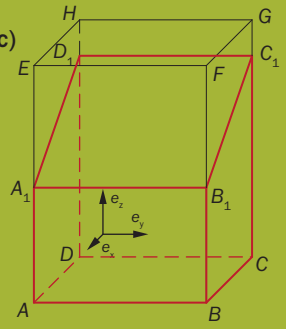
a)



b)



c)



Ausführung:

a) Die Oberfläche des ersten Teilkörpers besteht aus 3 Rechtecken und aus 2 Dreiecken (5 Teilflächen). Sein Volumen ist halb so groß wie das des Quaders. Die Schnittfläche ist ein Rechteck.

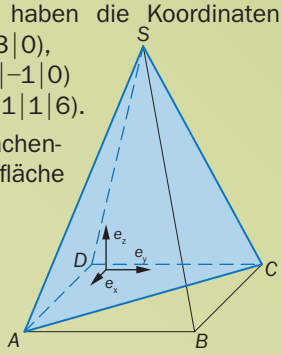
b) Die eingefärbte Schnittfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck.

c) Der Teilkörper ist – genau genommen – trotz der schrägen Schnittfläche ein Quader. Du siehst das, wenn du den Quader (in Gedanken) auf die Grundfläche BCC_1B_1 stellst.

Die Längen der Schnittkanten kannst du oft mithilfe rechtwinkliger Dreiecke berechnen. Für die folgenden Beispiele sind die Koordinaten der Eckpunkte der „unversehrten“ Körper und – falls nötig – die Teilungsverhältnisse gegeben:

▶ **2** Die Eckpunkte *ABCD* der quadratischen Pyramide haben die Koordinaten $A(3|-1|0)$, $B(3|3|0)$, $C(-1|3|0)$, $D(-1|-1|0)$ und die Spitze $S(1|1|6)$.

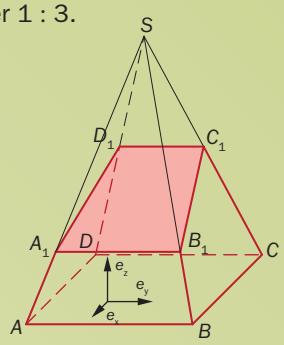
Berechne den Flächeninhalt der Schnittfläche und das Volumen des Teilkörpers!



Ausführung:
Für den Flächeninhalt der Schnittfläche berechnen wir die Länge der Diagonale:
$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$
Die Höhe der Pyramide ist $h = 6$ E, damit erhalten wir für die Schnittfläche $A = \frac{\overline{AC} \cdot h}{3}$.

Das Volumen ist genau halb so groß wie das Volumen der gegebenen Pyramide:
$V = \frac{4^2 \cdot 6}{4} = 24\ \text{E}^2$

▶ **3** Die Eckpunkte *ABCD* der quadratischen Pyramide haben die Koordinaten $A(3|-1|0)$, $B(3|3|0)$, $C(-1|3|0)$, $D(-1|-1|0)$ und die Spitze $S(1|1|6)$. Die Teilungspunkte teilen die Kanten der Pyramide im Verhältnis 1 : 1 oder 1 : 3.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der Schnittfläche!



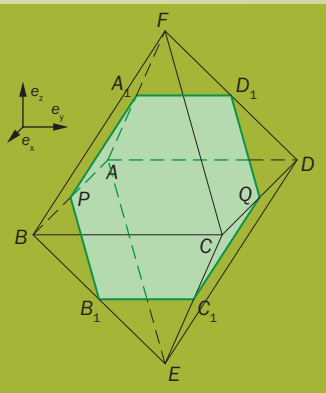
Ausführung:
Berechne die Halbierungspunkte:

$A_1 = \frac{A + \frac{A+S}{2}}{2} = (2{,}5|-0{,}5|3{,}5)$

$C_1 = \frac{C+S}{2} = (0|2|3)$

B_1, D_1 analog.

▶ **4** Die Eckpunkte *ABCD* des Oktaeders haben die Koordinaten $A(2|2|0)$, $B(8|2|0)$, $C(8|8|0)$, $D(2|8|0)$ und die beiden Spitzen $E(5|5|5)$ und $F(5|5|-5)$. Eine Schnittebene teilt das Oktaeder so, dass sechs Kanten halbiert werden. Zeige, dass die eingezeichnete Schnittfläche kein regelmäßiges Sechseck ist!



Ausführung: Bestimme die Koordinaten der Teilungspunkte für alle Kanten und berechne daraus die Seitenlängen für das Sechseck: $A_1(3{,}5|3{,}5|2{,}5)$, $D_1(3{,}5|6{,}5|2{,}5)$, $C_1(6{,}5|6{,}5|-2{,}5)$, $B_1(6{,}5|3{,}5|-2{,}5)$, $P(5|2|0)$ und $Q(5|8|0)$.

$\overline{A_1D_1} = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 3\ \text{E}$; $\overline{D_1Q} = \left|\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\right| \approx 3{,}28\ \text{E}$

Das Sechseck ist somit nicht regelmäßig.

Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at

Meine Kapitelcheckliste zu Analytische Geometrie des Raumes

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
(d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	*(d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)*	*z.B. Aufgaben*
thema Was ist ein Vektor im Raum?		
☐ … was ein Vektor ist und wie er mit drei Komponenten angeschrieben wird.	☐ … aus Punkten Vektoren ermitteln.	… 490, 491
	☐ … Wegbeschreibungen mit Vektoren angeben.	… 492
thema Rechnen mit Vektoren		
☐ … wie Vektoren addiert und mit skalaren Größen multipliziert werden.	☐ … Vektoren und ihre Vielfachen addieren und subtrahieren.	… 504
☐ … was das Vielfache eines Vektors geometrisch bedeutet.	☐ … die Parallelität zweier Vektoren erkennen und nachweisen.	… 505
☐ … was der Betrag eines Vektors ist.	☐ … die Länge eines Vektors bestimmen.	… 510, 511
thema Skalares und vektorielles Produkt		
☐ … wie zwei Vektoren skalar multipliziert werden.	☐ … das skalare Produkt algebraisch ermitteln und überprüfen, ob zwei Vektoren normal aufeinander stehen.	… 517
☐ … was das skalare Produkt ist.		
☐ … was das vektorielle Produkt ist.	☐ … den Winkel zwischen Vektoren bestimmen.	… 519
☐ … was die Normalprojektion eines Vektors auf einen zweiten ist.	☐ … die Normalprojektion eines Vektors auf einen anderen ermitteln.	… 520
☐ … was das vektorielle Produkt geometrisch bedeutet.	☐ … den Normalvektor zu zwei Vektoren bestimmen.	… 549
thema Geradengleichung		
☐ … die Geradengleichung in Parameterform.	☐ … Geradengleichungen in Parameterform aufstellen.	… 529, 530
	☐ … überprüfen, ob ein Punkt auf der Geraden liegt.	… 533
thema Ebenengleichung		
☐ … die Ebenengleichung in Parameterform.	☐ … Ebenengleichungen in Parameterform und in Normalvektorform aufstellen.	… 566, 579
☐ … die Ebenengleichung in Normalvektorform.	☐ … überprüfen, ob ein Punkt auf der Ebene liegt.	… 569
	☐ … elementare Lagebeziehungen zweier Ebenen erkennen.	… 585
thema Lagebeziehungen		
☐ … die Bedeutung von Gleichungssystemen für Geraden und Ebenen im Raum.	☐ … den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen.	… 540
	☐ … den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene berechnen.	… 595
	☐ … die Schnittgerade zweier Ebenen berechnen.	… 603
	☐ … den Schnittpunkt dreier Ebenen berechnen.	… 604

thema **Winkel, Abstände, Flächen und Volumina**

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
☐ … wie der Winkel zwischen Geraden, zwischen Ebenen sowie Geraden und Ebenen bestimmt werden kann.	☐ … den Winkel zwischen Geraden und zwischen Ebenen berechnen.	… 598
☐ … wie der Abstand zwischen Punkt und Gerade ermittelt werden kann.	☐ … den Abstand zwischen Punkt und Geraden berechnen.	… 622
☐ … wie der Abstand zwischen Punkt und Ebene ermittelt werden kann.	☐ … den Abstand zwischen Punkt und Ebenen berechnen.	… 623
☐ … wie Vektorprodukte zur Berechnung von Flächen und Volumina verwendet werden.	☐ … Flächen und Volumina mit Vektorprodukten berechnen.	… 557, 631

Kompetenzen für meine Matura

- ☐ Ich kann die Eckpunkte von einfachen Prismen und Pyramiden mithilfe von Koordinaten beschreiben.
- ☐ Ich kann dreidimensionale Vektoren als Punkte bzw. Pfeile im Raum interpretieren.
- ☐ Ich kann Vektoren im Raum addieren und Vielfache berechnen.
- ☐ Ich kann die Rechenoperationen zwischen Vektoren geometrisch deuten (Parallelität, Orthogonalität).
- ☐ Ich weiß, wie man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet.
- ☐ Ich kann den Normalvektor zu zwei Vektoren geometrisch interpretieren und in geometrischen Aufgabenstellungen einsetzen.

Teste dein Wissen!

Kreuze die richtige Antwort an! Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

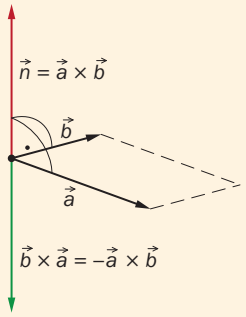
682 Welche Aussage ist richtig?

- ☐ Jeder Position (jedem Punkt) im Raum entspricht ein Vektor.
- ☐ Jedem Weg (Pfeil) im Raum entspricht ein Vektor.
- ☐ Jedem Vektor entspricht genau eine Position (ein Punkt).
- ☐ Jedem Vektor entsprechen unendlich viele Wege (Pfeile).

683 Gilt das auch im Raum?

- ☐ Halbierungspunkt von A und B: $H = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$
- ☐ Schwerpunkt des Dreiecks A, B, C: $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$
- ☐ Teilungspunkt der Strecke AB im Verhältnis 3:4: $T = A + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$

684 Verwende die Abbildung:



Welche Aussage ist richtig?

- ☐ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{n}$
- ☐ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}$
- ☐ $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- ☐ $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
- ☐ $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{b} \times \vec{a}$
- ☐ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- ☐ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n}$
- ☐ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow (\vec{n} \perp \vec{a}) \wedge (\vec{n} \perp \vec{b})$

685 Von welcher Art ist das Ergebnis des betreffenden Vektorprodukts?

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- ☐ ist ein Vektor.
- ☐ ist ein Skalar.

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
- ☐ ist ein Vektor.
- ☐ ist ein Skalar.

686 Abstände: Welche Aussage ist immer richtig?

- ☐ $d(P, g) = 0 \Rightarrow P \in g$
- ☐ $A \in \varepsilon \Rightarrow d(A, \varepsilon) = 0$
- ☐ $d(g, h) \neq 0 \Rightarrow g \parallel h$

687 Lagebeziehungen: Welche Aussage ist richtig?

- ☐ Zwei Ebenen haben stets eine Schnittgerade.
- ☐ Zwei Geraden im Raum können identisch sein, parallel sein, einen Schnittpunkt haben oder windschief sein.
- ☐ Drei Ebenen können 1, 2 oder 3 Schnittpunkte haben.
- ☐ Eine Gerade und eine Ebene haben stets genau einen Durchstoßpunkt.

688 Parallel oder normal? Stimmen die Aussagen unter den angegebenen Voraussetzungen?

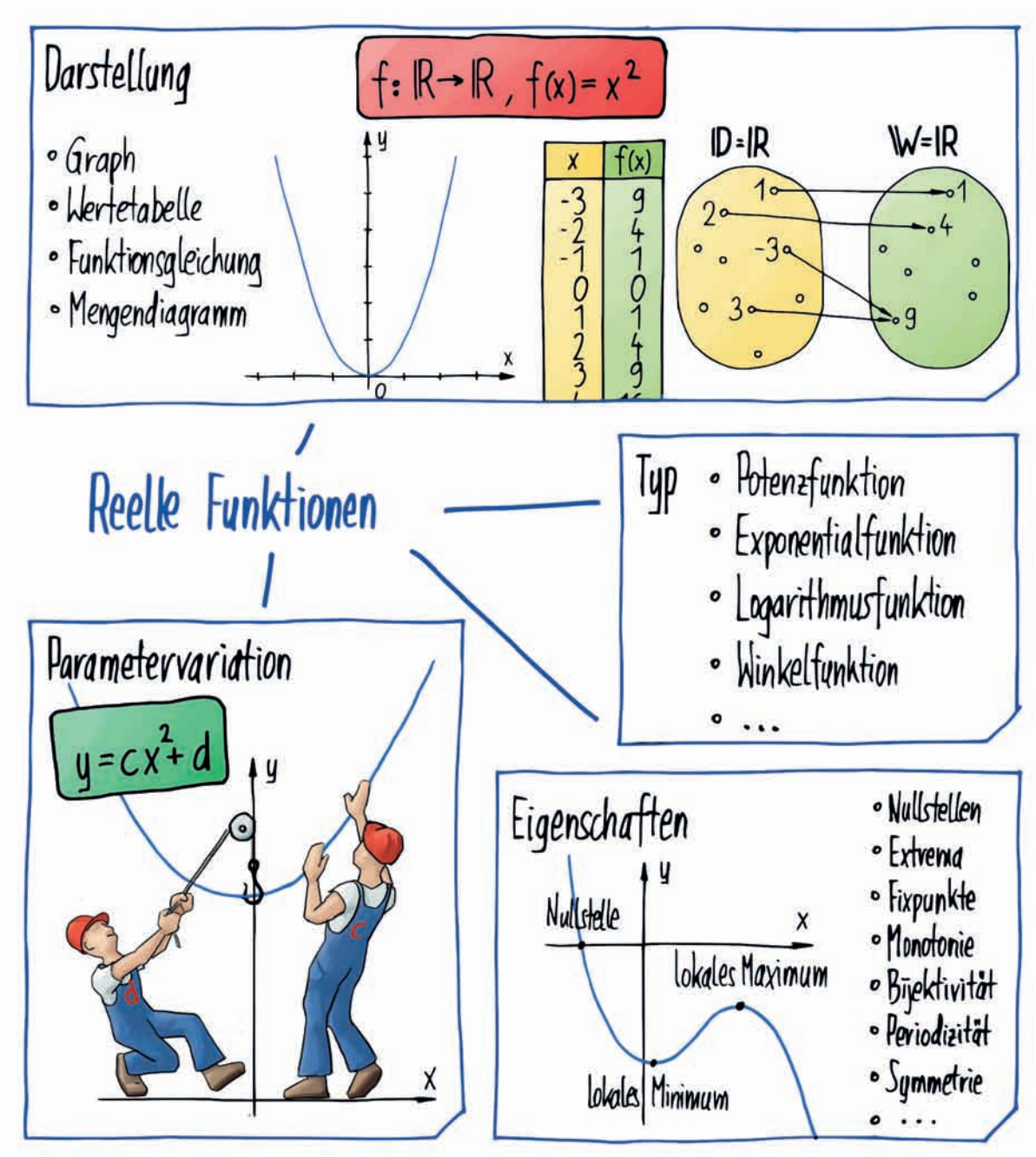
	wahr	falsch
Voraussetzung: $g: X(t) = G + t \cdot \vec{g}$ und $\varepsilon: \vec{n} \cdot X = 0$ Aussage: $g \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \vec{g} \perp \vec{n}$	☐	☐
Voraussetzung: $g: X(t) = G + t \cdot \vec{g}$ und $\varepsilon: \vec{n} \cdot X = 0$ Aussage: $g \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \vec{g} \parallel \vec{n}$	☐	☐
Voraussetzung: $\varepsilon_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\varepsilon_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ Aussage: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \wedge d_1 \neq k \cdot d_2, \quad k \in \mathbb{R}$	☐	☐

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 6 Lösungen (SBNR 150.261)

5. Reelle Funktionen

In der 5. Klasse hast du *Funktionen* als eindeutige Zuordnungen kennengelernt. Du kennst die Begriffe Definitionsmenge, Wertemenge, unabhängige und abhängige Variable. Du kannst eine Funktion darstellen durch Funktionsterm, Wertetabelle, Funktionsgraph und Pfeildiagramm.

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf Zuordnungen zwischen reellen Zahlen. Wir werden verschiedene Typen von Funktionen im Hinblick auf ihre Eigenschaften untersuchen.



5.1 Nullstellen und Fixpunkte

Definition: Eine *reelle Funktion* f: $D_f \to W_f$ ist eine eindeutige Zuordnung zwischen reellen Zahlen. Definitions- und Wertemenge sind Teilmengen der reellen Zahlen: $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $W_f \subseteq \mathbb{R}$.

Wir schreiben: $y = f(x)$ oder $x \mapsto y$

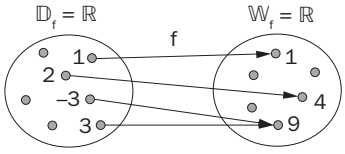
Im Allgemeinen nehmen wir an, dass $D_f = \mathbb{R}$.

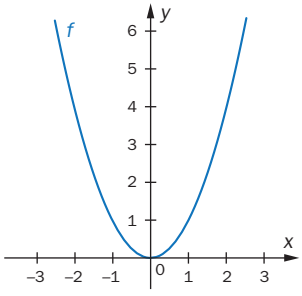
Je nach Aufgabenstellung verwenden wir **verschiedene Darstellungsformen** für eine Funktion: *Wertetabelle*, *Funktionsgraph*, *Funktionsterm* oder *Pfeildiagramm*.

Mithilfe einer Wertetabelle und eines Pfeildiagramms können wir nur Funktionen mit endlicher Definitionsmenge vollständig darstellen. Ist die Definitionsmenge unendlich groß, so zeigen diese beiden Darstellungsformen nur einen Ausschnitt der Funktion. Meist zeigt auch der Funktionsgraph nur einen Ausschnitt der Funktion.

689 Stelle die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ mithilfe eines Funktionsgraphen, einer Wertetabelle und eines Pfeildiagramms dar. Wird jeweils die gesamte Funktion dargestellt?

Ausführung: Die Funktion wird in keiner der folgenden Darstellungsformen vollständig wiedergegeben.





	A	B
1	x	f(x)
2	-3	9
3	-2	4
4	-1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	4
8	3	9
9	4	16
10	5	25
11		

Definition: Eine *Nullstelle* einer Funktion f: $D_f \to W_f$ gibt an, wo ihr Funktionswert gleich null ist. Ein *Fixpunkt* einer Funktion f: $D_f \to W_f$ gibt an, wo ihr Funktionswert gleich dem zugehörigen x-Wert ist.

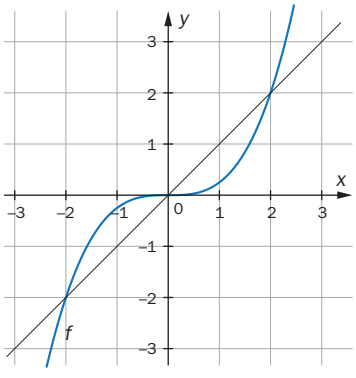
x_{null} ist Nullstelle $\Leftrightarrow$ $f(x_{null}) = 0$

x_{fix} ist Fixpunkt $\Leftrightarrow$ $f(x_{fix}) = x_{fix}$

690 Gib die Nullstellen und Fixpunkte der durch ihren Graphen gegebenen Funktion f an.

Ausführung: An den Nullstellen schneidet der Graph die x-Achse, das ist hier im Punkt $N(0|0)$. Die Funktion hat eine Nullstelle $x_{null} = 0$.

In den Punkten $F_1(0|0)$, $F_2(-2|-2)$, $F_3(2|2)$ stimmen die x- und y-Koordinaten überein. Es gibt drei Fixpunkte:
$x_{fix_1} = 0$, $x_{fix_2} = -2$, $x_{fix_3} = 2$



Hinweis

In einem Fixpunkt schneidet der Funktionsgraph die Gerade $y = x$. Diese Gerade nennen wir die 1. Mediane.

Aufgaben

691 Stelle die Funktion f mithilfe eines Funktionsgraphen, einer Wertetabelle und eines Pfeildiagramms dar. Wird jeweils die gesamte Funktion dargestellt?

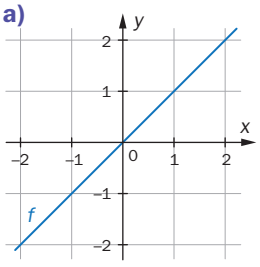
a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = -x^3$
c) $f(x) = -x^2$ **d)** $f(x) = -x^4$
e) $f(x) = 5x$ **f)** $f(x) = \frac{x}{5}$

692 Wie 691:

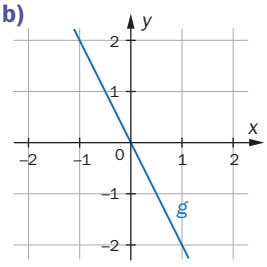
a) $f(x) = -2x^2$ **b)** $f(x) = -(2x)^2$
c) $f(x) = (-2x)^2$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{3}$
e) $f(x) = \frac{x}{3^2}$ **f)** $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

693 Gib für die Funktion f einen Funktionsterm, eine Wertetabelle und ein Pfeildiagramm an. Ist die Darstellung eindeutig?

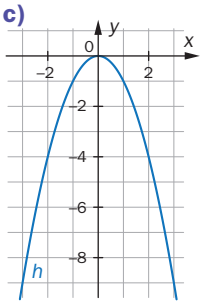
a)



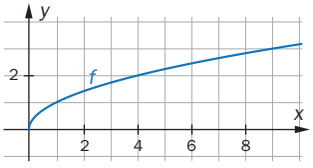
b)



c)



d)



694 Gib für die Funktion f einen Funktionsterm, einen Graphen und ein Pfeildiagramm an. Ist die Darstellung eindeutig?

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−12	−8	−4	0	4	8	12

b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	2	3	4	5	6	7	8

c)

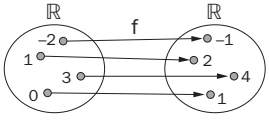
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	−1	−2	−3

d)

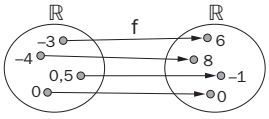
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−4	−3	−2	−1	0	1	2

695 Stelle die Funktion f mithilfe eines Funktionsterms, eines Graphen und einer Wertetabelle dar. Ist die Darstellung eindeutig?

a)



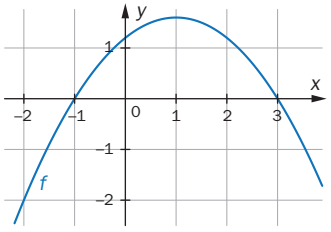
b)



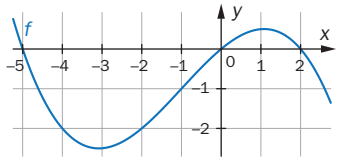
696 Vergleicht die verschiedenen Darstellungsformen einer Funktion. Wo seht ihr jeweils Vor- und Nachteile? Für welche Funktionen sind welche Darstellungsformen gut bzw. nicht gut geeignet? Erstellt eine Präsentation!

697 Gib Nullstellen und Fixpunkte der Funktion an:

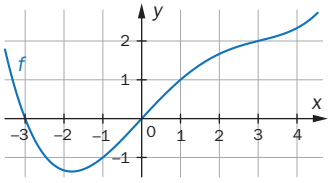
a)



b)



c)



698 Wie 697:

a) $f(x) = (x - 2)^2$ **b)** $f(x) = -(x + 4)^2$
c) $f(x) = x^2 - 1$ **d)** $f(x) = -x^2 + 3$
e) $f(x) = \sqrt{x}$ **f)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

699 Wie 697:

(1) für die Funktionen aus Aufgabe 692.
(2) für die Funktionen aus Aufgabe 693.
(3) für die Funktionen aus Aufgabe 694.
(4) für die Funktionen aus Aufgabe 695.

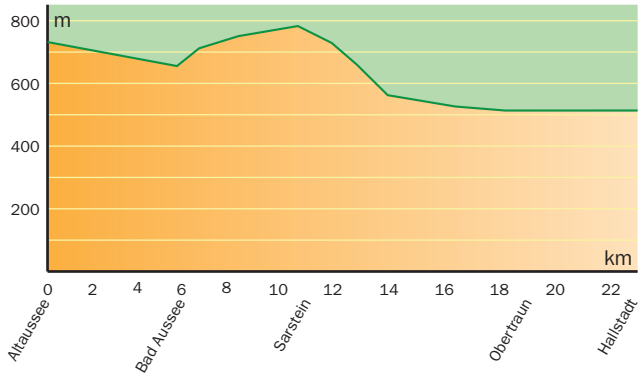
5.2 Monotonie und Extremstellen

Definition: *Globale Extremstellen* einer Funktion f: $D_f \to W_f$ geben an, wo ihre Funktionswerte minimal bzw. maximal werden. Die *globalen Extrema* sind die zugehörigen Funktionswerte.

Eine Funktion nimmt bei x_{min} ein *globales Minimum* an, wenn $f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D_f$.

x_{max} ein *globales Maximum* an, wenn $f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall\, x \in D_f$.

700 Ein 23 km langer Wanderweg durch das Ausseerland führt von Altaussee über Bad Aussee nach Hallstatt. Beschreibe die Funktion, die dem Höhenprofil in der Abbildung zugrunde liegt. Gib ihre globalen Extremstellen an und interpretiere sie!



Ausführung:

Die Funktion f ordnet der Länge des zurückgelegten Weges jeweils die aktuelle Seehöhe zu.

f: $[0; 23] \to \mathbb{R}^+$, Weg (in km) $\mapsto$ Seehöhe (in m)

Zum Beispiel: $f(6) \approx 650$, denn Bad Aussee liegt etwa 650 m über dem Meer.

Globale Extremstellen:

$x_{min} \approx 23$ Die tiefste Stelle ($\approx$ 520 m) wird nach ca. 23 km (in Hallstatt) erreicht.

$x_{max} \approx 11$ Die höchste Stelle ($\approx$ 800 m) wird nach ca. 11 km (beim Sarstein) erreicht.

Gerade beim Wandern oder Rad fahren interessiert dich sicher auch, wann es bergauf und bergab geht. Mathematisch gesehen fragen wir uns dabei, ob Funktionswerte wachsen oder fallen.

Definition: Eine Funktion f: $D_f \to W_f$, $y = f(x)$ heißt

streng monoton wachsend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

streng monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\forall\, x_1, x_2 \in D_f$.

Bemerkung: Gilt nur das $\leq$- bzw. $\geq$-Zeichen zwischen den Funktionswerten, so nennen wir die Funktion *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*.

701 Beschreibe die Monotonie der Funktion, die dem Höhenprofil aus Beispiel 700 zugrunde liegt.

Ausführung:

In $0 \leq x \leq 6$ ist f streng monoton fallend. Die ersten 6 km geht es bergab.

In $6 \leq x \leq 11$ ist f streng monoton wachsend. Von Kilometer 6 bis 11 geht es bergauf.

In $11 \leq x \leq 23$ ist f monoton fallend. Ab Kilometer 11 führt der Weg bergab oder eben.

6 km nach Beginn der Wanderung und bei Kilometer 11 ändert sich jeweils die Monotonie.

Definition: An einer *lokalen Extremstelle* ändert sich die Monotonie der Funktion.

Hinweis

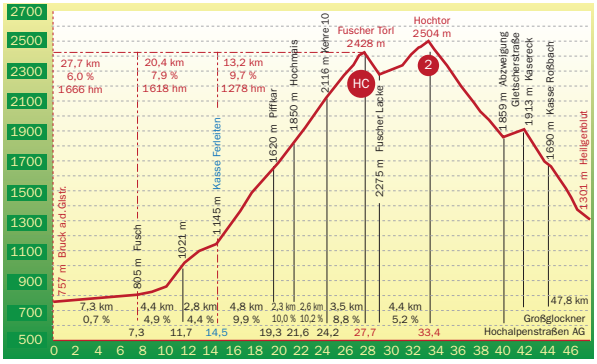
Jedes globale Extremum ist entweder ein lokales Extremum oder es liegt am Rand des Definitionsbereiches. Wir unterscheiden folgende *Arten von Extremstellen:*

lokal oder global und Minimum oder Maximum

Aufgaben

702 Bei der Österreich-Radrundfahrt stellt die 124 km lange Großglockner-Etappe eine der größten Herausforderungen für die Sportler dar. Die Abbildung zeigt das Höhenprofil der Strecke.

Beschreibe die Funktion, die dem Höhenprofil in der Abbildung zugrunde liegt. Gib ihre globalen Extremstellen an und interpretiere sie!



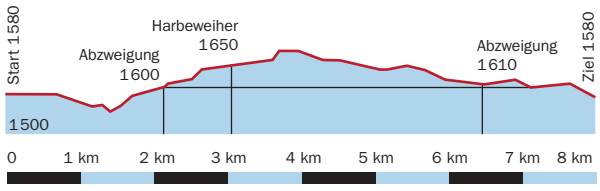
703 Angeblich führt die Großglockner-Etappe (siehe Aufgabe 702) über mehr als 3 000 Höhenmeter. Könnt ihr das aus dem Höhenprofil herauslesen? Wie?

704 Beschreibe die Monotonie der Funktion aus Aufgabe 702. Gib lokale Extremstellen und Extrema an und interpretiere sie!

705 Die Hubertus-Loipe im Pitztal ist eine beliebte Langlaufloipe. Die Abbildung unten zeigt das Höhenprofil der Strecke.

Beschreibe die Funktion, die dem Höhenprofil in der Abbildung zugrunde liegt. Gib ihre globalen Extremstellen an und interpretiere sie!

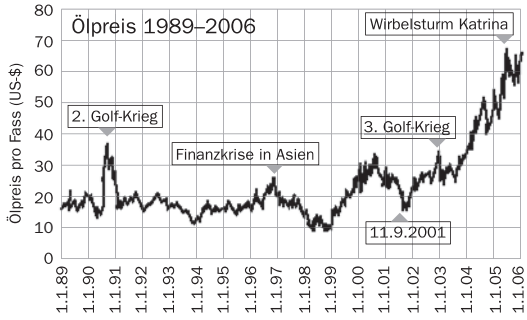
706 Beschreibe die Monotonie der Funktion aus Aufgabe 705. Gib ihre globalen Extremstellen und Extrema an und interpretiere sie!



707 Angeblich weist die Hubertus-Loipe (siehe Aufgabe 705) einen Höhenunterschied von 130 m auf einer Länge von etwa 8 km auf. Könnt ihr das aus dem Höhenprofil herauslesen? Wie?

708 Der Preis für Rohöl wird international in US-Dollar pro Barrel (1 Barrel entspricht ca. 159 Liter) angegeben. Er ist entscheidend für den Preis von Benzin oder Heizöl.

Welche Funktion wird durch den Graphen beschrieben? Gib ihre globalen Extremstellen an und interpretiere sie!



Quelle:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%96lpreis-1985-2006.png

709 Beschreibe die Monotonie der Funktion aus Beispiel 708. Gib lokale Extremstellen und Extrema an und interpretiere sie!

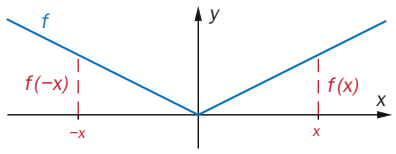
710 Zeichne den Graphen der Funktion. Beschreibe die Monotonie, gib, falls vorhanden, globale und lokale Extremstellen und Extrema an!

a) $f(x) = x^3 - 2x$ **b)** $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

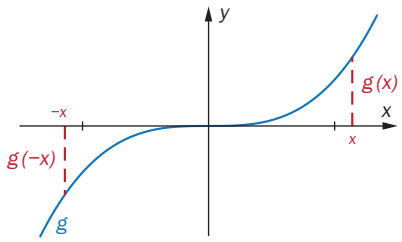
c) $f(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{8x}{1+x^2}$

5.3 Symmetrie und Periodizität

Der Graph einer Funktion kann symmetrisch zu einer Geraden oder zu einem Punkt sein. Dies erkennen wir am Graphen, aber auch am Funktionsterm. Wir betrachten zwei besondere Formen der Symmetrie, die man sehr leicht am Funktionsgraphen erkennt:



Der Graph von f liegt symmetrisch zur y-Achse.
Es gilt: $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

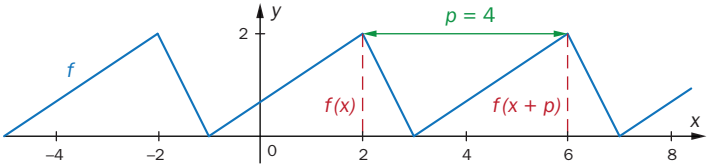


Der Graph von g liegt symmetrisch zum Koordinatenursprung. Es gilt: $g(-x) = -g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Definition:

gerade Funktion	*ungerade Funktion*
$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in D_f$	$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in D_f$
Graph symmetrisch zur y-Achse	Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung

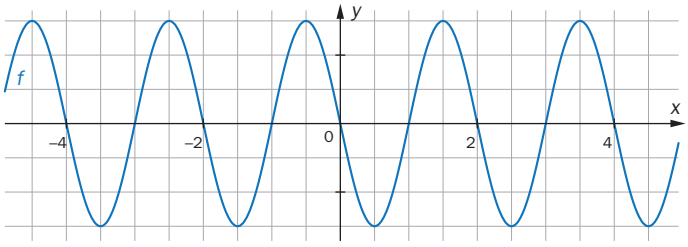
Funktionswerte können sich in regelmäßigen Abständen wiederholen. Betrachte diesen Graphen:



Hier wiederholen sich die Werte im Abstand von $p = 4$, denn $f(x) = f(x + 4) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definition: Eine Funktion f: $D_f \to W_f$ heißt *periodisch mit Periode* p, wenn sich ihre Werte (frühestens) in einem Abstand $p > 0$ wiederholen: $f(x) = f(x + p) \qquad \forall\, x \in D_f$

711 Lies aus dem Graphen ab und begründe: Ist die Funktion gerade oder ungerade? Ist die Funktion periodisch? Gib gegebenenfalls die Periode an!



Ausführung:

Der Graph ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Daher ist die Funktion ungerade und es gilt $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Die lokalen Maxima der Funktion liegen bei −4,5; −2,5; −0,5; 1,5; 3,5; usw. Daraus können wir die Periode ablesen: Die Funktion ist periodisch mit Periode 2, d. h. $f(x) = f(x + 2) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aufgaben

712 Zeichne die Funktion, lies ihre Eigenschaften aus dem Graphen ab und begründe: Ist die Funktion gerade oder un- gerade? Ist die Funktion periodisch? Falls ja, gib die Periode an!

a) $f(x) = 3x^2 - 4x^4$ **b)** $f(x) = \frac{x^3}{3} + x$

c) $f(x) = -x^3 + 5x$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{6} - x^4$

e) $f(x) = \frac{-4 + x^2}{x^2}$ **f)** $f(x) = \frac{x + 2}{x^3}$

713 Wie 712:

a) $f(x) = (x - 4)^2 + 3$

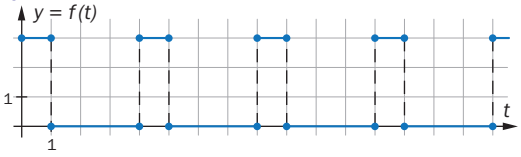
b) $f(x) = (x + 1)^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

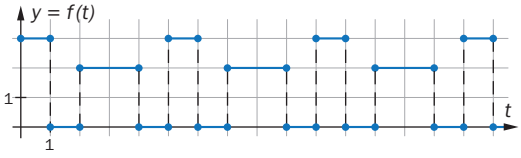
d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

714 Lies Eigenschaften der Funktionen $f(t)$ aus den Funktionsgraphen ab:

a)

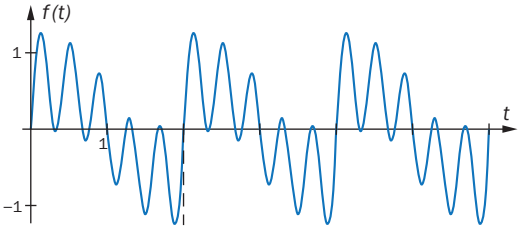


b)

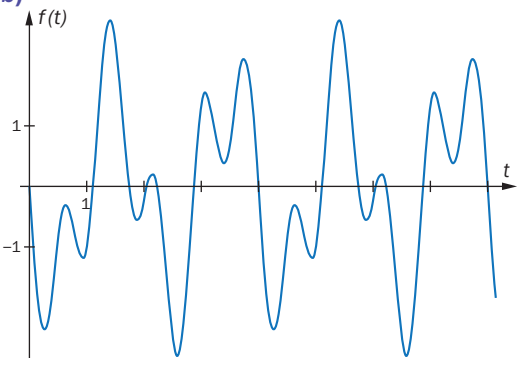


715 Wie 714 für diese Funktionen aus der Musik:

a)

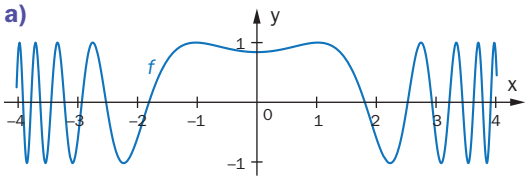


b)

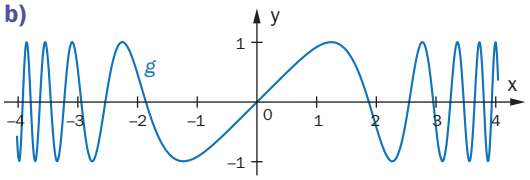


716 Wie 714:

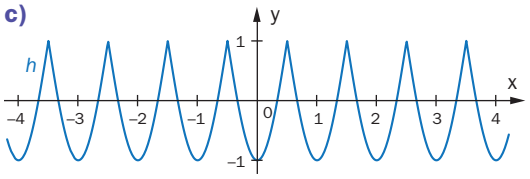
a)



b)

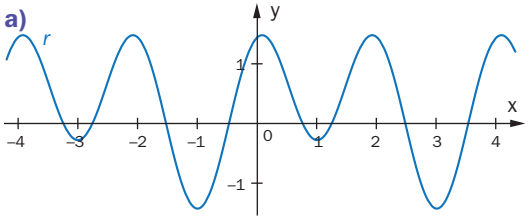


c)

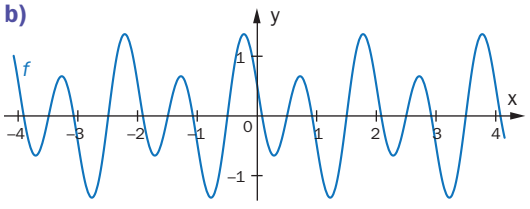


717 Wie 714:

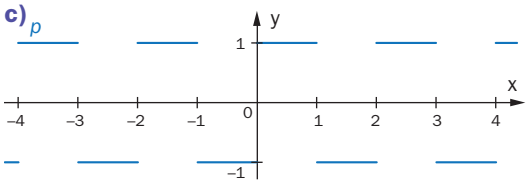
a)



b)



c)



718 Gibt es eine Funktion, die symmetrisch zur x-Achse ist? Begründet!

719 Skizziert, wenn möglich, den Graphen einer Funktion, die symmetrisch zur gegebenen Geraden ist.

a) $y = 4$ **b)** $y = -2$ **c)** $x = 1$

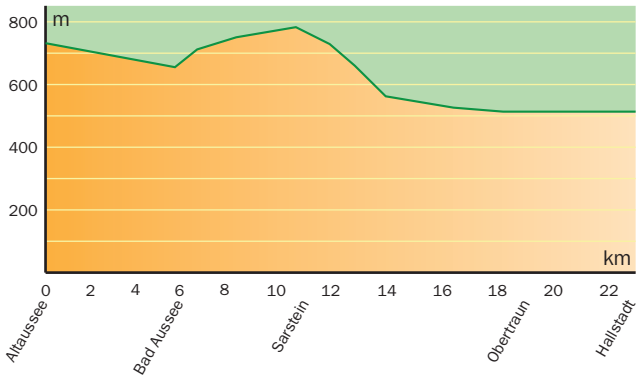
d) $x = -3$ **e)** $y = x$ **f)** $y = -x$

720 Können wir die Periode der Funktion aus Beispiel 711 auch an lokalen Minima oder an den Nullstellen ablesen? Begründet!

5.4 Bijektive Funktion und Umkehrfunktion

721 Ein Wanderer führt bei seinem Weg von Altaussee nach Hallstatt einen Höhenmesser und das dir schon bekannte Höhenprofil aus Beispiel 700 mit.

Wo befindet er sich, wenn sein Höhenmesser **a)** 600 m **b)** 700 m anzeigt?



Ausführung:
Die Höhe, die der Höhenmesser anzeigt, ist auf der senkrechten Achse des Höhenprofils aufgetragen. Auf der waagrechten Achse können wir seine Position ablesen.

a) Die Seehöhe von 600 m gibt an, dass der Wanderer schon knapp 14 km zurückgelegt hat. Er befindet sich zwischen Sarstein und Obertraun.

b) Zeigt der Höhenmesser 700 m an, so können wir die Position des Wanderers nicht eindeutig feststellen: Er könnte 2 km, knapp 7 km oder schon 12 km zurückgelegt haben.

Mithilfe einer Funktion $y = f(x)$ können wir immer aus einem vorgegebenen x das zugehörige y angeben. Beispiel 721 zeigt, dass dies umgekehrt nicht so sein muss: Wenn wir die Höhe y kennen, können wir die zugehörige Position x manchmal nicht eindeutig bestimmen. Wir definieren folgende Eigenschaft einer Funktion:

Definition: Eine Funktion f: $D_f \to W_f$ heißt *eindeutig umkehrbar*, *bijektiv* oder eine *Bijektion*, wenn jedes $y \in W_f$ genau einmal als Funktionswert auftritt. Kurz:

zu jedem x ein y und zu jedem y ein x

Definition: Die *Umkehrfunktion* f^{-1} einer bijektiven Funktion f: $D_f \to W_f$, $x \mapsto y$ ordnet jedem Funktionswert sein *Urbild* zu. f^{-1}: $W_f \to D_f$, $y \mapsto x$

Die Funktion in Beispiel 721 hat keine Umkehrfunktion. Diese müsste jeder Seehöhe eindeutig eine zugehörige Position des Wanderers zuordnen. Dies ist nicht möglich, weil eine Seehöhe (ein Funktionswert) mehrfach auftritt.

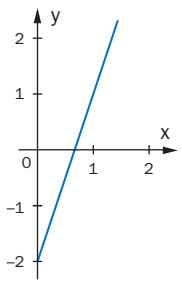
722 Gib, wenn möglich, die Umkehrfunktion zu f: $[0; \infty[\to [-2; \infty[$, $x \mapsto 3x - 2$ an.

Ausführung: $D_f = [0; \infty[$, $W_f = [-2; \infty[$
f ist bijektiv, da jeder Wert aus $[-2; \infty[$ genau einmal als Funktionswert auftritt. Daher hat f eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Diese ordnet jedem y ein x zu. Wir formen daher nach x um:

$y = 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y + 2}{3}$

Ergebnis: f^{-1}: $[-2; \infty[\to [0; \infty[$, $y \mapsto \frac{y + 2}{3}$



Ähnlich wie die Bijektivität sind folgende Eigenschaften definiert:

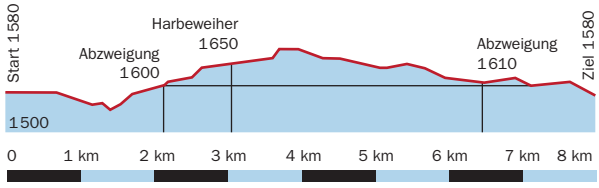
Definition: Eine Funktion $f\colon D_f \to W_f$ heißt
injektiv / *surjektiv* } wenn jedes $y \in W_f$ { höchstens / mindestens } einmal als Funktionswert auftritt.

Aufgaben

723 Ein Langläufer ist auf der Hubertus-Loipe im Pitztal unterwegs. Er führt einen Höhenmesser mit sich. Das Höhenprofil der Loipe kennst du schon aus Aufgabe 705.

Wie viel Kilometer hat der Läufer schon hinter sich gebracht, wenn sein Höhenmesser

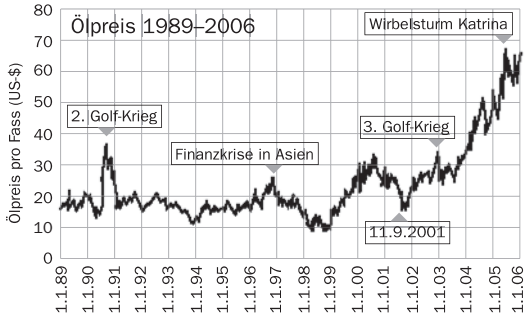
a) 1 600 m **b)** 1 580 m
c) 1 650 m **d)** 1 670 m anzeigt?



724 Kann das Diagramm von Aufgabe 723 als bijektive Funktion aufgefasst werden? Begründe deine Antwort!

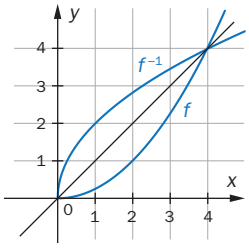
725 Die Entwicklung des Rohölpreises (in US- Dollar pro Barrel) von 1989 bis 2006 kennst du schon aus Aufgabe 708. Wann lag der Preis für ein Barrel Rohöl

a) bei 40 US-Dollar? **b)** bei 30 US-Dollar?
c) bei 20 US-Dollar? **d)** über 50 US-Dollar?



726 Kann das Diagramm von Aufgabe 725 als bijektive Funktion aufgefasst werden? Begründe deine Antwort!

727 Juliane meint: „Die Graphen von f und f^{-1} sind immer symmetrisch zur 1. Mediane“. Sie rechtfertigt ihre Aussage durch diese Abbildung:



a) Recherchiert im Internet: Stimmt Julianes Aussage für jede Funktion? Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein?

b) Wendet das beschriebene Verfahren auf mindestens zwei geeignete Funktionen an und beschreibt es in einer Präsentation!

728 Gib, wenn möglich, die Umkehrfunktion zur gegebenen Funktion an. Plotte gegebenenfalls Funktion und Umkehrfunktion in ein Diagramm.

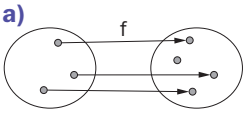
a) $f\colon [0;\infty[\to [-4;\infty[, \quad x \mapsto 2x - 4$
b) $f\colon [0;\infty[\to [-1;\infty[, \quad x \mapsto 0{,}5x - 1$
c) $f\colon [0;\infty[\to [-\infty;5], \quad x \mapsto -x + 5$
d) $f\colon [0;\infty[\to [-\infty;3], \quad x \mapsto -0{,}3x + 3$

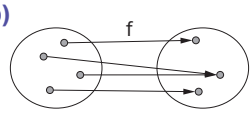
729 Wie 728:

a) $f\colon [0;\infty[\to [0;\infty[, \quad x \mapsto 3x^2$
b) $f\colon \mathbb{R} \to [0;\infty[, \quad x \mapsto (4x)^2$
c) $f\colon [0;\infty[\to [0;\infty[, \quad x \mapsto 0{,}5x^3$

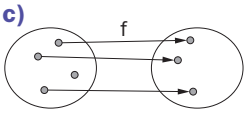
730 Ist im Pfeildiagramm eine surjektive, injektive oder bijektive Funktion dargestellt? Begründe!

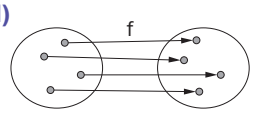
a) **b)**



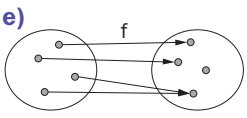


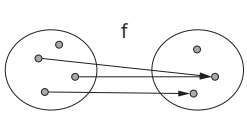
c) **d)**





e) **f)**





5.5 Potenzfunktion

Definition: Eine *Potenzfunktion* ist eine reelle Funktion der Form $f\colon D_f \to W_f,\ y(x) = c \cdot x^r$ mit Koeffizienten c und Exponenten $r \in \mathbb{R}$.

Hinweis

Für die Definitionsmenge D_f gilt: Wenn der Exponent $r \leq 0$ ist, muss $x \neq 0$ sein.
Wenn r nicht ganzzahlig ist, beschränken wir D_f auf $x \geq 0$.

Besondere Potenzfunktionen $(c \in \mathbb{R})$

konstante Funktion	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = c$	homogene lineare Funktion	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = c \cdot x$
Quadratfunktion	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = c \cdot x^2$	Quadratwurzelfunktion	$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ y = c \cdot x^{\frac{1}{2}}$

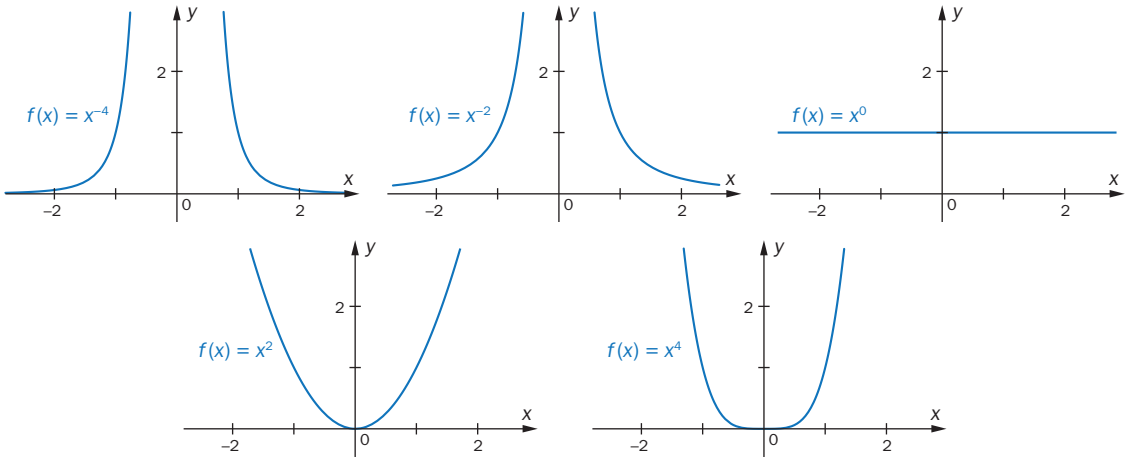
Hinweis

Eine Potenzfunktion mit einem negativen Exponenten ist eine Bruchfunktion. Ein Bruch im Exponenten erzeugt eine Wurzelfunktion.

Vermutungen über Eigenschaften von Funktionen können wir aus dem Graphen ablesen. Für die mathematische Exaktheit sind Beweise aber unerlässlich.

731 Plotte die Graphen verschiedener Potenzfunktionen mit geradem, ganzzahligem Exponenten. Beschreibe ihre gemeinsamen Eigenschaften und beweise sie.

Ausführung: Wir wählen $c = 1$ und zeichnen einige Graphen:



Alle Graphen sind symmetrisch zur y-Achse. Daher sind diese Funktionen vermutlich gerade.

Beweis: Schreibe den Funktionsterm in der Form $f(x) = c \cdot x^{2z}$ mit $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. So ist der Exponent immer eine gerade ganze Zahl.
$f(-x) = c \cdot (-x)^{2z} = c \cdot ((-x)^2)^z = c \cdot (x^2)^z = c \cdot x^{2z} = f(x)$

Die Eigenschaften der Potenzfunktion sind verschieden, wenn der Exponent positiv oder nicht positiv ist. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:

1. Fall: Exponent $r > 0$
Bei $x_{min} = 0$ liegt vermutlich das globale Minimum der Funktion, d.h. $f(0) \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Beweis: $f(0) = c \cdot 0^{2z} = 0$, daher bleibt zu zeigen, dass $0 \leq f(x)$ ist.
$f(x) = c \cdot x^{2z} = c \cdot (x^2)^z \geq 0$, weil $x^2 \geq 0$ ist. Daher ist $0 \leq f(x)$.

2. Fall: Exponent $r \leq 0$
Die Funktion ist bei $x = 0$ nicht definiert, weil 0^0 nicht definiert ist und $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ (Division durch 0). Die Funktion hat für $r < 0$ kein globales Minimum, aber $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beweis: Auch hier gilt $f(x) = c \cdot x^{2z} = c \cdot (x^2)^z \geq 0$, weil $x^2 \geq 0$ ist.

Satz: *Eigenschaften der Potenzfunktion* $f\colon D_f \to W_f,\ y = c \cdot x^r,\ r \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ ist gerade} \\ f \text{ ist ungerade} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Exponent } r \text{ ist gerade} \\ \text{Exponent } r \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Alle Funktionswerte sind nicht negativ: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in D_f$

Vergleiche dazu 731 und 732.

Aufgaben

732 Zeichne am Computer verschiedene Potenzfunktionen mit ungeradem, ganzzahligem Exponenten. Beschreibe ihre gemeinsamen Eigenschaften und begründe sie.

733 Zeichne am Computer verschiedene Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten. Wodurch unterscheiden sich Potenzfunktionen, die nur unterschiedliche Vorzeichen im Exponenten haben? Begründe deine Vermutung.

734 Zeichne am Computer verschiedene Wurzelfunktionen $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ y = x^{\frac{1}{n}}$
Beschreibe ihre gemeinsamen Eigenschaften und begründe sie.

a) Verwende gerades $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b) Verwende ungerades $n \in \mathbb{N}$.

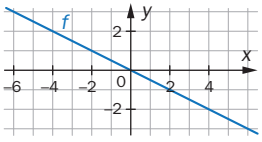
735 Die Bremsstrecke s_B hängt von der Geschwindigkeit v und von der Bremsverzögerung a ab:

$$s_B = \frac{v^2}{2a}$$

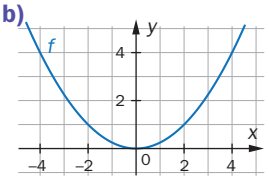
Auf regennassem Asphalt beträgt die Bremsverzögerung $a \approx 4\ \mathrm{m/s^2}$. Stelle den Graphen der Funktion $s_B(v) = \frac{v^2}{8}$ für $v \in [0; 30]$ dar. Gib die Eigenschaften des Funktionsgraphen an.

736 Eine Potenzfunktion ist durch ihren Graphen gegeben. Gib einen Funktionsterm, eine geeignete Definitionsmenge und globale Extremstellen und Extrema an.

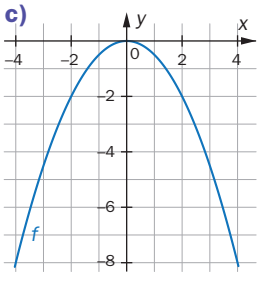
a)



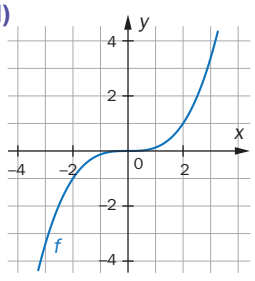
b)



c)

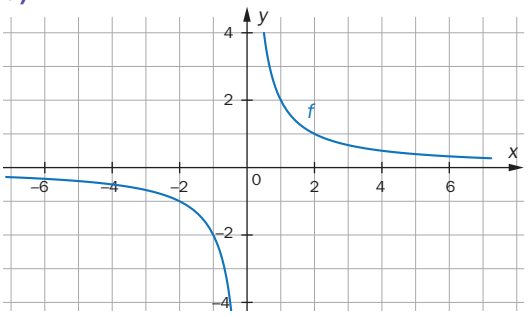


d)

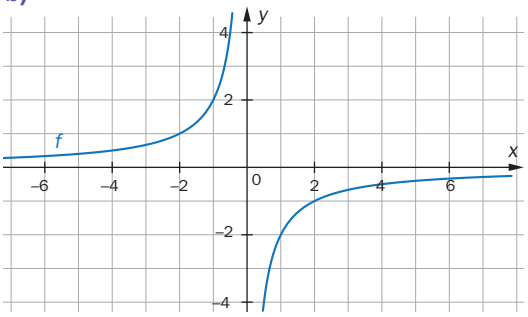


737 Wie 736:

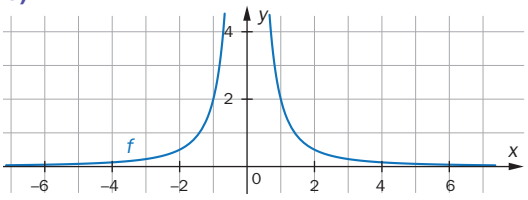
a)



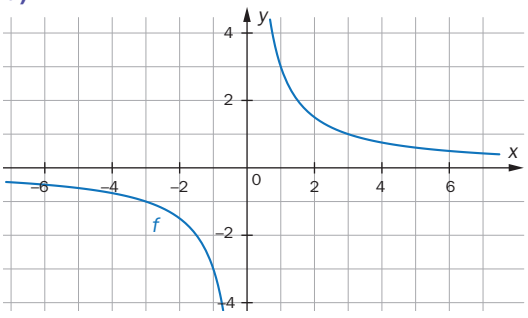
b)



c)



d)



738 Was ist eine Asymptote? Welche Potenzfunktionen haben eine Asymptote? Recherchiert und fasst eure Ergebnisse in einer Präsentation zusammen.

5.6 Polynomfunktion und gebrochen rationale Funktion

Definition: Eine *Polynomfunktion* (auch *ganz rationale Funktion*) f vom *Grad* n ist eine reelle Funktion der Form $f\colon D_f \to W_f, \quad y(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
Dabei sind $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die *Koeffizienten* der Polynomfunktion mit $a_n \neq 0$.

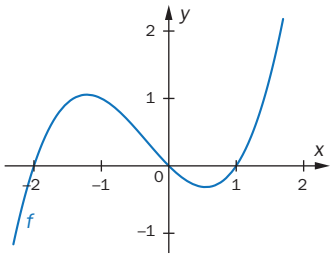
739 Von einer Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind folgende Funktionswerte bekannt: $f(-1) = 1$, $f(-2) = f(0) = f(1) = 0$, . Gib einen passenden Funktionsterm an und zeichne den Graphen!

Ausführung: Um die Koeffizienten zu bestimmen, können wir ein lineares Gleichungssystem aufstellen. Da vier Funktionswerte bekannt sind, erhalten wir vier Gleichungen. Dies ergibt eine Polynomfunktion vom Grad 3: $f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot (-2)^3 + a_2 \cdot (-2)^2 + a_1 \cdot (-2) + a_0 &= 0 \\ a_3 \cdot \ 0^3 \ + a_2 \cdot \ 0^2 \ + a_1 \cdot \ 0 \ + a_0 &= 0 \\ a_3 \cdot \ 1^3 \ + a_2 \cdot \ 1^2 \ + a_1 \cdot \ 1 \ + a_0 &= 0 \\ a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$$

Ergebnis: $f(x) = 0{,}5\,x^3 + 0{,}5\,x^2 - x$



Bemerkung: Das Besondere an einer Polynomfunktion: Wenn wir nur an wenigen Stellen die Funktionswerte kennen, kennen wir die Funktion schon überall.

Definition: Eine *gebrochen rationale Funktion* f können wir als Quotient zweier Polynomfunktionen p und q darstellen:

$$f\colon D_f \to W_f, \qquad y(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Hinweis

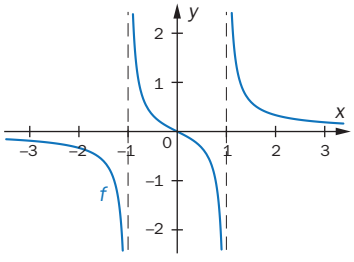
Die Definitionsmenge einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ darf nicht die Nullstellen des Nenners $q(x)$ enthalten.

740 Gib die größtmögliche Definitionsmenge an und zeichne den Graphen der Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2 \cdot (x^2 - 1)}$. Was passiert an den Nullstellen des Nenners?

Ausführung:

Der Nenner darf nicht null werden, daher: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Der Graph der Funktion zerfällt in drei Äste. An den Nullstellen des Nenners $x_{1,2} = \pm 1$ ist die Funktion nicht definiert. Hier nähert sich der Graph der Funktion den senkrechten Geraden $x = -1$ und $x = 1$ an.



Definition: Eine *Asymptote* einer Funktion ist eine Gerade, der sich der Graph beliebig nähert ohne sie zu berühren.

Asymptoten sind typische Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen. Die gebrochen rationale Funktion in Beispiel 740 hat drei Asymptoten: $x = -1$, $x = 1$ und $y = 0$ (die x-Achse).

Aufgaben

741 Von einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind einige Funktionswerte bekannt. Gib einen passenden Funktionsterm an und zeichne den Graphen!

a) $f(-3) = f(4) = 0,\ \ f(2) = 2$

b) $f(-5) = f(3) = 0,\ \ f(0) = 4$

c) $f(2) = f(5) = 0,\ \ f(3) = -3$

d) $f(0) = 0,\ \ f(1) = -2,\ \ f(3) = 3$

e) $f(-3) = 0,\ \ f(1) = 1,\ \ f(4) = 6$

742 Wie 741:

a) $f(-3) = f(0) = f(1) = 0,\ \ f(4) = 2{,}5$

b) $f(-1) = f(2) = f(5) = 0,\ \ f(1) = -2$

c) $f(-1{,}5) = f(-1) = f(6) = 0,\ \ f(2) = 5$

d) $f(-3) = f(4) = 0,\ \ f(1) = -1,\ \ f(2) = 2$

e) $f(-2) = f(3) = 0,\ \ f(0) = 1,\ \ f(1) = 3$

743 Die Nullstellen einer Funktion seien x_1, x_2, … x_n. Experimentiert am Computer und begründet folgende Aussagen:

a) $f(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ mit $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ ist eine Polynomfunktion mit genau diesen Nullstellen.

b) Eine Polynomfunktion, die genau diese Nullstellen hat, hat mindestens Grad n.

744 Vewendet die Aussagen aus Aufgabe 743 und bestimmt damit jeweils zwei Polynomfunktionen mit den gegebenen Nullstellen:

a) $x_1 = -4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

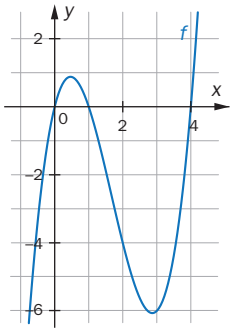
b) $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

c) $x_1 = -5,\ x_2 = -3,\ x_3 = 0$

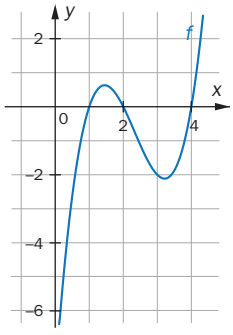
d) $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5$

745 Wie 744:

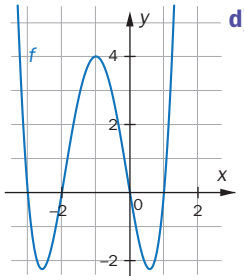
a)



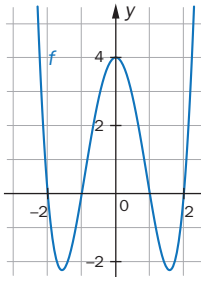
b)



c)



d)

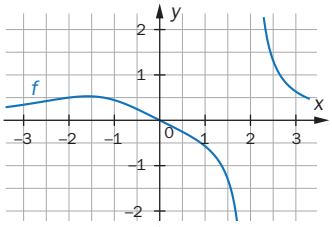


746 Wie viele Nullstellen hat eine Polynomfunktion von Grad n höchstens? Experimentiert am Computer!

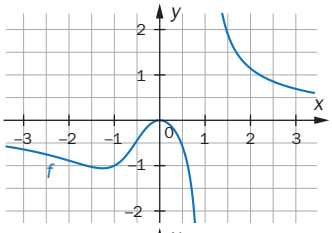
747 Untersucht: Eine Polynomfunktion von Grad n hat höchstens $n - 1$ lokale Extrema. Experimentiert am Computer!

748 Gib die Asymptoten der Funktion an.

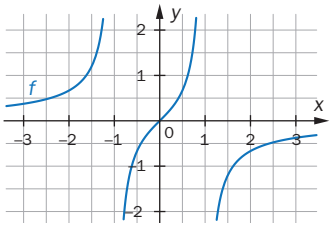
a)



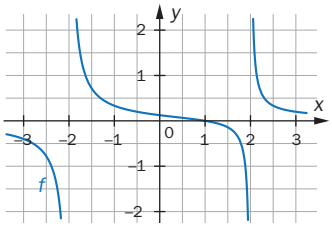
b)



c)



d)



749 Gib die größtmögliche Definitionsmenge an und zeichne den Graphen der Funktion. Welche Asymptoten hat die Funktion?

a) $f(x) = \dfrac{-5x}{(1-x)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{2 \cdot (x^2 - 1)}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - x^3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{-2 \cdot (1 - x^4)}$

5.7 Exponentialfunktion

Definition: Die *Exponentialfunktion zur Basis a* ist eine reelle Funktion der Form $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $y(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Bemerkung: Die eulersche Zahl *e* spielt im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen eine sehr wichtige Rolle. Besonders oft wird die Eponentialfunktion mit Basis *e* verwendet.

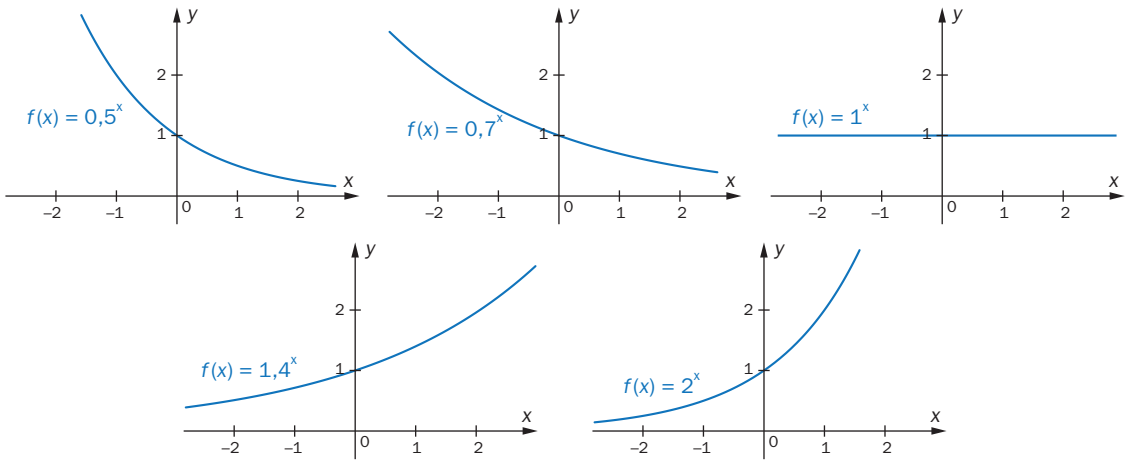
$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\quad y = e^x$ … **natürliche Exponentialfunktion**

Hinweis

Die Umformung $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ erlaubt uns, jede Exponentialfunktion als natürliche Exponentialfunktion darzustellen (vgl. Aufgabe 755).

750 Zeichne mit dem Funktionsplotter verschiedene Exponentialfunktionen. Beschreibe und begründe ihre gemeinsamen Eigenschaften.

Ausführung: Einige Graphen:



Jeder Graph läuft durch den Punkt $(0\,|\,1)$, weil für jede Basis $a > 0$ $\quad f(0) = a^0 = 1$ ist.

Jeder Funktionsgraph verläuft oberhalb der *x*-Achse, weil für jede Basis $a > 0$ $\quad f(x) = a^x > 0$ ist.

Satz: *Eigenschaften* der Exponentialfunktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ y = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+$

Der Graph verläuft durch den Punkt $(0\,|\,1)$: $f(0) = 1$

Alle Funktionswerte sind positiv: $f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Monotonie: $\left.\begin{array}{l} f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ f \text{ ist streng monoton fallend} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Basis } a > 1 \\ \text{Basis } a < 1 \end{array}\right.$

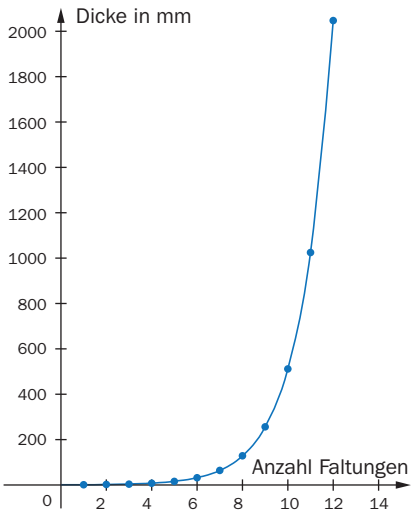
751 Ein Blatt Papier ist etwa 0,5 mm dick. Beschreibe durch eine geeignete Funktion die Höhe eines Papierstapels, der durch wiederholtes Falten eines Blattes Papier entsteht. Stelle diese als Funktionsterm, Wertetabelle und grafisch dar.
Wie oft müsste man das Blatt theoretisch falten, damit der gefaltete Stapel höher ist als ein 1,75 m großer Mensch?

Ausführung: Zu Beginn ist das Papier $f(0) = 0{,}5$ mm dick. Nach dem ersten Falten $f(1) = 2 \cdot 0{,}5$ mm, nach zweimaligem Falten $f(2) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5\ \text{mm} = 2^2 \cdot 0{,}5$ mm, usw.
Nach *n*-maligem Falten ist das Papier $f(n) = 2^n \cdot 0{,}5$ mm dick.

Aus dem Graphen oder der Tabelle lesen wir ab, wie oft wir falten müssen, damit $f(n) \geqslant 1\,750$ ist.

Ergebnis: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0{,}5 \cdot 2^x$

Um eine Höhe von mehr als 1,75 m zu erreichen, müssten wir das Blatt Papier theoretisch 12 Mal falten.



	A	B
1	n	f(n) in mm
2	0	0.5
3	1	1
4	2	2
5	3	4
6	4	8
7	5	16
8	6	32
9	7	64
10	8	128
11	9	256
12	10	512
13	11	1024
14	12	2048
15	13	4096
16	14	8192
17	15	16384
18	16	32768
19	17	65536
20	18	131072

Hinweis

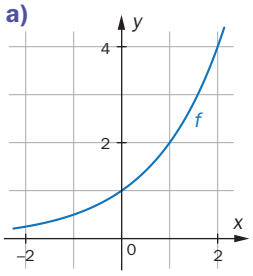
Die Lösung ergibt sich auch durch die Exponentialungleichung $0{,}5 \cdot 2^x \geqslant 1\,750$ (vgl. Abschnitt 1.5).

Weitere Anwendungsaufgaben findest du in Kapitel 6.

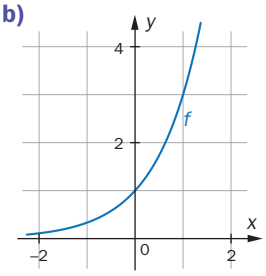
Aufgaben

752 Stelle die gegebene Exponentialfunktion durch ihren Funktionsterm dar:

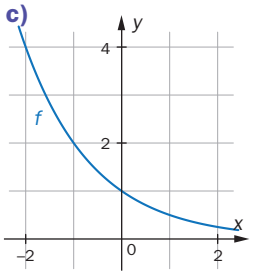
a)



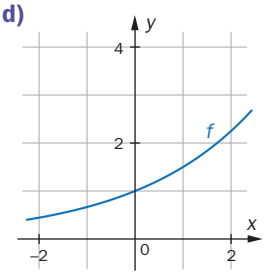
b)



c)



d)



753 Eine Bank gewährt für ein Sparbuch p % Zinsen pro Jahr. Gib eine Funktion $K(n)$ an, die den Kapitalstand nach n Jahren beschreibt. Gehe dabei von einem Anfangskapital von K_0 Euro aus und berücksichtige Zinsen und Zinseszinsen.

Wie lange dauert es jeweils, bis sich das Anfangskapital verdoppelt?

a) $K_0 = 1\,000$ €, $p = 2{,}5$

b) $K_0 = 1\,800$ €, $p = 1{,}25$

c) $K_0 = 3\,200$ €, $p = 2{,}75$

d) $K_0 = 5\,900$ €, $p = 2{,}8$

754 Bakterien vermehren sich in einer Bakterienkultur mit der angegebenen Geschwindigkeit. Zu Beginn der Beobachtung sind N_0 Bakterien vorhanden.

Beschreibe das Wachstum der Bakterienpopulation durch eine Funktion $N(t)$, wobei $t \geqslant 0$ die Beobachtungszeit in Minuten ist.

Wie lange dauert es jeweils, bis sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt?

a) $N_0 = 100\,000$,
Anzahl verdoppelt sich alle 15 Minuten

b) $N_0 = 1\,000\,000$,
Anzahl vervierfacht sich alle 45 Minuten

c) $N_0 = 10\,000$,
Anzahl verdreifacht sich alle 30 Minuten

d) $N_0 = 50\,000$,
Anzahl verfünffacht sich jede Stunde

755 Überprüfe durch Plotten der Graphen, dass $f(x) = 2^x$ und $g(x) = e^{x \cdot \ln 2}$ identische Funktionen sind!

756 Erklärt und begründet folgende Schlussfolgerung: Die Exponentialfunktion ist bijektiv. ⇒ Es gibt eine Umkehrfunktion.

5.8 Logarithmusfunktion

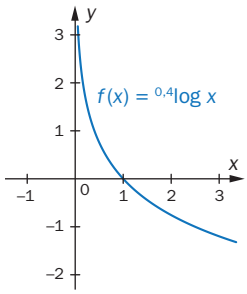
Definition: Die *Logarithmusfunktion* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y(x) = {}^a\log x$ zur Basis $a \neq 1$ ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis a.

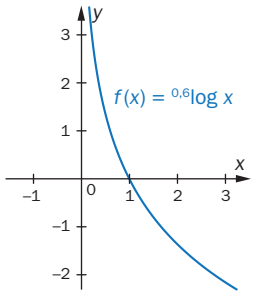
Bemerkung: Weil für die Exponentialfunktion gilt $D_f = \mathbb{R},\ W_f = \mathbb{R}^+$, gilt für die Logarithmusfunktion $D_f = \mathbb{R}^+,\ W_f = \mathbb{R}$. Die Exponentialfunktion zur Basis $a = 1$ hat keine Umkehrfunktion, daher gibt es keinen Logarithmus zur Basis 1.

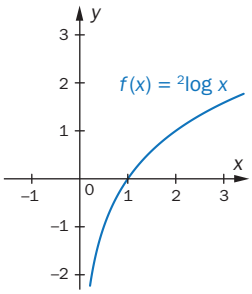
$$y = {}^a\log x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \forall\, y \in \mathbb{R}^+$$

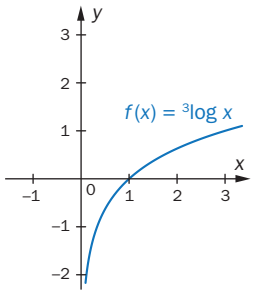
757 Zeichne mit dem Funktionsplotter verschiedene Logarithmusfunktionen. Beschreibe und begründe ihre gemeinsamen Eigenschaften.

Ausführung: Einige Graphen:









Jeder Graph verläuft durch den Punkt $(1\,|\,0)$, weil für jede Basis $a > 0,\ a \neq 1$ gilt:

$f(1) = {}^a\log 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(1)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = 0$

Satz: *Eigenschaften* der Logarithmusfunktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y(x) = {}^a\log x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Der Graph verläuft durch den Punkt $(1\,|\,0)$: $f(1) = 0$

Monotonie: $\left.\begin{array}{r} f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ f \text{ ist streng monoton fallend} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Basis } a > 1 \\ \text{Basis } a < 1 \end{array}\right.$

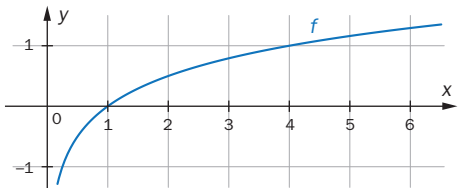
Besondere Logarithmusfunktionen

Dyadischer (= Binärer) Logarithmus = Zweierlogarithmus	$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = {}^2\log x = \operatorname{ld} x$
Dekadischer Logarithmus = Zehnerlogarithmus	$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = {}^{10}\log x = \lg x$
Natürlicher Logarithmus	$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = {}^e\log x = \ln x$

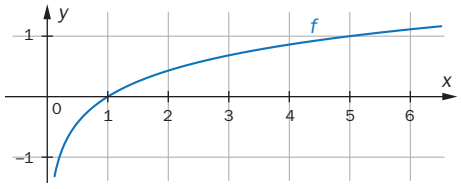
Aufgaben

758 Stelle die gegebene Logarithmusfunktion durch ihren Funktionsterm dar:

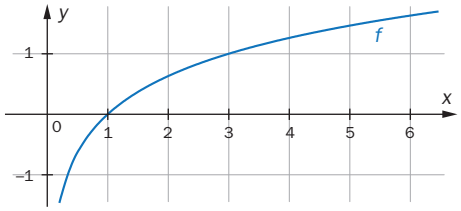
a)



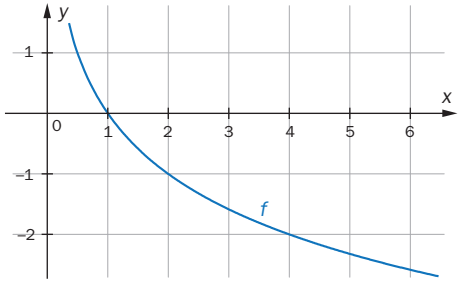
b)



c)



d)



759 Stelle die Graphen der folgenden Logarithmusfunktionen dar und untersuche, ob welche davon gleich sind:

a) $f(x) = \ln(x^2)$

b) $g(x) = \ln(x + 2)$

c) $h(x) = \ln(2x)$

d) $i(x) = 2 \ln(x)$

e) $j(x) = (\ln(x))^2$

760 Erstelle eine Wertetabelle der gegebenen Logarithmusfunktion und zeichne den Graphen.
Zur Umrechnung der Basen kannst du den Zusammenhang

$$^{c}\log b = \frac{^{a}\log b}{^{a}\log c}$$

verwenden (siehe Aufgabe 121 aus Kapitel 1).

a) $f(x) = {}^{2}\log x$

b) $f(x) = {}^{3}\log x$

c) $f(x) = {}^{5}\log x$

d) $f(x) = {}^{8}\log x$

761 Untersucht mit dem Computer Funktionsgraphen der Form $f(x) = {}^{b}\log x$, wobei b eine Basis nahe 1 ist. Beschreibt, welcher Graph schließlich die Funktion $f(x) = {}^{1}\log x$ beschreiben müsste! Warum stellt dieser Graph **keine** Funktion dar?

762 Simon erkennt: „Je größer die Basis der Logarithmusfunktion ist, umso flacher ist der Graph.“ Hat er recht?
Experimentiert am Computer! Unterscheidet die Fälle $a > 1$ und $a < 1$!

763 Hat die Logarithmusfunktion $f(x) = {}^{a}\log x$ eine oder mehrere Asymptoten? Experimentiert am Computer und unterscheidet die Fälle $a > 1$ und $a < 1$.

764 Recherchiert im Internet: Was bedeutet die Einheit Dezibel und was verbindet sie mit dem Logarithmus? Erstellt eine Präsentation!

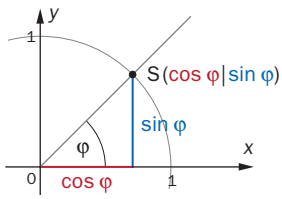
765 Recherchiert im Internet: Was besagt das Weber-Fechner‘sche Gesetz? Stellt einen Zusammenhang mit Logarithmusfunktionen her und erstellt eine Präsentation!

766 Die Richter-Skala wird dazu verwendet, die Stärke von Erdbeben zu beschreiben. Recherchiert im Internet: Welcher Zusammenhang besteht zur Logarithmusfunktion? Erstellt eine Präsentation!

767 Recherchiert im Internet: Was haben die Nautilus-Spirale und Sonnenblumen mit dem Logarithmus zu tun? Erstellt eine Präsentation!

5.9 Sinus, Cosinus und Tangens für beliebige Winkel

In der 5. Klasse haben wir Sinus und Cosinus nur für Winkel $0° \leqslant \varphi \leqslant 360°$ definiert, und zwar als die Koordinaten eines Punktes S am Einheitskreis:



$\sin \varphi$ … y-Koordinate von S

$\cos \varphi$ … x-Koordinate von S

Der Tangens ist ein Quotient: $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$

Der Punkt S kann aber auch mehr als eine Umdrehung machen. Da sich die Sinus- und Cosinuswerte alle 360° wiederholen werden, erweitern wir die Definition wie folgt:

Definition: Wir definieren Sinus und Cosinus für beliebige Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$:

$\sin(\varphi \pm 360°) = \sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi \pm 360°) = \cos(\varphi)$

Immer wieder taucht bei theoretischen Überlegungen ein Sinus oder Cosinus von einer Summe oder Differenz zweier Winkel auf. Wie damit umzugehen ist, zeigt der folgende Satz. (Beweis siehe Aufgabe 774.)

Satz: *Additionstheoreme* für Sinus und Cosinus

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

768 Beweise: $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

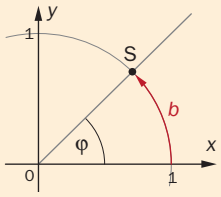
Ausführung: Wir schreiben 2α als Summe und wenden das erste Additionstheorem aus obigem Satz an:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Gradmaß und Bogenmaß

Durch jeden Winkel φ ist ein Punkt S am Einheitskreis eindeutig festgelegt. Die Lage dieses Punktes S können wir aber auch durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens b am Einheitskreis angeben. Das verwenden wir zur Einführung eines neuen Winkelmaßes:

Satz: Der Winkel φ ist durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens am Einheitskreis, sein *Bogenmaß*, eindeutig festgelegt.



Die Einheit des Bogenmaßes ist rad (Radiant).

Zusammenhang Gradmaß – Bogenmaß:

$$180° = \pi \text{ rad} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

769 Welchem Winkel entspricht $\alpha = 90°$ im Bogenmaß? Wie groß ist $\beta = \frac{\pi}{3}$ im Gradmaß?

Ausführung:

$$180° = \pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 60°$$

Aufgaben

770 Begründe anhand des Einheitskreises, dass allgemein gilt:

a) $\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha)$

b) $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$

c) $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$

d) $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

e) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$

f) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

771 Wie 774:

a) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

b) $\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

772 Beweise: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

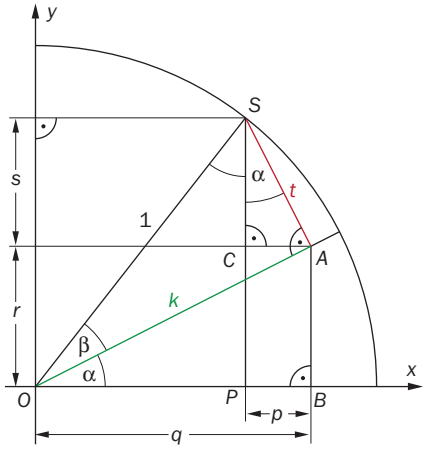
773 Stelle in Abhängigkeit von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ dar. Verwende die Additionstheoreme:

a) $\sin 3\alpha$ **b)** $\cos 3\alpha$

c) $\sin(\alpha + 2\beta)$ **d)** $\cos(2\alpha - \beta)$

e) $\sin(2\alpha - 2\beta)$ **f)** $\cos(3\alpha + 2\beta)$

774 Erklärt folgenden Beweis für das Additionstheorem zum Sinus:



$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= r + s\\ &= \sin\alpha \cdot k + \cos\alpha \cdot t\\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

775 Wie 774 für das Additionstheorem zum Cosinus. Verwende dieselbe Abbildung.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= q - p\\ &= \cos\alpha \cdot k - \sin\alpha \cdot t\\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

776 Leite mithilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus her:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

777 Gib im Gradmaß an.

a) $\frac{\pi}{2}$ rad **b)** $\frac{\pi}{4}$ rad

c) $\frac{\pi}{3}$ rad **d)** $\frac{3\pi}{4}$ rad

e) $\frac{2\pi}{3}$ rad **f)** $\frac{5\pi}{6}$ rad

778 Gib im Gradmaß an.

a) $\frac{3\pi}{2}$ rad **b)** $\frac{4\pi}{3}$ rad

c) $\frac{6\pi}{5}$ rad **d)** $\frac{5\pi}{2}$ rad

e) $\frac{7\pi}{3}$ rad **f)** $\frac{9\pi}{8}$ rad

779 Gib im Bogenmaß an.

a) 45° **b)** 60°

c) 120° **d)** 240°

e) 315° **f)** 320°

780 Gib im Bogenmaß an.

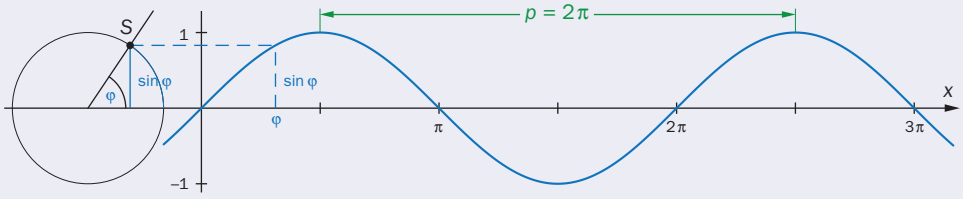
a) 405° **b)** 390°

c) 450° **d)** 640°

e) 540° **f)** 720°

5.10 Winkelfunktionen

Grundvorstellung: Während sich S am Einheitskreis bewegt, verändert sich der Winkel φ.
Stelle dir vor: Du trägst auf der waagrechten Achse den Winkel ein und rollst die y-Koordinate von S ab.
Dabei entsteht der Graph der Sinusfunktion.

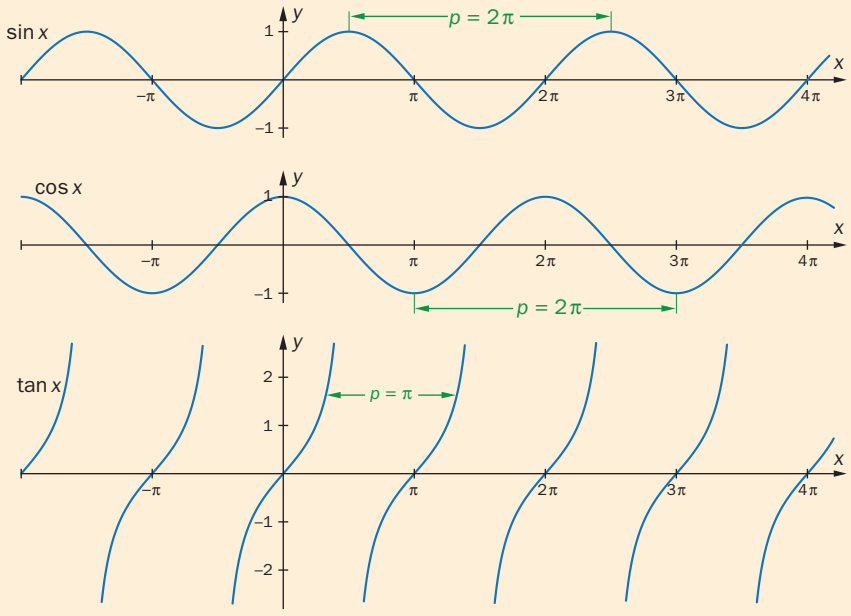


Beachte die Einstellung für die Ein- und Ausgabe von Winkelwerten am Taschenrechner! Üblicherweise geben wir den Winkel im Bogenmaß (Radiant) an.

Ähnlich wie die Sinusfunktion können wir auch die Cosinus- und die Tangensfunktion betrachten.

Definition: Die unabhängige Variable x bei einer *Winkelfunktion* ist ein Winkel x im Bogenmaß:

Sinusfunktion:	$f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x$	kleinste Periode: $p = 2\pi$
Cosinusfunktion:	$f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \cos x$	kleinste Periode: $p = 2\pi$
Tangensfunktion:	$f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$	kleinste Periode: $p = \pi$



781 Gib für die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ die Nullstellen, die lokalen Extremstellen und die kleinste Periode an. Verwende dazu auch ihren Graphen.

Ausführung:

Die unendlich vielen Nullstellen liegen bei den ganzzahligen Vielfachen von π, also:
$x = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Es gibt unendlich viele lokale Minima und Maxima:
lokale Maxima: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$, lokale Minima: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Die Funktion ist periodisch mit kleinster Periode $p = 2\pi$, also: $f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Satz: Jede Sinusfunktion lässt sich durch eine Cosinusfunktion ausdrücken und umgekehrt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Beweis: Siehe Aufgabe 785.

Aufgaben

782 Gib für die Cosinusfunktion $f(x) = \cos x$ an:
a) die Lage aller Nullstellen,
b) die Lage der lokalen Minima und Maxima,
c) die kleinste Periode.
Verwende dazu auch ihren Graphen.

783 Gib für die Tangensfunktion $f(x) = \tan x$ an:
a) die Lage aller Nullstellen,
b) die kleinste Periode.
Verwende dazu auch ihren Graphen.

784 Haben die Winkelfunktionen Fixpunkte? Beantworte die Frage für
a) $f(x) = \sin x$ **b)** $f(x) = \cos x$

785 Zeige anhand des Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
a) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

786 Zeige anhand des Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
a) $\cos(-x) = \cos(x)$ **b)** $\sin(-x) = -\sin(x)$

787 Begründe:
a) Die Sinusfunktion ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv und hat daher auf diesem Intervall eine Umkehrfunktion.
b) Die Cosinusfunktion ist im Intervall $[0; \pi]$ bijektiv und hat daher auf diesem Intervall eine Umkehrfunktion.

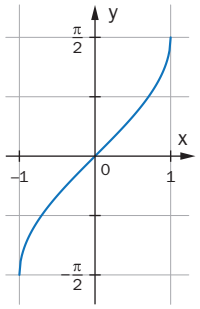
788 Ist die Aussage wahr oder falsch? Begründet!
a) Die Funktionswerte der Sinusfunktion liegen stets zwischen -1 und $+1$.
b) Die Nullstellen der Tangensfunktion liegen bei den Vielfachen von π.

789 Der Kotangens ist definiert als Kehrwert des Tangens: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$
a) Gib die größtmögliche Definitionsmenge an.
b) Skizziere den Graphen.
c) Stelle den Kotangens mithilfe von Sinus und Cosinus dar.

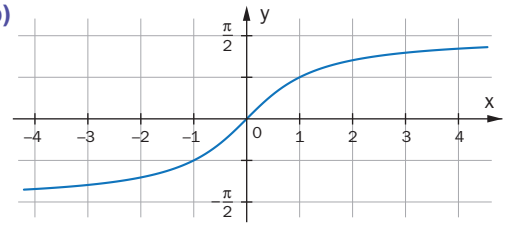
790 Fortsetzung von 789: Wie viele Nullstellen hat die Kotangensfunktion? Wo liegen sie?

791 Schränkt man den Definitionsbereich einer Winkelfunktion geeignet ein, so wird sie bijektiv. Die folgenden Graphen zeigen geeignete Umkehrfunktionen (die sogenannten Arkusfunktionen).
Gib an, zu welcher Winkelfunktion die jeweilige Umkehrfunktion passt und begründe.
Erinnere dich: Funktion und Umkehrfunktion liegen symmetrisch zur 1. Mediane.

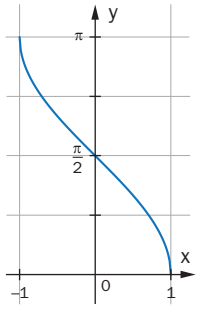
a)



b)



c)



792 Fortsetzung von 791: Gib jeweils Definitions- und Wertemenge der gegebenen Umkehrfunktion an.
a) Arkustangens: $f(x) = \arctan x$
b) Arkussinus: $f(x) = \arcsin x$
c) Arkuscosinus: $f(x) = \arccos x$

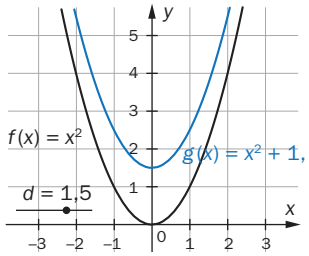
5.11 Parametervariationen

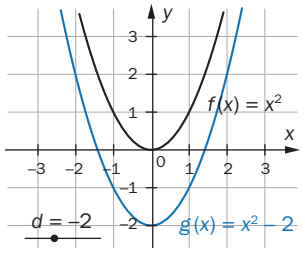
Definition: Ein *Parameter* ist eine besondere Variable. Er steht für eine reelle Zahl, die variiert werden kann. Durch Parameter lassen sich Funktionsterme allgemeiner darstellen und verändern (vgl. Band 5, Kapitel 3.8).

Aus den Grundfunktionen, die du in diesem Kapitel kennengelernt hast, erzeugen wir mithilfe von Parametern neue Funktionen: Eine reelle Funktion f wird durch den Einsatz von Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zu einer neuen Funktion g mit $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$.

793 Sei $f(x) = x^2$. Bilde mithilfe eines Parameters $d \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = f(x) + d$. Plotte die Graphen und beschreibe, wie sich der Graph von g bei Variation des Parameters d verändert.

Ausführung: $f(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 + d$ Wählen wir z. B. $d = 1{,}5$ und $d = -2$.

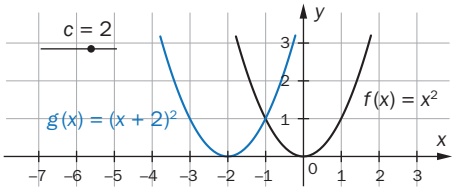


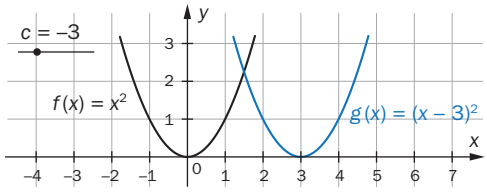


Ergebnis: Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f in Richtung der y-Achse. Für $d > 0$ wird der Graph nach oben, für $d < 0$ nach unten verschoben.

794 Sei $f(x) = x^2$. Bilde mithilfe eines Parameters $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = f(x + c)$. Plotte die Graphen und beschreibe, wie sich der Graph von g bei Variation des Parameters c verändert.

Ausführung: $f(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = (x + c)^2$ Wählen wir z. B. $c = 2$ und $c = -3$.

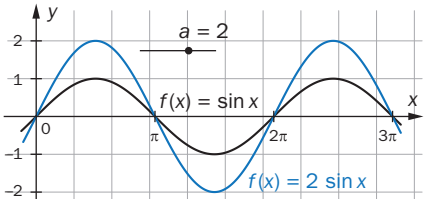


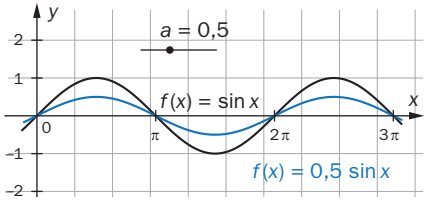


Ergebnis: Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f in Richtung der x-Achse. Für $c > 0$ wird der Graph nach links, für $c < 0$ nach rechts verschoben.

795 Sei $f(x) = \sin(x)$. Bilde mithilfe eines Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = a \cdot f(x)$. Plotte die Graphen und beschreibe, wie sich der Graph von g bei Variation des Parameters a verändert.

Ausführung: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = a \cdot \sin(x)$ Wählen wir z. B. $a = 2$ und $a = 0{,}5$

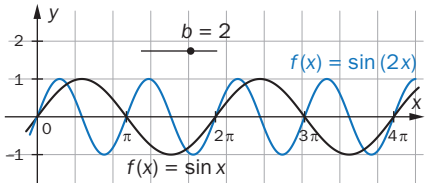


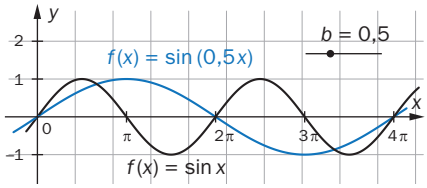


Ergebnis: Der Parameter a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung des Graphen von f in Richtung der y-Achse. Für $a > 1$ wird der Graph gestreckt, für $0 < a < 1$ wird er gestaucht, ist a negativ, so kommt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.

796 Sei $f(x) = \sin(x)$. Bilde mithilfe eines Parameters $b \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = f(b \cdot x)$. Plotte die Graphen und beschreibe, wie sich der Graph von g bei Variation des Parameters b verändert.

Ausführung: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = \sin(b \cdot x)$ Wählen wir z. B. $b = 2$ und b = 0,5.





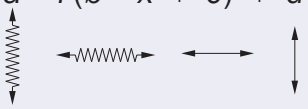
Ergebnis: Der Parameter b bewirkt eine Stauchung bzw. Streckung des Graphen von f in Richtung der x-Achse. Für $b > 1$ wird der Graph gestaucht, für $0 < b < 1$ wird er gestreckt, ist b negativ, so kommt zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse hinzu.

G

Grundvorstellung: Aus dem Graphen einer Funktion f ergibt sich der Graph von g

- mit $g(x) = a \cdot f(x)$ durch Streckung/Stauchung mit dem Faktor a entlang der y-Achse, ($a > 1$ Streckung, $0 < a < 1$ Stauchung),
- mit $g(x) = f(b \cdot x)$ durch Stauchung/Streckung mit dem Faktor b entlang der x-Achse, ($b > 1$ Stauchung, $0 < b < 1$ Streckung),
- mit $g(x) = f(x + c)$ durch Verschiebung um c Einheiten entlang der x-Achse, ($c > 0$ nach links, $c < 0$ nach rechts),
- mit $g(x) = f(x) + d$ durch Verschiebung um d Einheiten entlang der y-Achse. ($d > 0$ nach oben, $d < 0$ nach unten)

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$



Aufgaben

797 Untersuche mithilfe des Computers die Eigenschaften der Funktionen für verschiedene Werte von $b \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sqrt{x} + b$ **b)** $f(x) = \sqrt{x + b}$
c) $f(x) = \sqrt{b \cdot x}$ **d)** $f(x) = b \cdot \sqrt{x}$

798 Wie 797:

a) $f(x) = bx^2$ **b)** $f(x) = (x + b)^2$
c) $f(x) = (bx)^2$ **d)** $f(x) = x^2 + b$

799 Wie 797:

a) $f(x) = {}^a\log x + b$
b) $f(x) = {}^a\log(x + b)$ mit $(x + b) > 0$
c) $f(x) = {}^a\log(bx)$ **d)** $f(x) = b \cdot {}^a\log(x)$

800 Wie 797:

a) $f(x) = be^x$ **b)** $f(x) = e^{bx}$
c) $f(x) = e^{(x+b)}$ **d)** $f(x) = e^x + b$

801 Wie beeinflussen Parameter die Gestalt des Graphen einer Funktion? Experimentiert mit verschiedenen Funktionstypen und erstellt eine Präsentation.

802 Wie müssen in der Funktion $g(x) = (x + c)^2 + d$ die Parameter b und d gewählt werden, damit der Scheitel des Funktionsgraphen im Punkt **a)** $P(3|-2)$, **b)** $Q(-1{,}5|2{,}5)$ liegt?

803 Wie müssen in der Funktion $g(x) = (x + b)^3 + d$ die Parameter b und d gewählt werden, damit der Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Punkt **a)** $P(1|3)$, **b)** $Q(-0{,}5|-1{,}5)$ liegt?

804 Wie muss der Parameter b gewählt werden, damit die Funktion $f(x) = \sin(b \cdot x)$ die kleinste Periode **a)** $p = \pi$, **b)** $p = 3\pi$, **c)** $p = \frac{\pi}{2}$ besitzt?

805 Zeige dass die Funktion $f(x) = \sin(b \cdot x + c)$ die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ hat!

806 Es gilt allgemein für $a, b, A, p \in \mathbb{R}$:

$a \sin x + b \cos x = A \sin(x + p)$

Weist den Zusammenhang experimentell durch Parametervariation am Computer nach. Überprüft, dass $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ gilt!

5.12 Verketten von Funktionen

Wir können mehrere Funktionen hintereinander anwenden. Dazu verwenden wir den Ausgabewert der einen Funktion als Eingabewert für die nächste.

Definition: *Verketten* (= hintereinander Ausführen) *von Funktionen*

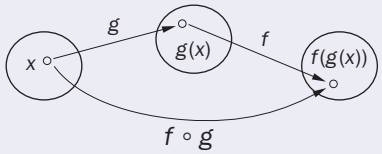
Zwei Funktionen $f\colon D_f \to W_f,\ x \mapsto f(x)$ und $g\colon D_g \to W_g,\ x \mapsto g(x)$ werden verkettet, indem wir sie hintereinander ausführen. Wir schreiben:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad \text{sprich: „}f\text{ ring }g\text{ von }x\text{“}$$

G

Grundvorstellung:

$f \circ g$ heißt f nach g



807 Gegeben sind zwei Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
Beschreibe $f \circ g$ und $g \circ f$ durch die Funktionsterme und skizziere die Graphen aller auftretenden Funktionen.

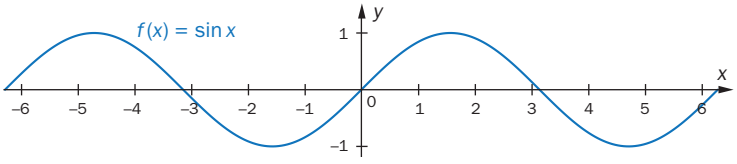
Ausführung:

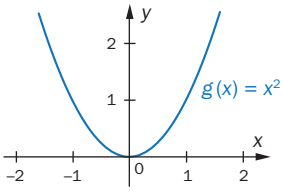
Die Funktionsterme der verketteten Funktionen erhalten wir aus der Definition:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x$

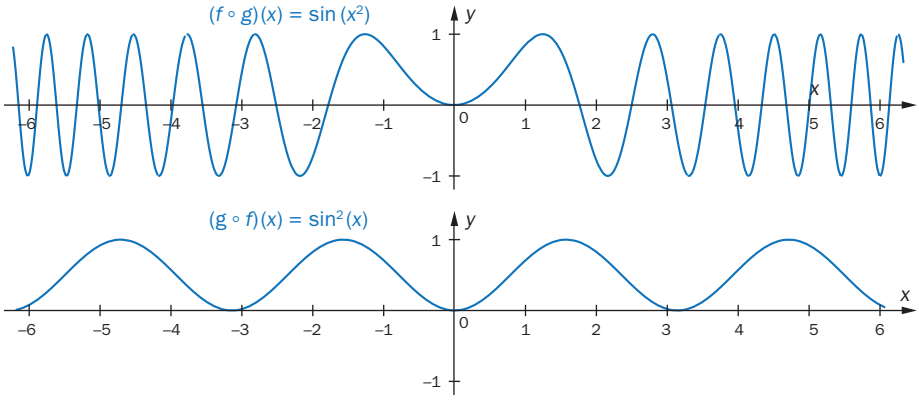
Anmerkung: $(\sin x)^2$ wird kurz als $\sin^2 x$ angeschrieben.

Graphen der Ausgangsfunktionen:





Graphen der verketteten Funktonen:



Hinweis

Du siehst: Die Reihenfolge ist bei der Verkettung von Funktionen entscheidend.
Im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$. Für bijektive Funktionen gilt jedoch folgender Satz.

Satz: Die Verkettung einer (bijektiven) Funktion f mit ihrer Umkehrfunktion f^{-1} ergibt die identische Funktion:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{D}$$

Anders gesagt: „Was immer f auch tut, f^{-1} macht's wieder gut."

Aufgaben

808 Gegeben sind zwei Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beschreibe $f \circ g$ und $g \circ f$ durch die Funktionsterme und plotte die Graphen aller auftretenden Funktionen:

a) $f(x) = x + 3$ und $g(x) = 2 \cdot x$

b) $f(x) = x + 1$ und $g(x) = -5 \cdot x$

c) $f(x) = x + 6$ und $g(x) = x - 4$

d) $f(x) = 2 \cdot x$ und $g(x) = -5 \cdot x$

809 Wie 808:

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = \cos x$

b) $f(x) = x - 1$ und $g(x) = \sin x$

c) $f(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \sin x$

d) $f(x) = \cos x$ und $g(x) = x^{-2}$

810 Überprüfe für die Aufgaben 808 und 809, ob für die Verkettung der Funktionen $f \circ g = g \circ f$ gilt.

811 Unter *Iteration* verstehen wir die wiederholte Anwendung derselben Funktion f. Dabei bilden wir der Reihe nach $f(x)$, $(f \circ f)(x)$, $(f \circ f \circ f)(x)$, usw.

Iteriere die Funktion f. Welche Funktion erhältst du nach n Iterationen?

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = x - 3$

c) $f(x) = x \cdot 5$

d) $f(x) = x \cdot 2$

e) $f(x) = x : 4$

f) $f(x) = x : (-3)$

812 Wie 811:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 5$

d) $f(x) = (3x)^2$

e) $f(x) = 3x^2$

f) $f(x) = (-x)^2$

813 Gebt den Funktionsterm $(f \circ g)(x)$ mit $f(x) = 4 \sin(x)$ an und plottet den Funktionsgraphen:

a) $g(x) = 8x$

b) $g(x) = 8x + \sin(x)$

c) $g(x) = 8x + 3 \sin(x)$

814 Die Funktion $f(x) = ax(1 - x)$ dient als Modell für Wachstumsprozesse (logistisches Wachstum).

Als Definitionsmenge wählt man $x \in]0; 1[$ und interpretiert diesen Wert als (skalierte) Größe einer Population. Der Parameter $a \in]0; 4[$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit oder Vermehrungsrate an.

Wiederholtes Anwenden der Funktion auf ihr eigenes Ergebnis simuliert die Veränderung der Population von einem Zeitpunkt zum nächsten.

a) Wählt in eurer Gruppe jeweils unterschiedliche Werte für a und führt für den Anfangswert $x = 0{,}5$ mehrere Iterationen aus.

b) Stellt eine Tabelle der Ergebnisse zusammen: Für welche Werte von a strebt die Folge der Funktionswerte nach 0? Für welche Werte erreicht die Iteration einen stabilen Grenzwert > 0? Gibt es Werte von a, wo die Iteration zwischen zwei Resultaten „pendelt"?

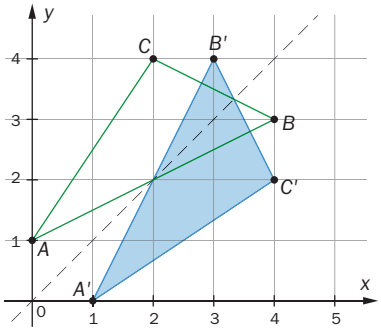
c) Für welche Werte von a könnt ihr überhaupt keine Regelmäßigkeit entdecken?

5.13 Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ E

Wir haben bisher Funktionen als eindeutige Zuordnung zwischen reellen Zahlen kennengelernt. Wir können aber auch eindeutige Zuordnungen zwischen anderen mathematischen Objekten festlegen und kommen dabei zu einem verallgemeinerten Funktionsbegriff:

Definition: Eine allgemeine Funktion (*Abbildung*) legt für jeden Eingabewert aus der Menge A eindeutig einen Funktionswert aus der Menge B fest. Die Definitionsmenge $D_f = A$ und die Wertemenge $W_f = B$ sind dabei Mengen beliebiger Objekte.

815 Die Rechenvorschrift (Abbildung) S ordnet Punkten des $\mathbb{R}^2$ neue Punkte des $\mathbb{R}^2$ zu: $S\colon (x|y) \mapsto (y|x)$
Berechne die Bildpunkte A', B' und C' des Dreiecks $A(0|1)$; $B(4|3)$; $C(2|4)$. Welche Figur entsteht? Welcher geometrischen Abbildung entspricht diese Rechenvorschrift?



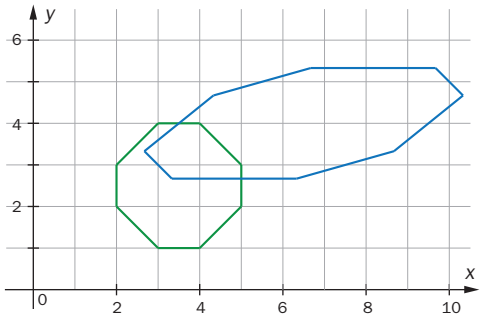
Ausführung:
$A(0|1) \mapsto A'(1|0)$ $B(4|3) \mapsto B'(3|4)$ $C(2|4) \mapsto C'(4|2)$

Ergebnis: Die Punkte A', B' und C' bilden wieder ein Dreieck, das zum Ausgangsdreieck kongruent ist. Die Abbildung wirkt wie eine Spiegelung an der 1. Mediane.

816 Wende die Rechenvorschrift $F\colon (x|y) \mapsto \frac{1}{3}(7x - 2y|2x + 2y)$ auf das Achteck $(3|1)$; $(4|1)$; $(5|2)$; $(5|3)$; $(4|4)$; $(3|4)$; $(2|3)$; $(2|2)$ an. Handelt es sich bei der Abbildung um eine Drehung oder Spiegelung? Wie wirkt die Abbildung auf parallele Seiten der Ausgangsfigur?

Ausführung:

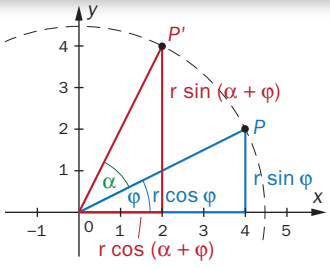
$(x\|y)$	$F(x\|y)$
$(3\|1)$	$(6{,}33\|2{,}67)$
$(4\|1)$	$(8{,}67\|3{,}33)$
$(5\|2)$	$(10{,}33\|4{,}67)$
$(5\|3)$	$(9{,}67\|5{,}33)$
$(4\|4)$	$(6{,}67\|5{,}33)$
$(3\|4)$	$(4{,}33\|4{,}67)$
$(2\|3)$	$(2{,}67\|3{,}33)$
$(2\|2)$	$(3{,}33\|2{,}67)$



Ergebnis: Die Bildfigur ist ein verzerrtes Abbild des Urbildes. Es handelt sich weder um eine Drehung noch um eine Spiegelung. Parallele Strecken im Urbild bleiben auch im Abbild parallel.

Satz: Die *Drehung* eines Punktes $(x|y)$ um den Koordinatenursprung mit dem Drehwinkel α lässt sich darstellen durch die Abbildung: $(x|y) \mapsto (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha | x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)$

Beweis: Für $P(x|y)$ gilt: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$
Für $P(x'|y')$ gilt: $x' = r\cos(\alpha + \varphi)$; $y' = r\sin(\alpha + \varphi)$



Für x' erhalten wir mit dem Additionstheorem (vgl. Aufgabe 775):
$x' = r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) =$
$= r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi = x\cos\alpha - y\sin\alpha$
Der Beweis für y' wird analog geführt (s. Aufgabe 829).

Die Rechenvorschriften bei den bisher behandelten Abbildungen entsprechen dem Muster $(x|y) \mapsto (ax + by|cx + dy)$. Solche Abbildungen nennen wir lineare Abbildungen. Sie werden durch die Parameter a, b, c und d festgelegt und können daher besonders übersichtlich mithilfe von Matrizen angeschrieben werden: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Um die Koordinaten des Bildpunktes P' des Punktes $P(x|y)$ zu berechnen, multiplizieren wir die Matrix M mit dem Punkt P: $P' = M \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Matrizen haben wir bereits im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen kennengelernt (vgl. S. 28).

Aufgaben

817 Untersuche die gegebene Abbildung anhand der Punkte $A(0|1)$, $B(3|0)$, $C(2|2)$ und versuche eine geometrische Interpretation zu finden.

a) D: $(x|y) \mapsto (-y|x)$

b) T: $(x|y) \mapsto (x + 4|y - 2)$

c) D: $(x|y) \mapsto (x + y|x - y)$

d) D: $(x|y) \mapsto \frac{1}{5}(3x + 4y|4x - 3y)$

e) K: $(x|y) \mapsto \left(\frac{x}{2}\middle|\frac{y}{2}\right)$

818 Weise nach, dass es sich bei der Abbildung S: $(x|y) \mapsto (y|x)$ aus Beispiel 815 tatsächlich um eine Spiegelung an der Geraden $y = x$ handelt. Du musst dafür zeigen:

a) Ein beliebiger Punkt $P(x|y)$ und sein Abbild $P'(x'|y')$ haben den gleichen Normalabstand von der Geraden $y = x$.

b) $\overrightarrow{PP'}$ steht normal auf die Gerade $y = x$.

819 Weise nach, dass die Abbildung D: $(x|y) \mapsto (-y|x)$ aus Aufgabe 817 als Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel 90° wirkt. Du musst dafür zeigen:

a) Ein beliebiger Punkt $P(x|y)$ und sein Abbild $P'(x'|y')$ haben den gleichen Abstand vom Ursprung.

b) $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ stehen aufeinander normal.

820 Weise nach, dass die Abbildung K: $(x|y) \mapsto \left(\frac{x}{2}\middle|\frac{y}{2}\right)$ aus Aufgabe 817 als zentrische Kontraktion (Verkleinerung um den Faktor $\frac{1}{2}$) wirkt. Du musst dafür zeigen:

a) Das Abbild $P'(x'|y')$ eines beliebigen Punktes $P(x|y)$ hat einen um den Faktor $\frac{1}{2}$ geringeren Abstand vom Ursprung.

b) $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ sind parallel.

821 Beschreibe die Abbildungen in den Aufgaben 815 und 816 durch Matrizen.

822 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ beschreiben die zentrische Streckung mit dem Faktor k.

Überprüfe dies anhand des Dreiecks $A(0|0)$, $B(8|8)$ und $C(2|2)$.

823 Was passiert, wenn der Parameter k einer zentrischen Streckung (siehe Aufgabe 822) negativ ist?

824 **a)** – **e)** Gib für die Abbildungen aus Aufgabe 817 die Abbildungsmatrix an. In welchem Fall ist das nicht möglich?

825 Drehe das Quadrat $A(\sqrt{3}|1)$, $B(-1|\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{3}|-1)$ und $D(d_x|d_y)$ um den Koordinatenursprung um den Winkel

a) $\alpha = 30°$, **b)** $\beta = 150°$, **c)** $\gamma = -60°$.

Schreibe jeweils die Abbildungsmatrix an!

826 Untersucht folgende Drehmatrizen und gebt an, um welchen Winkel jeweils gedreht wird:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

827 Gibt es Punkte, deren Position sich nach Anwendung der Abbildung von Beispiel 816 nicht ändert?

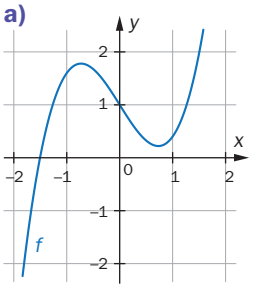
828 Wie lassen sich lineare geometrische Abbildungen am Computer durchführen? Experimentiere mit verschiedenen Abbildungen dieses Abschnitts!

829 Ein Punkt $P'(x|y)$ entsteht durch Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α aus dem Punkt $P(x|y)$. Beweise, dass gilt:
$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

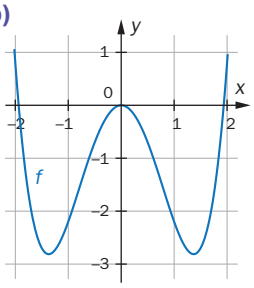
Vermischte Aufgaben

830 Beschreibe die Eigenschaften der Funktion: Nullstellen, Fixpunkte, Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie, Periodiziät.

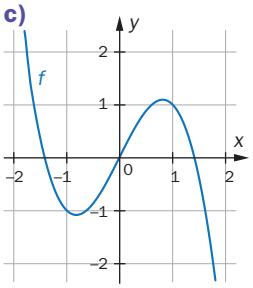
a)



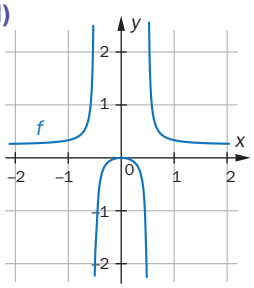
b)



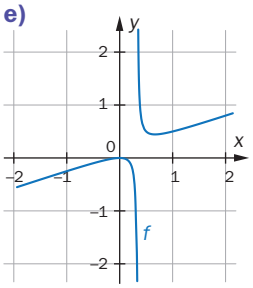
c)



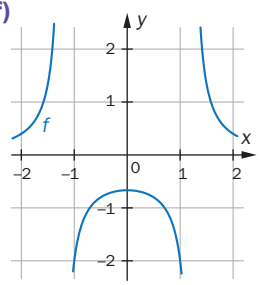
d)



e)

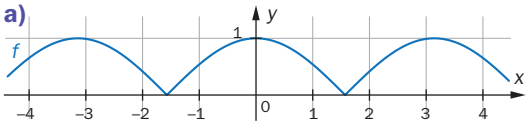


f)

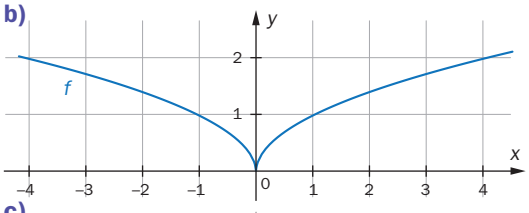


831 Wie 830:

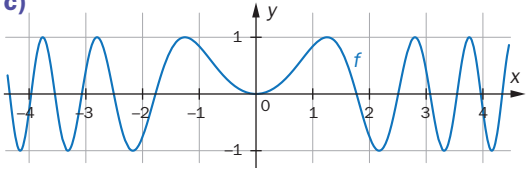
a)



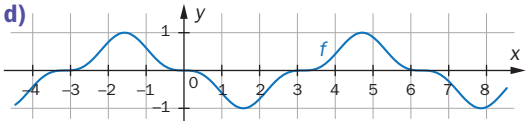
b)



c)



d)



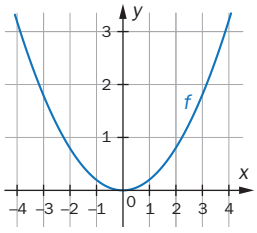
832 Plotte den Graphen der Funktion und beschreibe ihre Eigenschaften: Nullstellen, Fixpunkte, Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie, Periodiziät.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 3x$

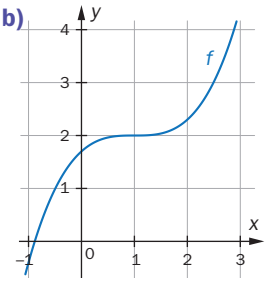
c) $f(x) = \sin(4x)$ **d)** $f(x) = 4\cos(x)$

833 Ist die gegebene Funktion bijektiv? Verwende den größtmöglichen Definitions- und Wertebereich und begründe!

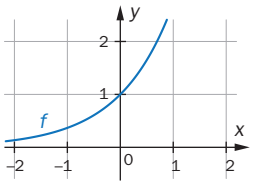
a)



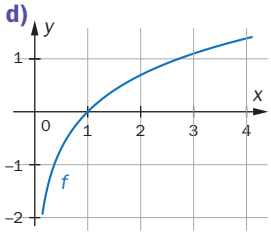
b)



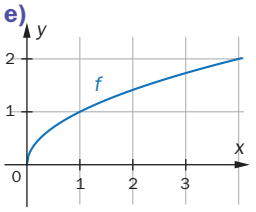
c)



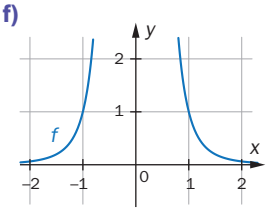
d)



e)



f)

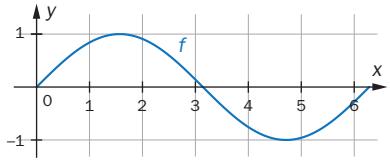


834 Fortsetzung von 833: Skizziere, wenn möglich, die Umkehrfunktion zur gegebenen Funktion!

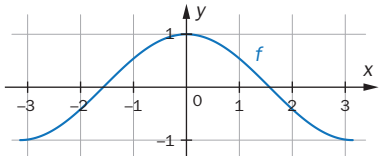
835 Fortsetzung von 833: Ist die gegebene Funktion injektiv oder surjektiv? Verwende den größtmöglichen Definitions- und Wertebereich und begründe!

836 Wie 833:

a)



b)



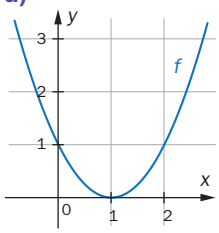
837 Skizziere, wenn möglich, die Umkehrfunktion der gegebenen Funktion.

a) $f(x) = \ln x + 3$ **b)** $f(x) = \ln (x + 4)$

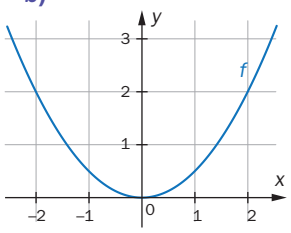
c) $f(x) = 5 \cdot \ln x$ **d)** $f(x) = \ln (2x)$

838 Gib jeweils einen geeigneten Funktionsterm an:

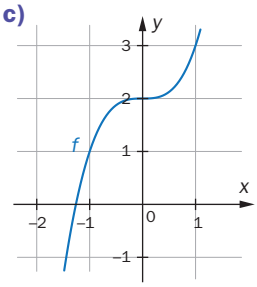
a)



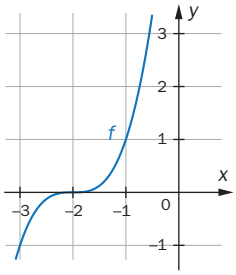
b)



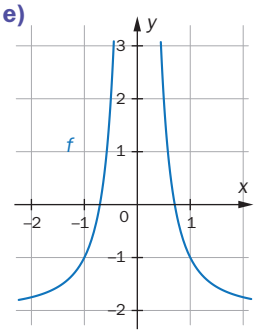
c)



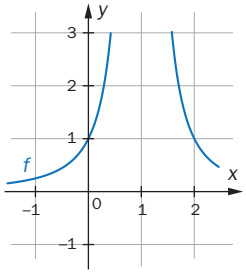
d)



e)



f)



839 Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen ohne sie zu plotten.

a) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -2x^2$,
$f_3(x) = x^2 + 3$, $f_4(x) = (x - 3)^2$

b) $f_1(x) = x^{-3}$, $f_2(x) = x^{-3} + 2$,
$f_3(x) = (x + 2)^{-3}$, $f_4(x) = -(x + 2)^3$

c) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{5}{x^2}$
$f_3(x) = \frac{1}{x^2} - 3$, $f_4(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

d) $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^x - 3$,
$f_3(x) = e^{x-3}$, $f_4(x) = 3 \cdot e^x$

840 Den Graphen einer Funktion f können wir durch Parametervariation verändern. Im Folgenden ist jeweils angegeben, was die Variation des Parameters bewirkt. Experimentiere mit verschiedenen Funktionen und begründe anhand geeigneter Beispiele:

a) $f(x) + a$ $\Rightarrow$ Verschieben in y-Richtung

b) $f(x - a)$ $\Rightarrow$ Verschieben in x-Richtung

c) $a \cdot f(x)$ $\Rightarrow$ Strecken / Stauchen um den Faktor a in y-Richtung

d) $f\left(\frac{x}{a}\right)$ $\Rightarrow$ Strecken / Stauchen um den Faktor a in x-Richtung

841 Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$, wenn

a) a verändert wird und b dabei gleich bleibt?

b) b verändert wird und a dabei gleich bleibt?

842 Wie 841 für die Funktionen:

(1) $f(x) = a \cdot x^b$ **(2)** $f(x) = a \cdot b^x$

843 Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$, wenn

a) a verändert wird und b, c gleich bleiben?

b) b verändert wird und a, c gleich bleiben?

c) c verändert wird und a, b gleich bleiben?

844 Wie 843 für die Funktionen:

(1) $f(x) = a \cdot \sin (bx) + c$

(2) $f(x) = a^{b \cdot x} + c$

845 Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot (b \cdot x)^c + d$, wenn

a) a verändert wird und b, c, d gleich bleiben?

b) b verändert wird und a, c, d gleich bleiben?

c) c verändert wird und a, b, d gleich bleiben?

d) d verändert wird und a, b, c gleich bleiben?

846 Wie 845 für die Funktionen:

(1) $f(x) = a \cdot \cos (bx + c) + d$

(2) $f(x) = a \cdot b^{cx + d}$

847 Die Abhängigkeit verschiedener Größen können wir durch eine Formel oder Funktionen beschreiben. Gib an, welcher Funktionstyp bei
(1) $r = f(s)$ **(2)** $r = f(a)$ **(3)** $r = f(t)$
jeweils vorliegt:

a) Formel: $r = a + s \cdot t$

b) Formel: $r = s - t \cdot a$

c) Formel: $r = \frac{s}{a \cdot t}$

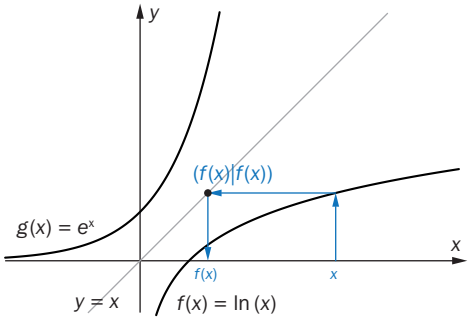
d) Formel: $r = \frac{s \cdot t}{a}$

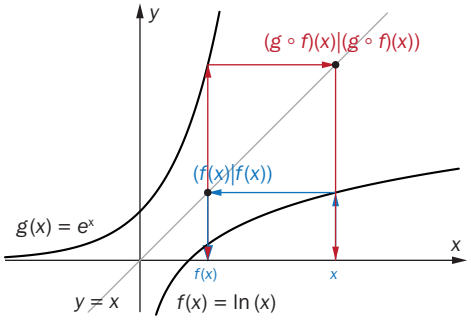
e) Formel: $r = t \cdot a^s$

f) Formel: $r = t^a + s$

848 Warum ist die Logarithmusfunktion nur für $a \neq 1$ definiert? Argumentiere über die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion.

849 Erklärt in den Abbildungen, dass $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = \ln x$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $y = e^x$ Umkehrfunktionen sind.





850 Begründe allgemein mithilfe der Definition am Einheitskreis:

a) Die Cosinusfunktion ist gerade.

b) Die Sinusfunktion ist ungerade.

851 Erstellt eine Präsentation über die folgenden Formen der Symmetrie einer Funktion: gerade, un- gerade, symmetrisch zu einer beliebigen Gera- den, symmetrisch zu einem beliebigen Punkt, nicht symmetrisch.

852 Erstellt eine Präsentation über die wesentlichen Darstellungsformen und Eigenschaften einer reellen Funktion. Verwendet dafür die Mindmap von Seite 133 und die Kompetenz-Checklisten ab Seite 166.

853 Erstellt eine Präsentation über die wichtigsten Funktionstypen. Behandelt darin auch die Parametervariation und die Verkettung von Funktionen. Verwendet dafür die Mindmap von Seite 133 und die Kompetenz-Checklisten ab Seite 166.

854 Die „Bremsstreckenformel“ $s_B = \frac{v^2}{2a}$ gibt die Bremsstrecke s_B in Abhängigkeit von der Fahrzeuggeschwindigkeit v und der Bremsverzögerung a an (vgl. Aufgabe 735).

a) Erläutere, warum die Funktion $s_B(v) = \frac{v^2}{8}$ (für die Bremsverzögerung $a = 4\ \text{m/s}^2$ bijektiv ist.

b) Welche maximale Geschwindigkeit v ist bei einer bestimmten Bremsverzögerung a und einer gegebenen Bremsstrecke $s_B = 35$ m möglich? Gib eine entsprechende Formel für v an!

c) Erläutere, warum die Funktion $v(a)$ für eine gegebene Bremsstrecke s_B eine bijektive Funktion ist!

855 Zeichnet den Graphen der Funktion $D_f = [-3; 3]$ und untersucht die Funktion auf Nullstellen, Extremstellen, Monotonie und Symmetrie.

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $y = \frac{e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}}{x^2 + 4}$ **d)** $y = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{x^2 + 4}$

Hinweis: Die Funktionen aus a) und b) werden auch als sinh (x) („Sinus Hyperbolicus von x“) und cosh (x) („Cosinus Hyperbolicus von x“) bezeichnet. Es besteht eine enge Verbindung zur Sinus- bzw. Cosinusfunktion.

856 Zeichnet den Graphen der Funktion und untersucht sie auf Nullstellen, Extremstellen und monotonie.

a) $y = (x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ für $D_f = [-2{,}5; 10]$

b) $y = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ für $D_f = [-1{,}5; 8]$

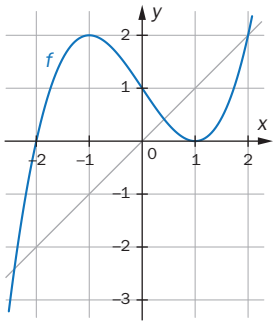
c) $y = (x^2 - 2{,}25) \cdot e^{\frac{x}{4}}$ für $D_f = [-12; 3]$

Sprache der Mathematik

857 **Thema Eigenschaften reeller Funktionen**

Welche Aussagen treffen für die dargestellte Funktion zu?

	wahr	falsch
1. f hat zwei Fixpunkte.	☐	☐
2. $x = 1$ ist Nullstelle.	☐	☐
3. $x = 1$ ist globales Minimum.	☐	☐
4. f hat kein globales Maximum.	☐	☐
5. f ist gerade.	☐	☐
6. f ist nicht periodisch.	☐	☐



858 Beurteile die Schlussfolgerungen und begründe deine Entscheidung.

	wahr	falsch
1. f ist streng monoton fallend. $\Rightarrow$ f hat kein globales Minimum.	☐	☐
2. f hat zwei Fixpunkte. $\Rightarrow$ Der Graph von f ist eine Gerade.	☐	☐
3. f ist symmetrisch zur y-Achse. $\Rightarrow$ Die y-Achse ist eine Asymptote.	☐	☐
4. f ist eine Exponentialfunktion. $\Rightarrow$ Kein Funktionswert ist negativ.	☐	☐

859 Erkläre anhand selbst gewählter Beispiele folgende Eigenschaften einer reellen Funktion.

1. besondere Punkte auf dem Graphen: Nullstellen, Fixpunkte, Extremstellen
2. Monotonie und ihr Zusammenhang mit lokalen Extrema
3. Unterschied zwischen globalen und lokalen Extrema
4. Symmetrie und Periodizität
5. Bijektivität und ihr Zusammenhang mit der Existenz einer Umkehrfunktion

860 **Thema Funktionstyp**

Welcher Funktionstyp liegt vor? Kreuze an!

	Potenzfunktion	Exponentialfunktion	Wurzelfunktion
1. $f(x) = x^{-3}$	☐	☐	☐
2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	☐	☐	☐
3. $f(x) = 3^x$	☐	☐	☐
4. $f(x) = 5^{\frac{x}{2}}$	☐	☐	☐

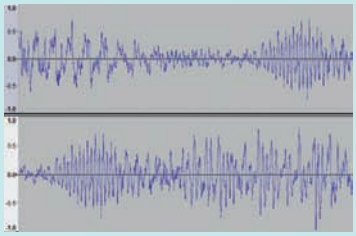
861 Beurteile folgende Aussagen und begründe:

	wahr	falsch
1. Eine Wurzelfunktion ist eine besondere Potenzfunktion.	☐	☐
2. Jede Exponentialfunktion ist monoton wachsend.	☐	☐
3. Für jede Exponentialfunktion f gilt: $f(0) = 1$	☐	☐
4. Die Logarithmusfunktion hat als Wertebereich $\mathbb{R}$.	☐	☐
5. Winkelfunktionen sind immer periodisch.	☐	☐
6. Winkelfunktionen sind gerade.	☐	☐

thema

Schwingungen in der Musik

In der Musik treten zahlreiche Schwingungen auf. Mit geeigneter Software lassen sich die aufgenommenen Klänge visualisieren und bearbeiten. Jeder **Klang** setzt sich dabei aus einzelnen Tönen zusammen.



Ein Ton kann als Sinusfunktion dargestellt werden:

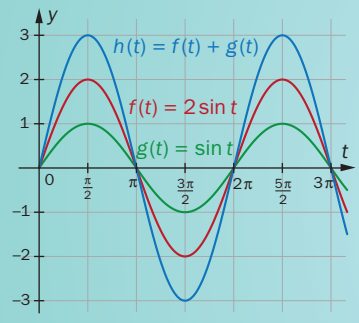
$f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c)$ (vgl. Abschnitte 5.10, 5.11).

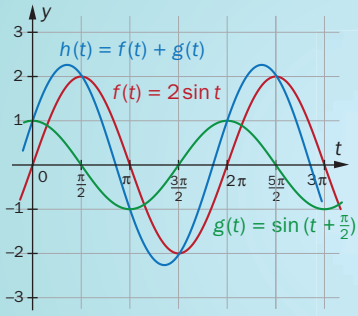
t … Zeit; a … Lautstärke (Amplitude); b … Tonhöhe (Frequenz); c … Phasenverschiebung

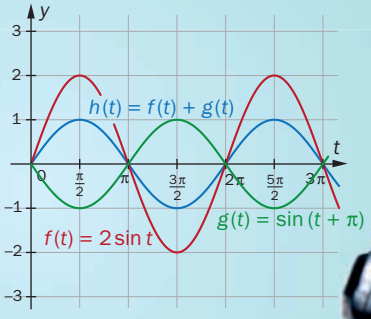
Wir beschreiben einen Klang als **Summe** von Sinusfunktionen.

Überlagerung von Tönen – Addition von Sinusfunktionen

Wenn sich Töne ungestört überlagern, ist das Ergebnis die Summe von Sinusfunktionen:





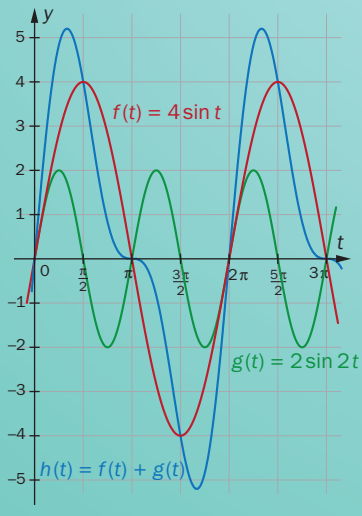


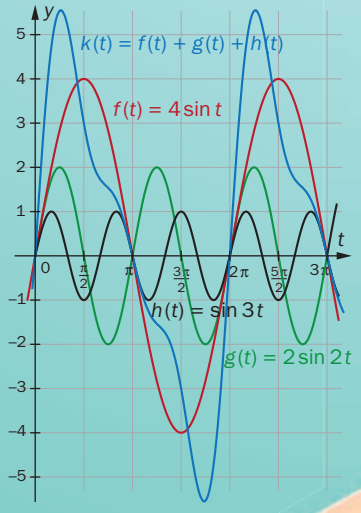
Wir erkennen: Bei der Addition von Sinusschwingungen **gleicher Frequenz** hängt das Ergebnis von der **Phasenverschiebung** ab. Das Ergebnis ist wieder eine Sinusfunktion.

▶ **1** Überprüft dieses Ergebnis experimentell am Computer!
Untersucht: Welche Frequenz hat die Summenschwingung?

▶ **2** Welche zwei Schwingungen löschen sich aus, d. h. ergeben in Summe überall die Amplitude null?

Wenn sich Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen überlagern, können interessante Funktionen entstehen, z. B.:
$f(t) = 4 \sin(t) + 2 \sin(2t) + \sin(3t) + 0{,}5 \sin(4t) + \ldots$





▶ **3** Untersuche die Form der **Sägezahnkurve**:

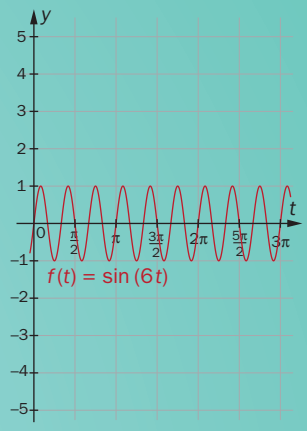
$f(t) = \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) \pm \ldots$

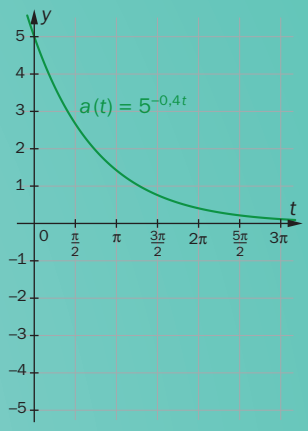
▶ **4** Untersuche die Form der **Rechteckkurve**:

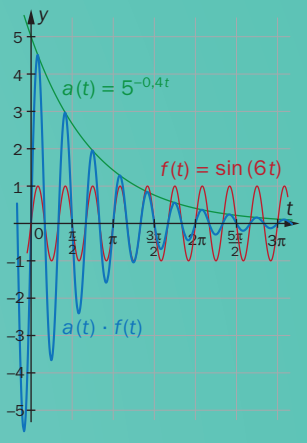
$f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \ldots$

Abklingen eines Tones – Multiplikation von Funktionen

Aus der Erfahrung wissen wir, dass Töne und Klänge leiser werden und verklingen – ihre Lautstärke nimmt ab. Für die Beschreibung der Schwingungsform wird somit die Amplitude a eine Funktion der Zeit t:
$f(t) = a(t) \cdot \sin(bt + c)$
Die Abnahme der Lautstärke kann durch eine abnehmende Exponentialfunktion $a(t) = e^{-kt}$ beschrieben werden.







Wir erkennen: Die Amplitude der Sinusschwingung hängt vom aktuellen Wert der Exponentialfunktion ab. Sie geht rasch gegen null.

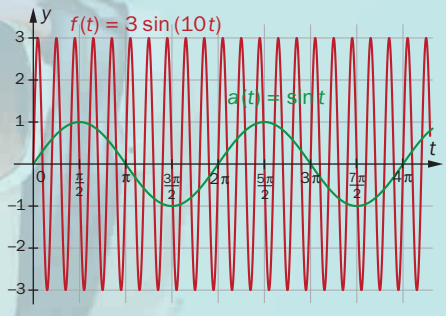
▶ **5** Überprüft dieses Ergebnis experimentell am Computer!

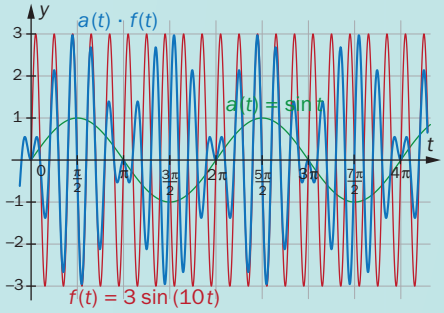
▶ **6** Untersuche die Funktionen $f(t) = a(t) \cdot \sin(20t)$, $t > 0$, für

a) $a(t) = \frac{4t}{1+t}$ **b)** $a(t) = 4 - 4e^{-0,5t}$

AM und FM

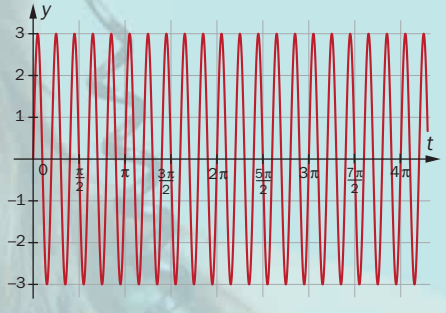
Wird die Amplitude einer Schwingung durch eine andere Funktion zeitlich variiert, sprechen wir von **Amplitudenmodulation, AM**. Eine besondere Bedeutung hat diese, wenn die Amplitude einer **hochfrequenten Schwingung** durch eine **niederfrequente Schwingung** moduliert wird: $f(t) = \sin(t) \cdot 3\sin(10t)$

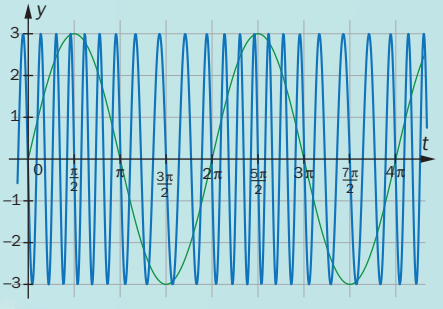




In der Nachrichtenübertragung hat die Amplitudenmodulation in den Anfängen der Funktechnik eine besondere Bedeutung erlangt. Das zu übertragende Tonsignal wurde als modulierende Amplitudenfunktion auf eine hochfrequente Trägerwelle aufgebracht.

Für höher frequente Tonsignale wird die **Frequenz** der Trägerwelle durch das Tonsignal variiert; es liegt **Frequenzmodulation, FM** vor:





Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at

Meine Kapitelcheckliste zu Reelle Funktionen

Ich weiß … (d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	Ich kann … (d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)	Ich übe … z.B. Aufgaben
thema Nullstellen und Fixpunkte		
☐ … was eine Funktion ist.	☐ … die Darstellungsform einer Funktion ändern.	… 691, 693, 696
☐ … verschiedene Darstellungsformen einer Funktion.	☐ … Nullstellen und Fixpunkte einer Funktion bestimmen.	… 697, 698
☐ … was eine Nullstelle und ein Fixpunkt einer Funktion ist.		
☐ … was die 1. Mediane ist und was sie mit Fixpunkten zu tun hat.		
thema Monotonie und Extremstellen		
☐ … was monoton wachsend bzw. fallend bedeutet.	☐ … lokale und globale Extremstellen aus dem Graphen einer Funktion ablesen.	… 702, 704
☐ … was Extremstellen und Extrema sind.	☐ … Extremstellen und Extrema interpretieren.	… 708, 709
☐ … den Zusammenhang zwischen Monotonie und lokalen Extremstellen.	☐ … die Monotonie einer Funktion beschreiben und interpretieren.	… 710
☐ … den Unterschied zwischen lokalen und globalen Extremstellen.		
thema Symmetrie und Periodizität		
☐ … was eine symmetrische Funktion ist.	☐ … Symmetrie aus dem Graphen einer Funktion ablesen.	… 712, 716
☐ … was eine periodische Funktion ist.	☐ … Periodizität und die Periode aus dem Graphen einer Funktion ablesen.	… 717
☐ … den Unterschied zwischen einer geraden und einer ungeraden Funktion.		
thema Bijektive Funktion und Umkehrfunktion		
☐ … was eine bijektive Funktion ist.	☐ … erkennen, ob eine Funktion bijektiv ist.	… 724
☐ … was eine Umkehrfunktion ist.	☐ … Umkehrfunktionen in anwendungsorientierten Kontexten interpretieren.	… 725
☐ … den Zusammenhang zwischen Bijektivität und der Existenz einer Umkehrfunktion.		
thema Funktionstypen		
☐ … Potenz- und Wurzelfunktionen und ihre Eigenschaften.	☐ … Eigenschaften von verschiedenen Funktionstypen beschreiben.	… 732, 733
☐ … Polynomfunktionen und gebrochen rationale Funktionen und ihre Eigenschaften.		

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
☐ … Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Eigenschaften.	☐ … Winkel in Gradmaß und Bogenmaß angeben und entsprechende Umwandlungen durchführen.	… 777, 779
☐ … den Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion.	☐ … Funktionsuntersuchungen mithilfe von Parametervariation am Computer durchführen.	… 797, 798, 799, 800
☐ … Winkelfunktionen und ihre Eigenschaften.	☐ … verkettete Funktionen durch Graph und Term darstellen.	… 808
☐ … Gradmaß und Bogenmaß für beliebige Winkel.		
☐ … was man unter Parametervariation versteht.		
☐ … was die Verkettung von Funktionen ist.		

Kompetenzen für meine Matura

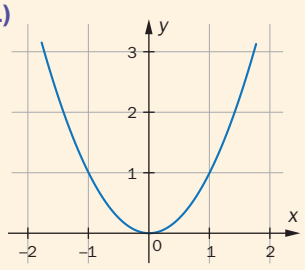
- ☐ Ich kann erklären, was eine reelle Funktion ist und kann Beispiele dafür angeben.
- ☐ Ich kann Abhängigkeiten zwischen Größen mit Worten und mithilfe reeller Funktionen beschreiben und dabei verschiedene Darstellungsformen (Term, Graph, Tabelle) verwenden, sowie zwischen den Darstellungsformen wechseln.
- ☐ Ich kenne typische Eigenschaften von Funktionen, kann sie erkennen, interpretieren und beschreiben: Nullstellen, Monotonie, Extrema, Symmetrie, Periodizität.
- ☐ Ich kenne verschiedene Funktionstypen (Potenzfunktion, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Winkelfunktion). Ich kann sie darstellen (Term, Graph) und ihre Eigenschaften beschreiben und vergleichen.
- ☐ Ich kann die Auswirkung von Parametern auf den Graphen einer Funktion beschreiben und interpretieren (Parametervariation).
- ☐ Ich weiß, wie die Sinus- und die Cosinusfunktion zusammenhängen, und kann diesen Zusammenhang beschreiben und begründen.

Teste dein Wissen!

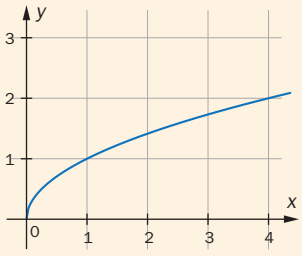
Kreuze die richtigen Antworten an!

Verwende für die Aufgaben auf dieser Seite folgende Graphen.

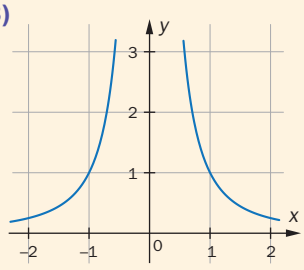
(1)



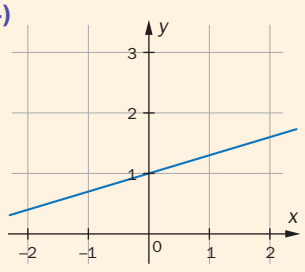
(2)



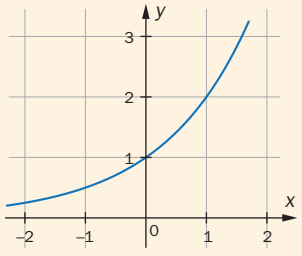
(3)



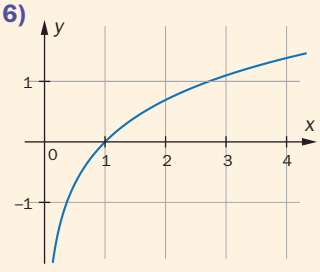
(4)



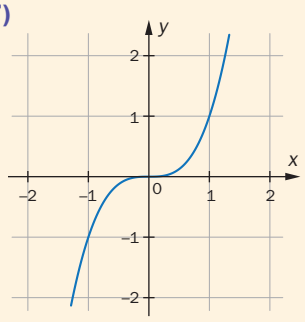
(5)



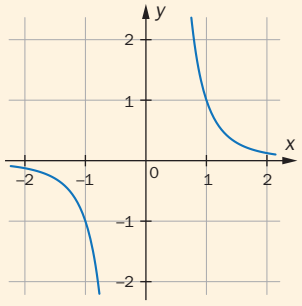
(6)



(7)



(8)



862 Ordne jedem Funktionsterm den passenden Graphen zu.

- **a)** $f(x) = \sqrt{x}$ ☐
- **b)** $f(x) = x^{-2}$ ☐
- **c)** $f(x) = x^2$ ☐
- **d)** $f(x) = x^{-3}$ ☐
- **e)** $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ☐
- **f)** $f(x) = x^3$ ☐
- **g)** $f(x) = 0{,}3x + 1$ ☐
- **h)** $f(x) = 2^x$ ☐
- **i)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ☐
- **j)** $f(x) = \ln x$ ☐

863 Gib an, für welche der abgebildeten Funktionen die Aussage zutrifft.

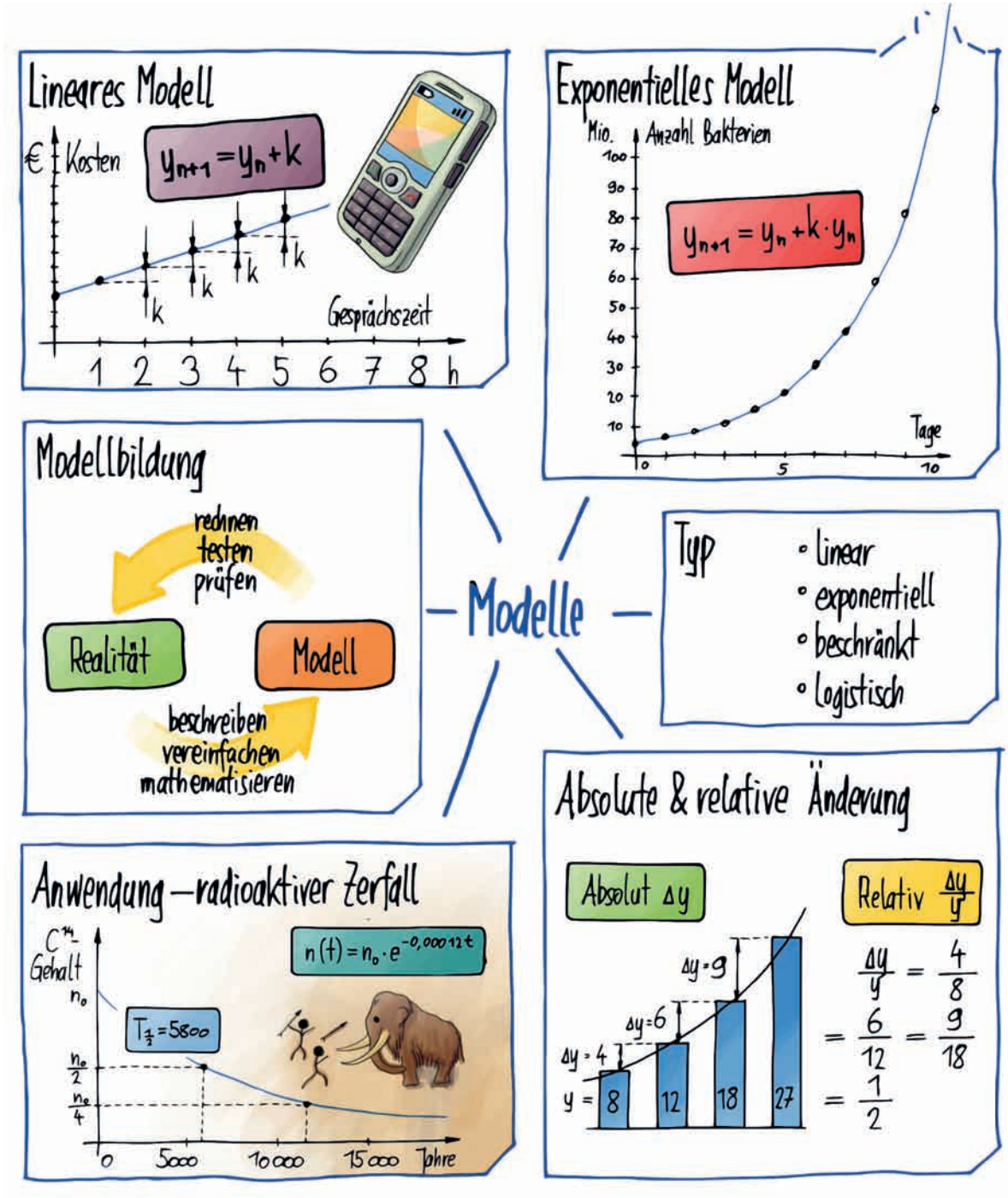
- **a)** Die Funktion ist im Intervall [0; 2] monoton wachsend.
- **b)** Die Funktion hat kein lokales Extremum.
- **c)** Die Funktion hat genau eine Nullstelle.
- **d)** Die Funktion hat mindestens eine senkrechte Asymptote.
- **e)** Die Funktion ist gerade.
- **f)** Die Funktion ist ungerade.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
b)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
c)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
d)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
e)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
f)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 6 Lösungen (SBNR 150.261)

6. Modelle

Ausgehend vom Problem, die Ausbreitung eines Gerüchtes in einer Schule mathematisch modellieren zu wollen, lernst du verschiedene mathematische Modelle kennen: lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum. Du wirst zu verschiedenen Anwendungssituationen Modelle aufstellen, charakteristische Eigenschaften angeben und die „Güte“ der Modelle im jeweiligen Kontext interpretieren.



6.1 Grundbegriffe

Schon in der 5. Klasse haben wir den Zusammenhang zweier Größen durch lineare oder quadratische Modelle beschrieben (Band 5, Abschnitte 4.5 und 4.9).

Nun konzentrieren wir uns besonders darauf, wie sich ein Wert im Lauf der Zeit ändert. Je nachdem, ob wir den Wert nur an einzelnen diskreten[1] Zeitpunkten (z. B. täglich, monatlich, jährlich) oder zu beliebiger Zeit $t \geqslant 0$ betrachten, unterscheiden wir:

Definition:
Diskretes Modell: Der *Anfangswert* y_0 ist bekannt. Er verändert sich schrittweise: $y_0 \to y_1 \to y_2 \to \ldots$ Nach n diskreten Zeitschritten hat er sich zu y_n verändert.

Kontinuierliches Modell: Der *Anfangswert* $y(0)$ ist bekannt. Er verändert sich im Lauf der Zeit kontinuierlich. Zur Zeit t beträgt er $y(t)$.

Bemerkungen:

(1) Ein diskretes Modell entspricht einer Folge $\langle y_n \rangle_{n \geqslant 0} = \langle y_0, y_1, y_2, \ldots \rangle$. Wir stellen sie explizit, rekursiv oder grafisch dar.

(2) Ein kontinuierliches Modell entspricht einer reellen Funktion $y = f(t)$. Meist stellen wir sie als Term oder grafisch dar. (Anders als gewohnt heißt hier die Variable t statt x.)

(3) Oft modelliert y_n oder $y(t)$ die Größe einer Population oder eines Produktbestandes. Der Wert y_n oder $y(t)$ heißt daher auch *Bestandsgröße* oder kurz *Bestand* des Modells.

(4) Ein diskretes Modell mit Einzelpunkten in sehr kleinem Abstand unterscheidet sich grafisch kaum von einer Funktion. Im Grenzfall immer kleiner werdender Zeitschritte nähert sich ein diskretes Modell einem kontinuierlichen an.

Definition: Änderungsmaße in diskreten Modellen

Die schrittweise *absolute Änderung* Δy_n (sprich: „Delta-Ypsilon-n“): $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

Die *schrittweise relative Änderung* ist die Änderung relativ zum Grundwert y_n: $\frac{\Delta y_n}{y_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n}$

Die relative Änderung wird oft in Prozent angegeben.

864 In einer Gemeinde steigt die Anzahl der Arbeitslosen: 2 500 (Sept.), 2 750 (Okt.), 3 012 (Nov.). Berechne jeweils die monatliche absolute und relative Änderung.

Ausführung: $y_0 = 2\,500$; $y_1 = 2\,750$; $y_2 = 3\,012$;

absolute Änderung: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 250$ und $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 262$

relative Änderung: $\frac{\Delta y_0}{y_0} = \frac{250}{2\,500} = 0{,}1 = 10\,\%$; $\frac{\Delta y_1}{y_1} = \frac{262}{2\,750} \approx 9{,}5\,\%$

Ergebnis: Die monatlichen absoluten Änderungen betragen 250 bzw. 262 Personen, die monatlichen relativen Änderungen 10 % bzw. 9,5 %.

Bemerkung: Obwohl die absoluten Änderungen zugenommen haben, nehmen hier die relativen Änderungen ab! Es ist wichtig, beide Begriffe zu kennen und unterscheiden zu können.

Die – je nach Betrachtungsweise – unterschiedlichen Änderungen zeigen auch: Wir haben zu wenig Informationen, um ein aussagekräftiges Modell für die folgenden Monate zu finden.

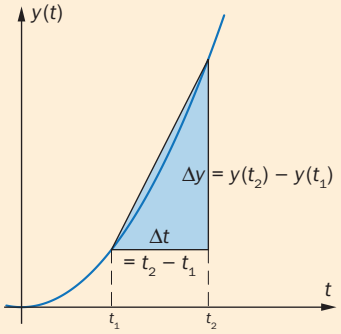
[1] „diskret“ hat in der Mathematik nichts mit „verschwiegen, vertraulich“ zu tun, sondern bedeutet „einzeln, getrennt“.

In einem kontinuierlichen Modell gibt es keine schrittweisen Änderungen. Statt dessen verwenden wir hier eine mittlere Änderungsrate:

Definition:
Die *mittlere Änderungsrate* in einem Zeitraum (t_1, t_2) ist ein geeignetes Änderungsmaß in kontinuierlichen Modellen $y = y(t)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \text{mit } t_1 \neq t_2$$

Die mittlere Änderungsrate heißt auch der *Differenzenquotient*.



Der Wert der mittleren Änderungsrate hängt natürlich vom gewählten Zeitraum ab. Je kleiner das Zeitintervall, desto mehr nähert sich die mittlere Änderungsrate augenscheinlich einer **momentanen Änderungsrate** an. Vom 17. bis zum 19. Jahrhundert arbeiteten große Mathematiker daran, diesen Begriff zu verstehen und ihm eine exakte Bedeutung zu geben. Sie entwickelten dabei die Differentialrechnung. Das wird ein wichtiges Thema in der 7. Klasse sein.

Aufgaben

865 Gib jeweils die absolute Änderung an:

a) Ein Kapital von 450 € wächst um 5 %.

b) Ein Kapital von 3 200 € wächst um 2 %.

c) Ein Liter Superbenzin kostet 1,20 €. Der Benzinpreis steigt um 5 %.

d) Ein Liter Diesel kostet 1,25 €. Der Preis sinkt um 16 %.

e) Viktoria wiegt 50 kg. Sie nimmt um 8 % zu.

f) Kevins Körpergewicht beträgt derzeit 75 kg. Er nimmt um 12 % ab.

866 Gib die relative Änderung in Prozent an:

a) Der Benzinpreis steigt von 1,08 € auf 1,35 € pro Liter.

b) Die Bevölkerung einer Stadt wächst von 255 000 auf 258 000.

c) Diesel kostet 0,99 € pro Liter. Der Preis steigt um 0,10 €.

d) In einem Tiergehege leben 13 Pärchen. Der Bestand steigt um 8 Pärchen.

e) Nina nimmt von 53 kg auf 50 kg ab.

f) Wolfgang wiegt 60 kg und nimmt 3 kg ab.

867 Gib die mittlere Änderungsrate (den Differenzenquotienten) an.

a) $f(t) = t^2$ im Intervall $[1; 3]$

b) $f(t) = t^2$ im Intervall $[4; 5]$

c) $f(t) = t^2$ im Intervall $[1; 1{,}1]$

d) $f(t) = \sqrt{t}$ im Intervall $[9; 16]$

e) $f(t) = t \cdot (1 - t)$ im Intervall $[0{,}4; 0{,}6]$

f) $f(t) = e^t$ im Intervall $[1; 2]$

868 Gib absolute und relative Änderungen an.

a) Bevölkerung in einer Gemeinde:

Jahr	1 990	2000	2010
Einwohner	4 500	4 220	3 970

b) Grippewelle:

Monat	Okt.	Nov.	Dez.	Jan.
Infektionen	150	225	340	500

c) Hasenpärchen:

Monat	0	1	2	3	4	5	6
Bestand	1	1	2	3	5	8	13

869 Auch für Funktionen $y = y(x)$ lässt sich der Differenzenquotient (oder die mittlere Änderungsrate) definieren. Gebt eine Definition an. Zeichnet dafür ein Diagramm wie oben und erklärt: Bei einer Funktion $y = y(x)$ entspricht der Differenzenquotient der Sekantensteigung.

6.2 Lineares Modell

Grundvorstellung: gleiche Zeitschritte – gleiche absolute Änderungen

870 In einer kleinen Schule breitet sich unter 360 Jugendlichen ein Gerücht aus. Zuerst kennen es nur 6, nach einer Woche schon 10 Personen.

Nimm an, dass pro Woche 4 Jugendliche neu eingeweiht werden. Erstelle ein diskretes lineares Modell und simuliere die Ausbreitung des Gerüchtes mit dem Computer.

Ausführung:
Die Anzahl der Informierten bildet eine Folge $\langle I_n \rangle$, wobei $n \geqslant 0$ die Anzahl der Wochen nach Start des Gerüchtes angibt. Diese Folge können wir rekursiv und explizit beschreiben.

Zu Beginn kennen 6 Personen das Gerücht. Jede Woche kommen 4 Informierte dazu, das sind in n Wochen $4 \cdot n$ neu Informierte. Daher:

rekursives Modell:

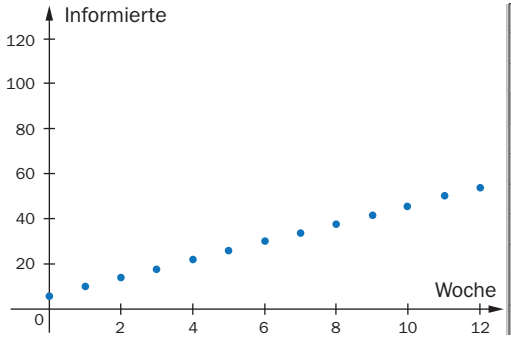
$I_{n+1} = I_n + 4 \quad \text{mit} \quad I_0 = 6 \text{ und } n \geqslant 0$

explizites Modell:

$I_n = 6 + 4 \cdot n \quad \text{mit} \quad n \geqslant 0$

Für die Simulation bietet sich die Tabellenkalkulation an. In der Abbildung steht der Anfangswert in `B2`. Wir setzen daher `B2=6`, `B3=B2+4` usw.

Wir sehen: Die Datenpunkte liegen auf einer Geraden.



	A	B
1	Woche	Informierte
2	0	6
3	1	10
4	2	14
5	3	18
6	4	22
7	5	26
8	6	30
9	7	34
10	8	38

Zur Modellbildung gehört ganz wesentlich, die Ergebnisse zu hinterfragen und mit der Realität zu vergleichen.

Modellkritik: Dieses Modell arbeitet mit vereinfachten Annahmen und ist nur begrenzt gültig.

- Die Annahme, dass immer nur vier Leute wöchentlich vom Gerücht erfahren, ist unrealistisch. Je mehr Leute ein Geheimnis kennen, desto mehr erzählen es weiter.
- Andererseits würden ab Woche 91 mehr Personen davon wissen, als überhaupt zur Schule gehen. Aber bis dahin interessiert sich ohnehin niemand mehr dafür …

Lineare Modelle sind besonders einfache Näherungen für viele Vorgänge. Sie gelten aber oft nur für wenige Schritte oder kurze Zeiträume.

In Beispiel 870 ist die absolute Änderung pro Schritt konstant: $I_{n+1} - I_n = 4$

Die schrittweise relative Änderung $\frac{I_{n+1} - I_n}{I_n} = \frac{4}{I_n}$ sinkt mit der Zeit, weil I_n immer größer wird.

Dies sind typische Eigenschaften eines linearen Wachstums.

Definition: Lineares Wachstumsmodell

Diskretes Modell:	**Kontinuierliches Modell:**
Die absolute Änderung pro Schritt ist konstant:	Die mittlere Änderungsrate ist konstant:
$\Delta y_n = k \in \mathbb{R}$	$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \in \mathbb{R}$
y_n … Wert nach n Schritten ($n \geqslant 0$)	$y(t)$ … Wert zur Zeit $t \geqslant 0$
rekursiv: $y_{n+1} = y_n + k$	$y(t) = y_0 + t \cdot k$
explizit: $y_n = y_0 + n \cdot k$	

Bemerkungen:

(1) Ist die Änderung negativ, spricht man von **linearer Abnahme**.

(2) Beim diskreten linearen Modell bilden die Werte eine arithmetische Folge $\langle y_0, y_1, y_2, \ldots \rangle$, beim kontinuierlichen linearen Modell liegen sie auf einer Geraden.

Aufgaben

871 Auf dem Sparbuch von Denise liegen jetzt 135 €. Denise legt weiterhin jeden Monat 15 € ein. Rechne jeweils ohne Zinsen:

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 1, 2, 5 und 18 Monaten?

b) Wie lange dauert es, bis Denise 350 € gespart hat?

c) Wie lange dauert es, bis Denise ihr Anfangsguthaben verdoppelt hat?

872 In einem Swimmingpool mit der Grundfläche 10 m × 6 m steht das Wasser zu Beginn 1,80 m hoch. Pro Minute werden 220 l Wasser abgepumpt.

a) Wie viel Liter Wasser sind nach 30, 60, 120, 240 Minuten noch im Becken?

b) Wie lange dauert es, bis das Becken vollständig geleert ist?

873 Erstelle ein geeignetes mathematisches Modell für die Wasserhöhe im Becken aus Aufgabe 872. Nimmt diese linear ab? Begründe!

874 In einer Kleinstadt wohnen 1 600 Leute. Es breitet sich ein Gerücht aus. Zu Beginn kennen es nur 30 Personen. Pro Woche werden 90 Personen neu eingeweiht. Erstelle ein lineares Modell für die Anzahl der

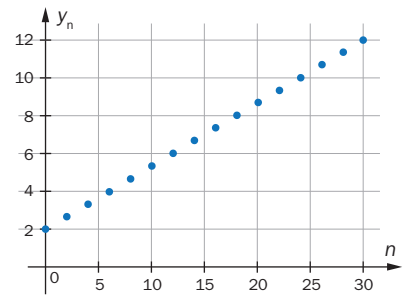
a) Informierten

b) nicht Informierten

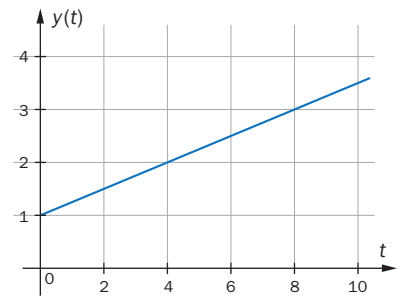
und simuliere sie mit dem Computer. Wie realistisch ist das Modell?

875 Lest aus dem Diagramm Anfangswert und Änderungsmaße ab und gebt ein geeignetes lineares Modell an!

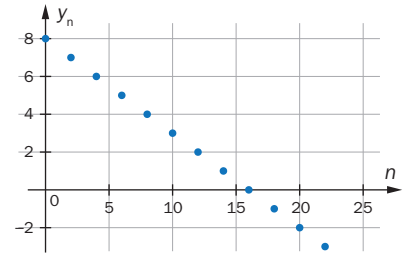
a)



b)



c)



876 Gebt je zwei Beispiele für lineares Wachstum an, bei dem

a) das diskrete **b)** das kontinuierliche

Modell geeignet ist. Begründet eure Wahl!

6.3 Exponentielles Modell

G

Grundvorstellung: gleiche Zeitschritte – gleiche relative Änderungen

877 In einer kleinen Schule breitet sich unter 360 Jugendlichen ein Gerücht aus. Zuerst kennen es nur 6, nach einer Woche schon 10 Personen. Vergleiche Beispiel 870.

Nimm an, dass pro Woche durchschnittlich 2 von 3 Insidern das Gerücht an jeweils eine noch nicht informierte Person weitergeben. Erstelle ein diskretes exponentielles Modell und simuliere die Ausbreitung des Gerüchtes mittels Computer.

Ausführung:
Die Anzahl der Informierten bildet eine Folge $\langle I_n \rangle$, wobei $n \geqslant 0$ die Anzahl der Wochen nach Start des Gerüchtes angibt.

Zu I_n Informierten kommen im Laufe der nächsten Woche $\frac{2}{3} \cdot I_n$ neue dazu. Daher sind es eine Woche später insgesamt $I_{n+1} = I_n + \frac{2}{3} \cdot I_n = \frac{5}{3} \cdot I_n$

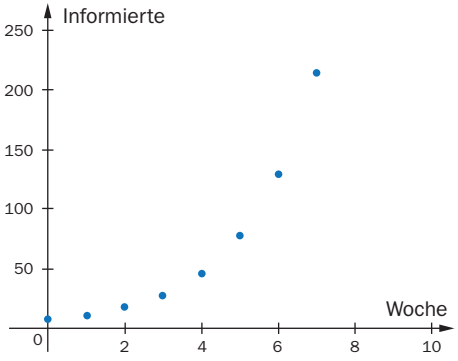
rekursives Modell:

$I_{n+1} = \frac{5}{3} \cdot I_n$ mit $I_0 = 6$ und $n \geqslant 0$

explizites Modell:

$I_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot 6$ mit $n \geqslant 0$

Für die Simulation bietet sich die Tabellenkalkulation an. In der Abbildung steht der Anfangswert in `B2`. Daher ist `B2=6`, `B3=B2*5/3` usw.



	A	B
1	Woche	Informierte
2	0	6
3	1	10
4	2	16.67
5	3	27.78
6	4	46.3
7	5	77.16
8	6	128.6
9	7	214.33
10	8	357.22

Modellkritik: In diesem Modell breitet sich das Gerücht zunehmend rascher aus. Das ist anfangs realistisch, aber trotzdem nur begrenzt gültig, denn:

- Die Zahl der Informierten ist nicht immer eine natürliche Zahl.
- Bereits ab Woche 9 gibt es in der Schule mehr Informierte als Jugendliche.

In Beispiel 877 ist die relative Änderung schrittweise konstant: $\frac{I_{n+1} - I_n}{I_n} = \frac{2}{3}$

Die absolute Änderung ΔI_n wächst mit der Zeit: $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n = \frac{2}{3} \cdot I_n$ Sie ist proportional zu I_n.

Dies sind typische Eigenschaften eines exponentiellen Wachstums.

Exponentielle Modelle können die Anfangsphase vieler Wachstumsvorgänge und Ausbreitungsprozesse gut beschreiben. Charakteristisch ist die anfangs langsame, dann explosionsartig schneller werdende Zunahme. Auf Dauer ist exponentielles Wachstum in der Natur nicht möglich.

Definition: Exponentielles Wachstumsmodell

Diskretes Modell:	**Kontinuierliches Modell:**
Die relative Änderung pro Schritt ist konstant:	Die mittlere Änderungsrate ist proportional zum aktuellen Wert. Für $\Delta t = 1$ gilt:
$\frac{\Delta y_n}{y_n} = k \in \mathbb{R}$	$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t) \quad (k \in \mathbb{R})$
y_n … Wert nach n Schritten ($n \geqslant 0$)	$y(t)$ … Wert zur Zeit $t \geqslant 0$
rekursiv: $y_{n+1} = (1 + k) \cdot y_n$	$y(t) = y_0 \cdot (1 + k)^t$
explizit: $y_n = y_0 \cdot (1 + k)^n$	andere Schreibweise: $y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda t}$

Bemerkungen:

(1) Ist die Änderung negativ, spricht man von **exponentieller Abnahme**.

(2) Das diskrete exponentielle Modell liefert eine geometrische Folge $\langle y_0, y_1, y_2, \ldots \rangle$.

(3) Auch beim kontinuierlichen Modell sind bei jeweils gleichen Δt die relativen Änderungen $\frac{\Delta y}{y(t)}$ konstant. Nur für $\Delta t = 1$ sind sie ebenfalls gleich k.

(4) Technikerinnen und Wissenschafter verwenden beim kontinuierlichen Modell meist die natürliche Exponentialfunktion $y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda t}$, weil mit ihr viele Rechnungen und Formeln einfacher werden. Siehe Abschnitt 6.7 Wachstums- und Zerfallsprozesse.

Aufgaben

878 Robert bekommt ein Sparbuch mit 500 € geschenkt. Es bringt 2,5 % Zinsen pro Jahr.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 1, 2, 5, 10 und 15 Jahren?

b) Wie lange dauert es, bis das Guthaben über 600 €, über 700 € steigt?

879 In einer Kleinstadt leben 7 600 Personen. Es breitet sich ein Gerücht aus. Zu Beginn kennen es nur 5 Personen, und wer es kennt, erzählt es jeden Tag an 3 noch nicht Informierte weiter. Erstelle ein diskretes exponentielles Modell für die Anzahl der Informierten und simuliere mittels Computer. Wie realistisch ist das Modell?

880 Die Modelle beschreiben die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Ortes. Interpretiere die Modellparameter!

a) $y(t) = 1\,418 \cdot 1{,}025^t$

b) $y_{n+1} = 1{,}07\, y_n$; $y_0 = 646$

c) $y(t) = 349 \cdot 0{,}95^t$

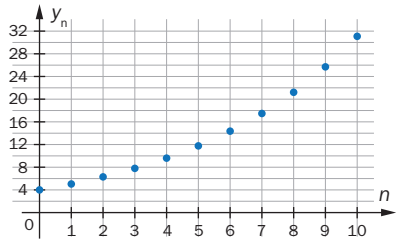
d) $y_{n+1} = 0{,}97\, y_n$; $y_0 = 895$

881 Gebt je zwei Beispiele für exponentielles Wachstum an, bei dem

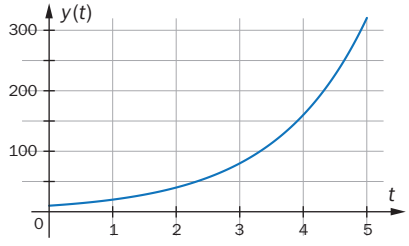
a) das diskrete **b)** das kontinuierliche Modell geeignet ist. Begründet eure Wahl!

882 Lest aus dem Diagramm Anfangswert und Änderungsmaße ab und gebt ein geeignetes exponentielles Modell an!

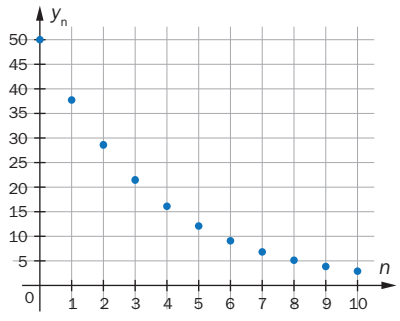
a)



b)



c)



Bemerkung: Je mehr Fragen in der Multiple-Choice-Prüfung vorkommen, umso aufwendiger ist es, den Baum zu zeichnen.

Die *Anzahl der günstigen Pfade* erhältst du aber auch, ohne den Baum zu zeichnen. Sie ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus den gegebenen Fragen jene auszuwählen, die richtig beantwortet werden.

In Lauras Fall werden aus den gegebenen 3 Fragen 2 ausgewählt, dazu gibt es $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten.

Aufgaben

1052 Ein Fragebogen enthält 5 Fragen, zu denen jeweils 4 Antworten vorgegeben sind, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Chance, mindestens 3 Fragen richtig zu beantworten, wenn man ahnungslos irgendwelche Antworten ankreuzt?

1053 Ein Fragebogen enthält 4 Fragen, zu denen jeweils 6 Antworten vorgegeben sind, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Chance, mindestens 2 Fragen richtig zu beantworten, wenn man ahnungslos irgendwelche Antworten ankreuzt?

1054 Bei einer Multiple-Choice-Prüfung werden n Fragen gestellt. Zu jeder Frage gibt es k mögliche Antworten, von denen genau eine stimmt. Um positiv zu sein, müssen mindestens 70 % der Fragen richtig beantwortet werden.

(1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Prüfung positiv ist, wenn zufällig irgendwelche Antworten angekreuzt werden.

(2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, diese Prüfung irgendwann zu schaffen, wenn sie bis zu zweimal wiederholt werden kann.

a) $n = 10$ Fragen; $k = 2$ mögliche Antworten

b) $n = 8$ Fragen; $k = 3$ mögliche Antworten

c) $n = 5$ Fragen; $k = 4$ mögliche Antworten

d) $n = 15$ Fragen; $k = 4$ mögliche Antworten

1055 In einer Urne liegen 3 weiße und 5 schwarze Kugeln. Es werden 3 Kugeln gezogen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine weiße und zwei schwarze Kugeln gezogen werden?

b) zwei weiße und eine schwarze Kugel gezogen werden?

c) alle gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben?

d) zwei der gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben?

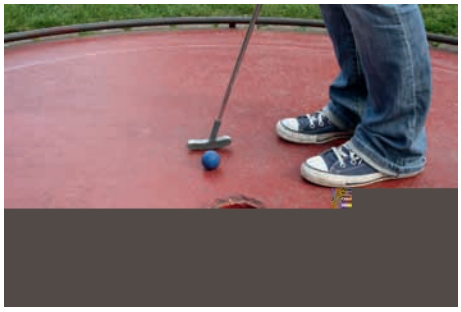
1056 Wie Aufgabe 1055, nur werden die gezogenen Kugeln zurückgelegt.

1057 Jürgen und Tanja spielen eine Partie Minigolf. Beide schaffen das erste Hindernis mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % und das zweite Hindernis mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Jeder hat bei den Hindernissen jeweils nur einen Versuch.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Partie nach den ersten beiden Hindernissen

a) Jürgen 2 : 0 führt?

b) Tanja 2 : 1 führt?

c) es unentschieden steht?



1058 In einer Urne liegen fünf weiße und eine rote Kugel: Julia und Markus ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen zufällig eine Kugel. Wer die rote Kugel zieht, hat gewonnen.
Berechne die Gewinnchancen für Julia und Markus, wenn Julia zuerst zieht.

1059 In einer Urne liegen sechs weiße und eine rote Kugel: Sarah und Thomas ziehen abwechselnd ohne Zurückzulegen zufällig eine Kugel. Wer die rote Kugel zieht, hat gewonnen.

a) Berechne die Gewinnchance für Sarah und Thomas, wenn Sarah zuerst zieht. Vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 1058.

b) Berechne die Gewinnchancen, wenn neun weiße und eine rote Kugel in der Urne liegen.

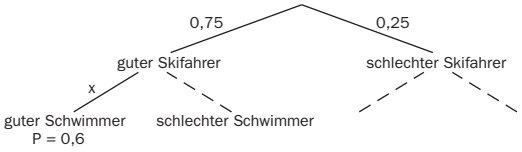
7.8 Bedingte Wahrscheinlichkeit

1060 75 % der Teilnehmer einer Wintersportwoche können gut Ski fahren. 60 % sind gute Skifahrer und zugleich gute Schwimmer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein guter Skifahrer auch ein guter Schwimmer ist?

Ausführung: Wir wissen: $P(\text{guter Skifahrer}) = 0{,}75$ und $P(\text{guter Skifahrer und guter Schwimmer}) = 0{,}6$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass jemand ein guter Schwimmer ist, wenn man schon weiß, dass er/sie ein guter Skifahrer ist, schreiben wir x und lesen vom Baum ab:

$$P(\text{guter Skifahrer und guter Schwimmer}) = 0{,}75 \cdot x = 0{,}6$$

$$\Rightarrow x = \frac{P(\text{guter Skifahrer und guter Schwimmer})}{P(\text{guter Skifahrer})} = \frac{0{,}6}{0{,}75} = 80\,\%$$



Definition: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

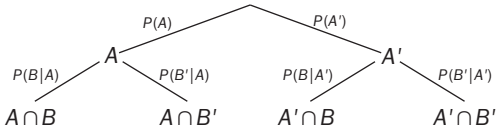
$P(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit, dass A passiert, wenn man weiß, dass B bereits eingetreten ist.

Beispiel 1060 zeigt dir, wie wir bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen können.
Tipp: Arbeite vor allem anfangs immer mit einem Baumdiagramm!

Satz:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B kann als Baumdiagramm oder in Form einer Tabelle als *Vierfeldertafel* dargestellt werden:



	A	A'	
B	$P(A \cap B)$	$P(A' \cap B)$	$P(B)$
B'	$P(A \cap B')$	$P(A' \cap B')$	$P(B')$
	$P(A)$	$P(A')$	1

Hinweis

Durch die Annahme eines Grundwertes bekommst du in der Vierfeldertafel absolute Zahlen. Aus diesen kannst du statt Wahrscheinlichkeiten nur relative Häufigkeiten berechnen. Rechnerisch macht das aber keinen Unterschied, wie das Beispiel 1061 zeigt.

1061 0,10025 % der Bevölkerung eines Landes ist HIV-positiv. Die Wahrscheinlichkeit, dass für eine beliebig ausgewählte Person ein HIV-Test positiv ausgeht und sie auch tatsächlich infiziert ist, beträgt 0,1 %. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei jemandem der durchgeführte HIV-Test negativ ist und diese Person auch wirklich nicht infiziert ist, gleich 99,6 %.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand infiziert ist, wenn der an ihm durchgeführte HIV-Test positiv ist?

Ausführung: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Person ist infiziert}|\text{Test ist positiv})$.
Wir tragen alle gegebenen Wahrscheinlichkeiten in eine Vierfeldertafel rot ein, ergänzen die fehlenden Werte und rechnen parallel mit einem Grundwert von 400 000.

	A (inf.)	A' (nicht inf.)	
B (pos.)	0,1 %	0,29975 %	0,39975 %
B' (neg.)	0,00025 %	99,6 %	99,60025 %
	0,10025 %	99,89975 %	100 %

$P(\text{Person ist infiziert} \mid \text{Test ist Positiv})$

$= \frac{P(\text{Person ist infiziert} \cap \text{Test ist positiv})}{P(\text{Test ist positiv})}$

$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}001}{0{,}0039975} \approx 25\,\%$

	A (inf.)	A' (nicht inf.)	
B (pos.)	400	1 199	1 599
B' (neg.)	1	398 400	398 401
	401	399 599	400 000

Wir lesen aus der Vierfeldertafel ab:

Bei 1 599 Personen ist der Test positiv.
400 von diesen 1 599 Personen mit positivem Test sind HIV-positiv.

$P(\text{Person ist infiziert} \mid \text{Test ist positiv})$

$= \frac{400}{1\,599} \approx 25\,\%$

Ergebnis: Bei einem positiven HIV-Test ist die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich infiziert zu sein, nur 25 %. Dies ist ziemlich überraschend: Bei einem Grundwert von 400 000 Personen kann man erwarten, dass beachtliche 1 199 Gesunde ein positives Testergebnis erhalten.

Aufgaben

1062 Eine Umfrage ergibt:

	weiblich	männlich
Raucher	15 %	20 %
Nichtraucher	40 %	25 %

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau raucht.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann raucht.

c) Nimm an, dass 200 Personen befragt wurden, und schreibe die Vierfeldertafel mit absoluten Zahlen.

1063 Bei einer Umfrage wird festgestellt: 35 % benutzen eine bestimmte Zahnpasta; 60 % kennen die entsprechende Werbung und 25 % der Befragten benutzen die Zahnpasta und kennen auch die Werbung.

a) Lege Ereignisse A und B fest und stelle die Angaben in einer Vierfeldertafel dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand diese Zahnpasta benutzt, wenn er die Werbung kennt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand diese Zahnpasta benutzt, obwohl er die Werbung nicht kennt?

1064 Eine Studie untersucht den Zusammenhang zwischen der Motorleistung und dem Geschlecht von Autolenkern:

	$\leqslant 40$ kW	> 40 kW
weiblich	76	54
männlich	82	88

Berechnet die relevanten bedingten Wahrscheinlichkeiten um zu zeigen, dass Männer zu Autos mit stärkeren Motoren neigen.

1065 Bei einer Umfrage wird festgestellt: 35 % haben Matura; 10 % sind arbeitslos. 33 % der Befragten haben Matura und auch Arbeit.

a) Lege Ereignisse A und B fest und stelle die Angaben in einer Vierfeldertafel dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand Matura hat, wenn er nicht arbeitslos ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand arbeitslos ist, obwohl er Matura hat?

7.9 Der Satz von Bayes E

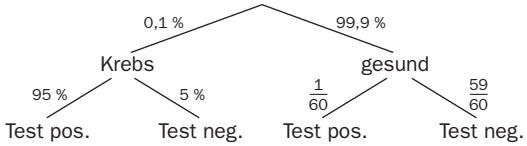
1066 Ein Pharmakonzern hat einen neuen Krebstest entwickelt. Augrund einer Studie kann der Pharmakonzern schätzen:

$P(\text{Test positiv}\,|\,\text{Krebs}) = P(B|A) = \frac{38}{40} = 95\,\%$ und

$P(\text{Test positiv}\,|\,\text{gesund}) = P(B|A') = \frac{1}{60}$

Es wird angenommen, dass 0,1 % der Gesamtbevölkerung an dieser Krebsart leidet. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich an diesem Krebs zu leiden, wenn der Test positiv ausgefallen ist?

Ausführung: Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\text{Krebs}\,|\,\text{Test positiv})$. Wir veranschaulichen die Situation mithilfe eines Baumdiagramms:



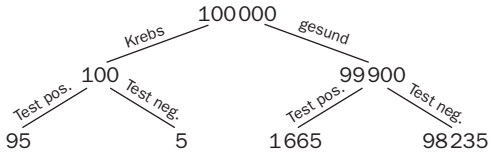
$P(\text{Test positiv}) = P(B) = 0{,}001 \cdot 0{,}95 + 0{,}999 \cdot \frac{1}{60} = 0{,}0176$

$P(\text{Krebs und Test positiv}) = P(A \cap B) = 0{,}001 \cdot 0{,}95 = 0{,}00095$

$\Rightarrow \text{P (Krebs}\,|\,\text{Test positiv)} = P(A|B) = \frac{0{,}00095}{0{,}0176} \approx 5{,}4\,\%$

Ergebnis: Bei einem positiven Test beträgt die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich an dieser Krebsart zu leiden, nur 5,4 %.

Das überraschende Ergebnis des letzten Beispiels lässt sich viel leichter verstehen, wenn man einen Grundwert annimmt. Bei einem Grundwert von 100 000 sieht die Situation so aus:



Insgesamt sind daher 1 760 positive Testergebnisse zu erwarten, davon allerdings nur 95 von Personen, die tatsächlich an dieser Krebserkrankung leiden. Daher $P(A|B) = \frac{95}{1\,760} \approx 5{,}4\,\%$.

Der überraschend kleine Wert für die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Testergebnis tatsächlich krank zu sein, liegt an der hohen Anzahl an Personen, die – obwohl gesund – ebenfalls einen positiven Test liefern. Diese sogenannten *falsch positiven* Tests sind das eigentliche Problem.

Im Beispiel 1066 sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A)$ und $P(B|A')$ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ gegeben. Daraus soll die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ berechnet werden. Der Rechengang, der zum Ergebnis geführt hat, heißt auch *Satz von Bayes*.

Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')}$$

Beweis: Siehe Aufgabe 1074.

Aufgaben

Die Beispiele 1067 – 1070 können auch mithilfe eines selbst gewählten Grundwertes gelöst werden.

1067 Etwa 15 % der Bevölkerung in Mitteleuropa leidet an „Laktoseintoleranz“. Bei solchen Menschen ist der Darm nicht fähig, Laktose (Milchzucker) abzubauen. Ein Laktosetoleranztest erkennt 75 % der Betroffenen. Er liefert jedoch auch bei 4 % der Gesunden fälschlicherweise einen positiven Befund.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Test tatsächlich an einer Lactoseintoleranz zu leiden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem negativen Test tatsächlich gesund zu sein?

1068 Die Krätze ist eine Hauterkrankung, die durch den Befall der Haut mit der Krätzmilbe ausgelöst wird. Für einen Test zur Diagnose von Krätze gilt: 98 % der an Krätze Erkrankten werden durch den Test erkannt und 98 % der Gesunden werden als gesund bestätigt. Wir nehmen an, dass 1 % der Bevölkerung an Krätze leidet.
Wie groß ist bei einem positiven Test das Risiko, tatsächlich an Krätze zu leiden?

1069 Ein HIV-Test erkennt zwar 100 % aller an HIV-Infizierten, zeigt jedoch auch bei 0,5 % der Gesunden ein positives Ergebnis. In einem afrikanischen Land sind 15 % der Bevölkerung mit HIV infiziert.
Wie groß ist das Risiko, an HIV zu leiden, wenn der HIV-Test positiv ausfällt?

1070 Ein Allergietest zeigt bei 99,5 % der von der Allergie betroffenen Personen eine positive Reaktion. Allerdings gibt es auch bei 1,5 % der gesunden Personen fälschlicherweise eine positive Reaktion.
Der Anteil der Personen in der Bevölkerung, die an dieser Allergie leiden, beträgt 2 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Test tatsächlich an dieser Allergie zu leiden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem negativen Test tatsächlich gesund zu sein?

1071 Diskutiert das Problem der großen Anzahl an falsch positiven Testergebnissen, die zu erwarten sind, wenn an einer großen Anzahl von Personen ein medizinischer Test durchgeführt wird. Überlegt die psychologischen Aspekte für die betroffenen Personen. Schätzt auch die finanziellen Aspekte derartiger *Screenings* ab (Kosten eines Tests, Kosten einer zweiten Untersuchung etc.). Sammelt schließlich die wichtigsten Argumente für bzw. gegen die Durchführung solcher Screenings.

1072 80 % aller Frauen infizieren sich zumindest einmal in ihrem Leben mit sogenannten „Humanen Papillomaviren“. In 80 % – 90 % der Fälle bildet sich diese Infektion ohne medizinische Maßnahmen spontan zurück. Nur bei etwa 1 % kommt es langfristig nach ungefähr 15 Jahren zu Gebärmutterkrebs.

Es gibt einen Test zur Erkennung der Humanen Papillomaviren (HPV-Test). Dieser Test erkennt ca. 90 % der Erkrankten, liefert jedoch auch bei etwa 60 % der Gesunden ein positives Ergebnis. Die Durchführung eines Tests kostet 35 € (Stand 2007).

Beurteilt, wie sinnvoll ein Screening aller Frauen ist, d. h. dass der Test bei allen Frauen über 30 Jahren durchgeführt wird. Schätzt die Kosten eines derartigen Programms und berechnet, wie viele falsche Ergebnisse dieser Test bei 100 000 Untersuchten liefert. Überlegt, wie man als Betroffene aber auch als Arzt mit dieser Tatsache umgehen kann.

Tipp: Sucht weitere und aktuelle Informationen zu diesem Thema im Internet!

1073 Was versteht man unter der *Spezifität eines Tests*, was unter der *Sensitivität*?
Recherchiert die Begriffe im Internet und dokumentiert eure Ergebnisse ausführlich. Gebt auch an, wie diese Werte berechnet und/oder geschätzt werden können.

1074 Beweist den Satz von Bayes in der Form:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')}$$

Vermischte Aufgaben

1075 Bei einer Prüfung werden aus einem Katalog von 60 Fragen vier Fragen zufällig ausgewählt. Lisa hat 10 Fragen nicht gelernt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa

a) alle vier Prüfungsfragen gelernt hat?

b) mindestens zwei Prüfungsfragen gelernt hat?

1076 Eine Alarmanlage besitzt einen Lichtsensor, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % reagiert und einen Bewegungsmelder, dessen Zuverlässigkeit 75 % beträgt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Ernstfall Alarm ausgelöst?

1077 Was ist wahrscheinlicher: bei zweimaligem Würfeln eine Augenzahlsumme, die kleiner als 5 ist, oder gleiche Augenzahlen zu werfen?

1078 Was ist wahrscheinlicher: bei dreimaligem Würfeln die Augenzahlsumme 9 oder die Augenzahlsumme 10 zu erhalten?

1079 Ein Kandidat legt im Rahmen der mündlichen Matura drei Prüfungen (je zwei Fragen) bei unterschiedlichen Prüfern ab. Prüfer A hat 6 leichte und 4 schwere Fragen vorbereitet, Prüfer B zwei leichte und 4 schwere Fragen und Prüfer C 3 leichte und 2 schwere Fragen.

a) Wie viele Konstellationen von leichten und schweren Fragen gibt es bei diesen Prüfungen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der Kandidat nur leichte Fragen?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der Kandidat mindestens eine schwere Frage?

1080 In einer Klasse mit 23 Schülerinnen und Schülern haben sechs keine Hausübung. 4 Personen werden kontrolliert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle aufgerufenen Personen eine Hausübung haben?

b) keine der aufgerufenen Personen eine Hausübung hat?

c) mindestens eine der aufgerufenen Personen keine Hausübung hat?

1081 Julian, Patrick und Thomas gehen in die 6b-Klasse (insgesamt 26 Schülerinnen und Schüler). Durch ein Los wird entschieden, welcher Schüler die Tafel löscht und welcher Schüler die Überschrift an die Tafel schreibt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) keiner von den 3 Burschen drankommt?

b) genau einer von den 3 Burschen drankommt?

c) mindestens einer von den 3 Burschen drankommt?

1082 Von der 6a-Klasse (gesamt 16 Schüler) werden fünf Schüler für einen Wettbewerb zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Christoph und Thomas zu den ausgewählten Schülern gehören?

1083 In einer Straßenbahn sitzen 24 Leute, von denen 6 keinen Fahrausweis besitzen. Bei einer Fahrscheinkontrolle werden 5 Fahrgäste kontrolliert.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle kontrollierten Fahrgäste einen Fahrausweis besitzen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der kontrollierten Fahrgäste einen Fahrausweis besitzen?

c) Peter und Anna sitzen in der Straßenbahn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter und Anna kontrolliert werden?

d) Sarah und Tom sitzen auch in der Straßenbahn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weder Sarah noch Tom kontrolliert werden?

1084 Beim Süddeutschen Lotto werden aus 49 Zahlen 6 Gewinnzahlen gezogen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs verschiedene Zahlen zu ziehen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer?

1085 Beim Lotto „4 aus 30“ gilt es, aus den Zahlen 1 bis 30 die richtigen vier zu erraten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Vierer bzw. einen Dreier zu tippen?

1086 Beim Lotto 6 aus 45 werden sechs Zahlen aus der Zahlenmenge {1, 2, … 45} zufällig gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) für sechs richtige Tipps?

b) für zwei richtige Tipps?

c) dass von den gezogenen Zahlen mindestens zwei ungerade sind?

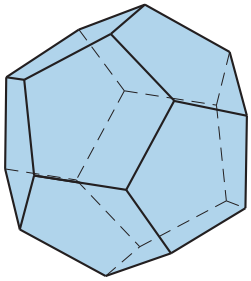
1087 Ein Dodekaeder ist ein Körper, der von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird.

Die Flächen des Dodekaeders sind mit den Zahlen 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5 beschriftet.

a) Das Dodekaeder wird 3-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal „5“ bekommt?

b) Das Dodekaeder wird 2-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen eine Primzahl ist?

c) Wie oft muss das Dodekaeder geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % zumindest einmal „5“ kommt?



1088 Für ein Spiel wird das Dodekaeder aus Aufgabe 1087 verwendet. Es geht darum, mit zwei Würfen eine Augenzahl von mehr als 8 zu erlangen. Die Teilnahme am Spiel kostet 1 €, die Gewinner bekommen 3 € ausbezahlt.

a) Wie groß ist die Chance zu gewinnen? Wie viele Gewinner sind daher zu erwarten, wenn das Spiel 90-mal gespielt wird?

b) Kann der Spielveranstalter einen Gewinn oder einen Verlust erwarten? Wie hoch ist dieser Gewinn bzw. dieser Verlust?

1089 In einem Geschäft für Büroartikel befindet sich eine Schachtel mit neun gleichartigen Kugelschreibern, davon sind zwei defekt. Es werden drei Kugelschreiber verkauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den drei verkauften Kugelschreibern

a) keiner defekt ist?

b) genau einer defekt ist?

c) genau zwei defekt sind?

d) Wie viele Kugelschreiber müssen in der Schachtel sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass keiner von den drei verkauften Kugelschreibern defekt ist, größer als 75 % ist?

1090 Für ein Omelett werden vier Eier benötigt.

Unter den zwölf Eiern im Kühlschrank sind zwei Eier faul. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den vier ausgewählten Eiern

a) keines faul ist?

b) genau eines faul ist?

c) genau zwei faul sind?

d) Wie viele Eier müssen im Kühlschrank sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass keines von den vier ausgewählten Eiern faul ist, größer als 75 % ist?

1091 Eine Region wird von zwei Kohle- und zwei Kernkraftwerken mit Energie versorgt. Bei einem Gewitter schaltet sich jede der vier Hochspannungsleitungen, die die Kraftwerke mit dem Versorgungsnetz verbinden, mit 10 %-iger Wahrscheinlichkeit aus. Für die Versorgung der Region genügen zwei Kraftwerke, allerdings muss ein Kernkraftwerk dabei sein.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bricht die Stromversorgung bei einem Gewitter zusammen?

1092 In einer Lade befinden sich zwei Socken mit einem Loch. Wie viele Socken müssen mindestens in der Lade sein, damit bei zufälliger Entnahme (etwa zu früher Morgenstunde) die Wahrscheinlichkeit, zwei Socken ohne Loch zu erwischen, größer als 90 % ist?

1093 Bei einer Impfung zeigt im Mittel eine von 1 000 Personen eine Gegenreaktion. Es werden 2 000 Personen geimpft. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen eine Gegenreaktion auftritt.

1094 In einer Urne befinden sich 4 rote, 5 blaue und 3 grüne Kugeln. Es werden nacheinander zufällig vier Kugeln gezogen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, vier Kugeln gleicher Farbe zu ziehen, wenn

a) die Kugeln jeweils in die Urne zurückgelegt werden.

b) die Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt werden.

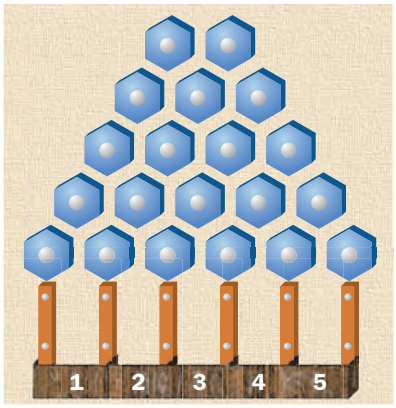
1095 Eine Eisenwarenhandlung verkauft Schrauben in Packungen zu je 150 Stück mit einem Ausschussanteil von 5 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Packung

a) mindestens 2 defekte Schrauben sind?

b) höchstens 3 defekte Schrauben sind?

c) mehr als 3 defekte Schrauben sind?

1096 Bei einem *Galtonbrett* befinden sich Hindernisse in einer symmetrischen Anordnung, sodass eine von oben eingeworfene Kugel jeweils mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts fällt.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Kugel in das jeweilige Fach?

Hinweis: Die Summe der berechneten Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben.

1097 Bei einem Kongress sind 30 % der Teilnehmer Franzosen. Jeder 2. Franzose, aber nur jeder 10. Nicht-Franzose trinkt zur Hauptspeise Wein. Ein Teilnehmer des Kongresses trinkt zum Mittagessen Wein.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Franzosen?

1098 Eine Untersuchung hat ergeben, dass 8 % der Bevölkerung einer Region Mitglied in einem Chor sind. 80 % jener Personen, die in einem Chor singen, haben ein Konzertabo, während bei jenen, die nicht in einem Chor singen, dieser Anteil bei nur 10 % liegt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand in einem Chor singt, wenn er ein Konzertabo besitzt?

b) Eine Person hat kein Konzertabo. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person kein Mitglied in einem Chor?

1099 80 % der Mitarbeiter eines Unternehmens sind männlich. 25 % der männlichen Mitarbeiter sind Raucher. Der Raucheranteil unter allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern beträgt nur 22 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit raucht eine weibliche Mitarbeiterin?

b) Wie groß ist der Anteil der männlichen Nichtraucher unter allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern?

1100 Um in eine Spezialeinsatztruppe der Polizei aufgenommen zu werden, muss man einen Fitnesstest absolvieren. Dieser Test wird von 92 % der körperlich Geeigneten bestanden, 98 % der nicht Geeigneten fallen durch. 90 % der Bewerber sind körperlich fit.

a) Jemand besteht diesen Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person tatsächlich geeignet?

b) Jemand besteht diesen Test nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person tatsächlich nicht geeignet?

1101 3 % einer Bevölkerung haben eine bestimmte Erbkrankheit. Ein medizinischer Test erkennt 96 % der Erkrankten, liefert aber auch bei 5 % der Gesunden fälschlicherweise ein positives Ergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine Person mit einem positiven Testergebnis tatsächlich an dieser Erbkrankheit leidet?

b) eine beliebige Person ein positives Testergebnis erhält?

Sprache der Mathematik

1102 **Thema Beschreibende Statistik**

Gibt dieser Parameter an, wie stark Daten um einen Wert streuen?

	ja	nein
1. Median	☐	☐
2. Varianz	☐	☐
3. Spannweite	☐	☐
4. mittlere absolute Abweichung	☐	☐
5. Modus	☐	☐

1103 **Thema Statistische Merkmale**

Mit welcher Skala wird das Merkmal gemessen?

	Nominalskala	Ordinalskala	metrische Skala
1. Automarke	☐	☐	☐
2. Geschwindigkeit	☐	☐	☐
3. Reifenfülldruck	☐	☐	☐
4. Anzahl der Beifahrer	☐	☐	☐
5. Prämienstufe	☐	☐	☐
6. Baujahr	☐	☐	☐

1104 **Thema Wahrscheinlichkeit von Ereignissen**

	stimmt immer	kann sein	stimmt nie
1. $P(A) + P(B) > 1$	☐	☐	☐
2. $P(A) + P(B) = 1$	☐	☐	☐
3. $P(A) + P(A') = 1$	☐	☐	☐
4. $P(A) + P(A') < 1$	☐	☐	☐

1105 **Thema Wahrscheinlichkeitsbegriff**

Im Wetterbericht heißt es, dass in Murau die Niederschlagswahrscheinlichkeit für den nächsten Tag 70 % beträgt.
Sind diese Aussagen wahr oder falsch? Begründe!

	wahr	falsch
1. In Murau regnet es durchschnittlich an 70 von 100 Tagen.	☐	☐
2. Unter den gegebenen Wetterfaktoren wird es im Durchschnitt in 70 von 100 Fällen am nächsten Tag regnen.	☐	☐
3. Jahrelange Beobachtungen besagen, dass es bei den gegebenen Wetterverhältnissen in durchschnittlich 70 % der Fälle am nächsten Tag regnet.	☐	☐
4. In Murau gibt es an 70 % aller Tage am nächsten Tag Regen.	☐	☐

1106 **Thema Bedingte Wahrscheinlichkeit**

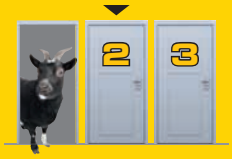
	stimmt immer	kann sein	stimmt nie
1. $P(A \mid B) = P(A \cap B)$	☐	☐	☐
2. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	☐	☐	☐
3. $P(A \mid B) = P(B)$	☐	☐	☐
4. $P(A \mid B) > P(A \cap B)$	☐	☐	☐

Das Ziegen-problem

Das Ziegenproblem zählt zu jenen mathematischen Denksportaufgaben, über die nicht nur in Fachkreisen, sondern auch in Zeitungen und Zeitschriften heftig diskutiert wurde und noch immer wird. Viele Leute – sogar gelernte Mathematiker – glaubten anfangs nicht an die korrekte Lösung, weil sie dem einfachen Hausverstand so wenig einleuchtet.

Das Ziegenproblem kann folgendermaßen formuliert werden: Bastian ist bei einer Show und darf eine von drei verschlossenen Türen auswählen. Hinter einer Tür wartet ein Ferrari, hinter den beiden anderen steht jeweils eine Ziege.

Bastian zeigt hoffnungsvoll auf eine der Türen, z. B. auf Tür Nummer zwei. Doch der Spielleiter, der weiß, dass der Ferrari z. B. hinter Tür Nummer drei steht, öffnet nicht die Tür Nummer zwei. Er öffnet zunächst die Tür Nummer eins, und eine Ziege wird für alle sichtbar.



Der Spielleiter fragt Bastian: „Wollen Sie bei Ihrer Wahl Tür Nummer zwei bleiben, oder wollen Sie sich für Tür Nummer drei entscheiden?“ Was soll Bastian tun?

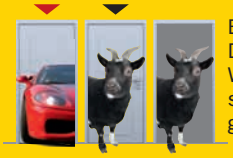
Das ist das Ziegenproblem, das im angelsächsischen Sprachraum „Monty Hall Problem“ genannt wird. Es geht auf die amerikanische Spielshow *Let's Make a Deal* zurück, die vor allem in den 1960er- und 70er-Jahren populär war. Die amerikanische Autorin *Marilyn vos Savant*, die als Frau mit dem höchsten je gemessenen IQ gilt, stellte das Ziegenproblem im Jahr 1990 in ihrer regelmäßigen Magazin-Kolumne vor und löste damit eine weltweite Debatte aus, die bis heute anhält.

Die meisten, die von dieser Aufgabe zum ersten Mal hören, sind der Meinung, dass der Ferrari aus Bastians Sicht ebenso gut hinter Tür Nummer zwei oder hinter Tür Nummer drei steht. Sie sagen daher, dass Bastian bei seiner Wahl bleiben kann. Seine Gewinnchance ist auf jeden Fall ein Drittel.

▶ **1** Spielt dieses Spiel in Zweiergruppen. Ihr könnt z. B. 3 Karten verwenden, eine Karte steht für den Ferrari, die beiden anderen für die Ziegen.
Spielt 10 Minuten die Strategie „Wahl nicht ändern!“ und haltet fest, wie oft ein Gewinn auftritt. Spielt anschließend 10 Minuten die Strategie „Wahl ändern!“ und haltet wieder die Anzahl der Gewinne fest. Berichtet euch gegenseitig über die gemachten Erfahrungen!

Es scheint so zu sein, dass Bastians Gewinnchance steigt, wenn er seine Wahl ändert! Um dies zu beweisen, müssen wir alle Möglichkeiten durchdenken. Wir nehmen dabei an, dass Bastian zunächst Tür Nummer zwei wählt.

1. Fall: Der Ferrari steht hinter Tür eins.

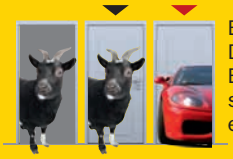


Bastian hat Tür Nummer zwei gewählt (▼). Der Spielleiter öffnet daher Tür Nummer drei. Weil Bastian nicht bei seiner Wahl bleibt und sich für Tür Nummer eins entscheidet (▼), gewinnt er den Ferrari.

2. Fall: Der Ferrari steht hinter Tür zwei.

Bastian hat Tür Nummer zwei gewählt. Der Spielleiter öffnet entweder Tür eins oder drei. Bastian ändert seine Wahl und wechselt entweder zu eins oder zu drei (▼). Weil Bastian nicht bei Tür Nummer zwei bleibt, verliert er.

3. Fall: Der Ferrari steht hinter Tür drei.



Bastian hat Tür Nummer zwei gewählt (▼). Der Spielleiter öffnet daher Tür Nummer eins. Bastian ändert seine Wahl und entscheidet sich für Tür Nummer drei (▼). Daher gewinnt er den Ferrari.

Ergebnis: In zwei von drei gleich wahrscheinlichen Fällen gewinnt Bastian den Ferrari, falls er seine ursprüngliche Wahl ändert.
Seine Gewinnchance ist daher zwei Drittel, also doppelt so groß!

▶ **2** Überlegt die drei möglichen Fälle, wenn Bastian sich anfangs für
a) Tür Nummer eins
b) Tür Nummer drei entscheidet.

▶ **3** Überlegt folgende Spielvariante: Statt 3 Türen gibt es 10 Türen. Wieder steht hinter einer Tür ein Ferrari, hinter den anderen jeweils eine Ziege. Wenn der Kandidat seine Wahl getroffen hat, öffnet der Spielleiter 8 Türen hinter denen jeweils eine Ziege steht.
Berechnet die Gewinnchance, wenn der Kandidat
a) bei seiner Wahl bleibt.
b) seine Wahl ändert.

▶ **4** *Marilyn vos Savant* gelang es nicht, ihre Leserschaft von der richtigen Lösung zu überzeugen. Sie erhielt zahlreiche Zuschriften mit oft beleidigendem Inhalt. Auch der deutsche Journalist *Gero von Randow*, der für die Wochenzeitung *Die Zeit* über das Ziegenproblem berichtete, machte ganz ähnliche Erfahrungen.
Recherchiert im Internet detailliertere Informationen zu Marilyn vos Savant und Gero von Randow.

Mehr zu diesem Thema gibt es unter: http://www.thema-mathematik.at

Meine Kapitelcheckliste zu Stochastik

Ich weiß … (d.h. ich kenne, ich kann beschreiben, sagen, erklären, verdeutlichen, …)	Ich kann … (d.h. ich kann darstellen, berechnen, interpretieren, begründen, finden …)	Ich übe … z.B. Aufgaben
thema Grundlagen der beschreibenden Statistik		
☐ … was qualitative und quantitative Merkmale sind.	☐ … qualitative und quantitative Merkmale unterscheiden und angeben, welche Skala verwendet wird.	… 953, 954
☐ … was diskrete und stetige Merkmale sind.	☐ … diskrete und stetige Merkmale unterscheiden.	… 960
☐ … worin die Unterschiede zwischen einer Nominal-, Odinal- und einer metrischen Skala bestehen.	☐ … in einer Stichprobe eine sinnvolle Klasseneinteilung vornehmen.	… 956
	☐ … geeignete grafische Darstellungen anfertigen.	… 955, 957, 958, 967
thema Kennzahlen der beschreibenden Statistik		
☐ … was arithmetisches Mittel und Standardabweichung sind.	☐ … arithmetisches Mittel und Standardabweichung berechnen und interpretieren.	… 969
☐ … was Median und absolute Abweichung sind.	☐ … Median und absolute Abweichung berechnen und interpretieren.	… 973
☐ … was Modus und Spannweite sind.	☐ … Modus und Spannweite berechnen und interpretieren.	… 978
☐ … was Quartile sind und was in einem Boxplot (Kastenschaubild) dargestellt wird.	☐ … Quartile berechnen und interpretieren, sowie einen Boxplot anfertigen und interpretieren.	… 981, 983
thema Zufallsversuche und Ereignisse		
☐ … was ein Zufallsversuch ist.	☐ … bei einem Zufallsversuch die Ergebnismenge angeben.	… 986
☐ … was ein Elementarereignis ist.	☐ … die Ereignismenge bestimmen.	… 989
☐ … den Unterschied zwischen Ergebnis und Ereignis.	☐ … das Gegenereignis beschreiben.	… 992
thema Kombinatorik		
☐ … was ein Baumdiagramm ist.	☐ … die Produktregel bei mehrstufigen Zufallsversuchen anwenden.	… 998
☐ … was ein mehrstufiger Zufallsversuch ist.	☐ … Permutationen ohne Wiederholung berechnen.	… 1004
☐ … die Produktregel der Kombinatorik und weiß, wie sie sich verallgemeinern lässt.	☐ … Variationen ohne Wiederholung berechnen.	… 1014
☐ … was eine Permutation ist.	☐ … Kombinationen ohne Wiederholung mithilfe des Binomialkoeffizienten berechnen.	… 1020
☐ … was eine Variation ist.		
☐ … was eine Kombination ist.		
☐ … was der Binomialkoeffizient ist und wie er berechnet wird.		
thema Wahrscheinlichkeit von Ereignissen und Laplace'sche Zufallsereignisse		
☐ … verschiedene Deutungen des Begriffs Wahrscheinlichkeit.	☐ … Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten schätzen.	… 1022
☐ … was ein Laplace'sches Zufallsereignis ist.	☐ … Wahrscheinlichkeit berechnen (auch mittels Gegenereignis)	… 1029, 1030 1038

Ich weiß …	Ich kann …	Ich übe …
thema Baumdiagramme – Pfadregeln		
☐ … die Pfad-Produktregel. ☐ … die Summenregel.	☐ … mehrstufige Zufallsversuche mithilfe von Baumdiagrammen darstellen und Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Produkt- und der Summenregel berechnen.	… 1043, 1047, 1054
thema Bedingte Wahrscheinlichkeit		
☐ … was unter einer bedingten Wahrscheinlichkeit verstanden wird. ☐ … wie die Vierfeldertafel bei der Angabe bedingter Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden kann.	☐ … bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen.	… 1062, 1063

Kompetenzen für meine Matura

- ☐ Ich kenne die Grundbegriffe der beschreibenden Statistik und kann Stichproben mithilfe statistischer Kenngrößen analysieren.
- ☐ Ich kann Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln und Stärken, Schwächen und Manipulationsmöglichkeiten statistischer Grafiken erkennen.
- ☐ Ich kenne die Begriffe Zufallsversuch, Ergebnis, Ereignis, Gegenereignis.
- ☐ Ich bin in der Lage einfache Abzählprobleme mit kombinatorischen Überlegungen zu lösen.
- ☐ Ich kann verschiedene Deutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes angeben.
- ☐ Ich kann Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen, der Produkt- und der Summenregel berechnen.
- ☐ Ich kenne den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und kann ihn anwenden und interpretieren.

Teste dein Wissen!

Kreuze die richtigen Antworten an. Es können auch mehrere Antworten richtig sein.

1107 Laura und Anna gehen in die 6a-Klasse. Ereignis: Laura und Anna werden zur Stundenwiederholung aufgerufen. Was ist das Gegenereignis?

- ☐ Weder Laura, noch Anna kommen dran.
- ☐ Höchstens eine von beiden kommt dran.
- ☐ Entweder Laura oder Anna kommt dran.
- ☐ Keine von den beiden kommt dran.

1108 Welche Form von Wahrscheinlichkeit liegt vor?

A: Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler ein Handy besitzt

B: Wahrscheinlichkeit, dass es Anfang Juli sonnig ist

C: Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl gerade ist

D: Wahrscheinlichkeit, dass ein Medikament Wirkung zeigt

E: Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler zur Wiederholung drankommt

	a-priori-Wahrscheinlichkeit	a-posteriori-Wahrscheinlichkeit
A	☐	☐
B	☐	☐
C	☐	☐
D	☐	☐
E	☐	☐

1109 Von den 26 Kleinbuchstaben des Alphabets wird ein fünfstelliges Passwort gebildet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dieses Passwort zufällig zu erraten?

- ☐ $\frac{5}{26}$
- ☐ $\frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26}$
- ☐ $\frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{22}$
- ☐ $\left(\frac{1}{26}\right)^5$

1110 Eine Klasse wird von 6 Schülerinnen und 18 Schülern besucht. 3 werden zur Vokabelprüfung aufgerufen. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Mädchen geprüft werden, beträgt

- ☐ $\frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23} \cdot \frac{16}{22}$
- ☐ $\left(\frac{18}{24}\right)^3$
- ☐ $1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{24}{3}}$
- ☐ $\frac{\binom{18}{3}}{\binom{24}{3}}$

1111 Zwei Jäger schießen gleichzeitig auf einen Hasen. Beide treffen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hase getroffen wird?

- ☐ $2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6$
- ☐ $1 - 0{,}6^2$
- ☐ $0{,}4^2$
- ☐ $2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^2$

1112 Bei einer Umfrage wird festgestellt: 32 % einer Altersgruppe betreibt regelmäßig Sport; 10 % sind übergewichtig. 8 % der Befragten sind übergewichtig und betreiben nicht regelmäßig Sport.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand übergewichtig ist, wenn er/sie regelmäßig Sport betreibt?

- ☐ 6 %
- ☐ 6,25 %
- ☐ 6,7 %
- ☐ 20 %

1113 Ein Pharmakonzern hat einen neuen Krebstest entwickelt. Aufgrund einer Studie kann der Pharmakonzern folgende Wahrscheinlichkeiten schätzen:

$P(\text{Test positiv} \mid \text{Krebs}) \approx 95\,\%$ und
$P(\text{Test positiv} \mid \text{gesund}) \approx 2\,\%$

Welche der folgenden Aussagen treffen für diesen Kontext zu?

	Trifft zu	Trifft nicht zu
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt und die Person tatsächlich Krebs hat, beträgt ca. 95 %.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person negativ ausfällt und die Person gesund ist, beträgt ca. 98 %.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer Person, die Krebs hat, positiv ausfällt, beträgt ca. 95 %.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person negativ ausfällt und die Person tatsächlich gesund ist, beträgt ca. 5 %.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer gesunden Person positiv ausfällt, beträgt ca. 2 %.	☐	☐

Lösungen zu allen Aufgaben findest du in: Thema Mathematik 6 Lösungen (SBNR 150.261)

Stichwortverzeichnis

a-posteriori-Wahrscheinlichkeit 211
a-priori-Wahrscheinlichkeit 211
absolute Änderung 66, 170
absolute Häufigkeit 194
Abstand, Punkt von einer Ebene 118
Abstand, Punkt von einer Geraden 118
Abstand windschiefer Geraden 125
Abstandsberechnung,
  mit skalarem Produkt 119
  mit vektoriellem Produkt 118
  mit Normalebene 118
  mit normaler Geraden 118
Abzinsung 72
Additionstheoreme 150
allgemeine Ebenengleichung 110
alternierend 58
Amplitudenmodulation, AM 165
Änderungsmaß 170
Anfangswert 170
Anspartabelle 74
äquivalent 34
Äquivalenzumformungen 34
Archimedes 55
arithmetische Folge 66
arithmetische Reihe 70
arithmetisches Mittel 198
Arkusfunktion 153
Assoziativgesetz 126
Asymptote 144
Aufzinsfaktor 74
Aufzinsung 72
Ausreißer 200

Barwert 72
Basis, einer Potenz 6
Basis, eines Logarithmus 12
Baumdiagramm 214
bedingte Wahrscheinlichkeit 218
Bernoulli´sche Ungleichung 69, 81, 83
beschränktes Modell 176
beschränktes Wachstum 177
Beschränktheit 60
Bestand, Bestandsgröße 170
Betrag eines Vektors im Raum 98
Betragsungleichung 38
Bijektivität 140
binärer Logarithmus 12
Binomialkoeffizient 209
Biomathematik 188
Bisektionsverfahren 42, 46
Bogenmaß 150
Boxplot 202
Bruchfunktion 142
Bruchungleichung 36

Cosinus 150

Definitionsbereich 153
Definitionsmenge 134, 142, 144
dekadischer Logarithmus 12
Determinante 106
Differenzenquotient 171
diskretes Merkmal 195
diskretes Modell 170
diskretisieren 196
Distributivgesetz 126
divergent 62
Drehung 158
Dreiecksform 26
Dreifingerregel 107

Ebenengleichung,
  Normalvektorform 110
  Parameterform 108
effektiver Zinssatz 78
Einheitskreis 150
Einheitsvektor 99
Elementarereignis 204
Eliminationsverfahren 26
empirisches Gesetz der großen Zahlen 210
Endwert 72
Ereignis 204
Ergebnismenge 204
Ergebnisraum 210
eulersche Zahl 80
explizite Darstellung 56
Exponent 6
Exponentialfunktion 146
Exponentialgleichung 14
exponentielles Modell 174
exponentielles Wachstum 174, 182
Extremstelle 136, 160
Extremum 136
ε-Umgebung 62

Faktorielle (Fakultät) 207
Fallunterscheidung 36, 38
Fehlerschranken 32, 44, 47
Fibonacci-Zahl 43, 90
Finanzmathematik 72
Fixpunkt 134, 160
Flächeninhalt eines Parallelogramms 106
Folge 56
Folgenglied 56
Fraktal 88
Freiraum 176
Frequenzmodulation, FM 165
Funktionsgraph 134
Funktionsterm 134

Gauß, Carl Friedrich 31
gebrochen rationale Funktion 144
Gegenereignis 205
Gegenvektor 96
geometrische Folge 66
geometrische Reihe 70
geometrische Wahrscheinlichkeit 211
gerade Funktion 138
Geradengleichung,
  Paramterform 102
Gleichungssystem 26, 30
Glied einer Folge 56
Goldener Schnitt 90
Gradmaß 150
grafische Lösung 38
Grenzwert 62
Grenzwertsätze 62
Grundgesamtheit 195

Halbebene 40
Halbierungspunkt 132
Halbwertszeit 182
Häufigkeit 194
Heron-Verfahren 54
Hesse‘sche Abstandsformel 119
Hochzahl 6
Höhenprofil 137, 140
homogene lineare Funktion 142

identisch 104, 114
Induktion 82
Infimum 60
Intervallschachtelung 64
irrationale Zahlen 64
Item 195
Iteration 54, 157
Iterationsdiagramm 46
iterative Näherungsverfahren 42

Kastenschaubild 203
Kettenbruch 90
Klassenbreite 196
Klasseneinteilung 196
Klassengrenze 196
Koeffizientenmatrix 28, 45
Kombination ohne Wiederholung 208
Kombinatorik 206
Kommutativgesetz 126
konstante Funktion 142
konstruktive Darstellung 56, 58
kontinuierliches Modell 170
konvergent 62
Kotangens 153
Kredit 76
Kreisdiagramm 194
Kreisumfang 55
Kreuzprodukt 106

Lage von Ebenen 114
Lagrange, Beziehung von 126
Langrange, Joseph-Louis 31
Laplace-Wahrscheinlichkeit 211

Laplace'sches Zufallsereignis 212
Laplace'sches Zufallsexperiment 211
Leonardo da Pisa 43, 90
Limes 62
lineare Gleichungssysteme 26, 47
lineare Optimierung 48
lineare Verzinsung 74
lineares Modell 172
lineares Wachstum 172
logarithmische Gleichung 15
Logarithmus 12
logarithmus naturalis 80
Logarithmusfunktion 148
logistische Gleichung 59
logistisches Modell 178
logistisches Wachstum 157

Matrix 28, 159
Maximalbedingung 48
Maximum 136
Median 200, 203
Merkmal 195
metrische Skala 195
Minimalbedingung 48
Minimum 136, 203
mittlere absolute Abweichung 200
mittlere Änderungsrate 171
Modalwert 201
Modell 170
Modus 201
momentane Änderungsrate 171
Monotonie 136, 160

(n – an)-Diagramm 58
nachschüssig 74
Näherungsverfahren 42
natürlicher Logarithmus 80
Nominalskala 195
Normalabstand 106
Normalprojektion 100, 119
Normalvektorform der Ebenengleichung 110
Nullfolge 62
Nullstelle 134, 160
Numerus 12

Oktaeder 97
Oktanten 122
Ordinalskala 195
Orthogonalität 126
Orthogonalitätskriterium 100

parallel 104
Parallelepiped 105, 120
Parallelität 126
Parallelitätskriterium 98
Parameterform
der Ebenengleichung 108
der Geradengleichung 102
Parameter 154, 161
Periode 138, 160
Permutation mit Wiederholung 207
Permutation ohne Wiederholung 206
Pfad-Produktregel 215
Pfeildiagramm 134
Piktogramm 194
Polynomfunktion 144
Potenz 6, 65
Potenzfunktion 142
Produktregel der Kombinatorik 206
Pyramide 120

Quadratische Funktion 142
quadratische Ungleichung 36
Quadratwurzelfunktion 142
qualitatives Merkmal 195
quantitatives Merkmal 195
Quartil, Quartilabstand 202

Radikand 10
rationale Zahlen 64
reelle Funktion 134
reelle Zahlen 64
Regula Falsi 42, 46
Reihe 70
rekursive Darstellung 56
Relationszeichen 32
relative Änderung 68, 170
relative Häufigkeit 194

Sättigungsgrenze 177
Satz von Bayes 220
Säulendiagramm 194
Schneeflockenkurve 88
schneidend 104
Schnittgerade 114
Schnittwinkel 104, 113
Schnittwinkel zweier Ebenen 115
Schrägriss 96
Schranken 32, 60
Schwerpunkt eines Dreiecks 99, 132
sicheres Ereignis 210
Sierpinski-Teppich 88
signifikante Stellen 32
Simplex-Verfahren 49
Sinus 150
skalares Produkt 100, 126
Spannweite 201
Spat 120
Spinnwebdiagramm 180
Spiralmuster 90
Spitze-minus-Schaft-Regel 96
Spurdreieck 108
Spurpunkt 108
Stabdiagramm 194
Standardabweichung 198
statistische Variable 195
stetige Verzinsung 80
stetiges Merkmal 195
Stichprobe 195
Stichprobenumfang 194
Streuung 201
Strichliste 194
Substitutionsverfahren 28
Summenformel 70
Summenregel 216
Summenzeichen 88
Supplementärwinkel 104
Supremum 60
Symmetrie 138, 160

Tangens 150
Tetraeder 120
Tilgungsplan 76
transzendente Zahl 80

Umkehrfunktion 140, 157
ungerade Funktion 138
Ungleichung 32, 34, 38, 47
Ungleichungsketten 33
Ungleichungssystem 35, 40, 46, 47
unmögliches Ereignis 210
Urliste 194

Varianz 198
Variation mit Wiederholung 208
Variation ohne Wiederholung 208
Vektor 45, 96
Vektor zum Speichern von Daten 124
vektorielle Flächenformel 107
vektorielle Winkelformel 100
vektorielles Produkt 106, 126
Verketten von Funktionen 156
Vierfeldertafel 218
vollständige Induktion 82
Vollständigkeit 64
Volumsberechnungen 120
vorschüssig 74

Wachstumsgrenze 176
Wahrscheinlichkeit 210
Wertemenge 134
Wertetabelle 134
windschief 104
Winkelfunktion 152
Wurzel, k-te 10
Wurzelfunktion 142
Wurzelziehen, partielles 11

Zahlenfolge 56
Zahlengerade 64
Zehnerlogarithmus 12
Zenon von Elea 87
Zentralwert 200
Zerfallsgesetz 182
Zerfallskonstante 182
Zinssatz 72
Zufallsversuch 204
Zufallsversuch, zwei-, drei-, mehrstufiger 206
Zweierlogarithmus 12