1. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1 Im Buch ausgeführt.

2 Im Buch ausgeführt.

3 Im Buch ausgeführt.

4 **a)** 125; $\frac{4}{9}$ **b)** -27; 0,25 **c)** 16; -16
d) 1; 1

5 Das Produkt zweier negativer Zahlen ist stets positiv. Damit gilt:
a) $a^n > 0 \Leftrightarrow n$ gerade
(Je zwei Faktoren werden zusammengefasst.)
b) $a^n < 0 \Leftrightarrow n$ ungerade
(Ein Faktor bleibt übrig.)

6 **a)** $a^2 \cdot a^4 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$
b) $a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$
c) $(a^2)^3 = (a^2) \cdot (a^2) \cdot (a^2) = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6$
d) $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{a^3}{8}$

7 **a)** $a^n \cdot a^k = \overbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k \text{ Faktoren}}}^{n+k \text{ Faktoren}} = a^{n+k}$

b) $a^n : a^k = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ Faktoren}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-k \text{ Faktoren}} \cdot \overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{k \text{ Faktoren}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{k \text{ Faktoren}}} =$
$= a^{n-k}$

c) $\left(a^n\right)^k = \overbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot \ldots \cdot (a^n)}^{k \text{ Klammern}} =$
$= \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}}}^{k \text{ Klammern}} =$
$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \cdot k \text{ Faktoren}} = a^{n \cdot k}$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ Klammern}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{a^n}{b^n}$

8 $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$ und
$a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = 1,$
also ist die Definition von $a^0 = 1$ sinnvoll.

9 **a)** a^7 **b)** a^5 **c)** a^6 **d)** a^7 **e)** a^3 **f)** $-a$
g) $-a^3$ **h)** $-a$ **i)** a^6 **j)** a^{14} **k)** a^{20} **l)** a^6

10 **a)** 7^8 **b)** 3^2 **c)** 5^8 **d)** 2^{17}
e) 7^2 **f)** 3 **g)** 1 **h)** 2^4

11 **a)** $16a^4$ **b)** $-125a^3$ **c)** $32a^{10}$ **d)** $9a^8$
e) $a^{10}b^5$ **f)** $8a^9b^6$ **g)** $9a^{12}b^2$ **h)** $-8a^3b^6$

12 **1)** z. B. $a = 2$ und $b = 3$:
$(2+3)^2 = 5^2 = 25$, aber $2^2 + 3^2 = 13$
2) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$

13 **a)** $\square$ $\square$ $\boxtimes$ $\square$ $\boxtimes$ **b)** $\square$ $\boxtimes$ $\boxtimes$ $\boxtimes$ $\boxtimes$

14 **a)** $16a^7$ **b)** $-\frac{a}{2}$ **c)** $-45a^6$
d) $36a$ **e)** $10a$ **f)** $-\frac{9a}{2}$

15 **a)** $5a^{18}b^5$ **b)** $16a^2b^8$ **c)** $3a^6b^{17}$
d) $81a^6b^9$ **e)** $-2a^5b^2$ **f)** $\frac{ab}{3}$ **g)** $-24ab^3$
h) $\frac{b}{27a^6}$

16 **a)** $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1\,000\,000}$ **b)** $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{32}$
c) $\frac{1}{125}$; $-\frac{1}{125}$ **d)** $\frac{1}{10\,000}$; -1

17 $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$
Die Division durch 0 ist nicht definiert.

18 **a)** $\frac{1}{a^4}$ **b)** $\frac{1}{a^8}$ **c)** $\frac{1}{a^6}$ **d)** $\frac{1}{3^2a^2}$ **e)** $\frac{1}{2^6a^{12}}$
f) $\frac{1}{5^4a^8}$ **g)** $\frac{b^2}{a^3}$ **h)** $\frac{a}{b^4}$ **i)** $\frac{2b^3}{a^5}$ **j)** $\frac{1}{3^2a^3b^2}$
k) $-\frac{1}{5^4a^2b^4}$ **l)** $\frac{3a^4}{2b}$

19 **a)** 2^3a^{-4} **b)** $2^{-3}a^4$ **c)** $2^{-2}a^{-4}b^5$
d) $3^{-2}a^2b^{-1}$ **e)** $-2^3 \cdot 5^{-2}a^4$ **f)** $-3^3 \cdot 2^{-1}a^3$

20 **a)** $\frac{3b^3}{4a^5}$ **b)** $18ab^8$ **c)** $\frac{1}{a^8b^2}$ **d)** $-\frac{1}{a^2b^3}$

21 *1. Schritt*: die Potenz mit der negativen Hochzahl wird als Bruch geschrieben; *2. Schritt*: die Zahl 1 wird als Bruch dargestellt; *3. Schritt*: Auflösung des Doppelbruches („Außen mal Außen durch Innen mal Innen“); *4. Schritt*: Division durch 1

22 Die Regel stimmt, denn $\frac{a^{-n}}{1} = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
und $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = \frac{a^n}{1}$.

23 **a)** $\frac{b^2}{a^2}$ **b)** $\frac{1}{a^4b^3}$ **c)** $\frac{1}{a^2b^2}$ **d)** $\frac{2 \cdot 3^4b^2}{a^4}$
e) $\frac{a^4}{2^{10}b^3}$ **f)** $\frac{3 \cdot 7^3b^2}{a^5}$ **g)** $\frac{1}{10^2a^6b^4}$ **h)** $-\frac{2^3}{a^6b^9}$

24 **a)** $3^{-2}a^{-3}b^2$ **b)** $-5^{-1}a^{-1}b$
c) $-4 \cdot 3^{-1}a^{-1}$ **d)** $2^4 \cdot 3 \cdot 5a^5b^{-3}$

25 Im Buch ausgeführt.

26 Im Buch ausgeführt.

27 Im Buch ausgeführt.

28 **a)** 9; $\frac{2}{3}$ **b)** 2; 4 **c)** 3; $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$; 2

29 **a)** $\sqrt[3]{a^2}$ **b)** $\sqrt[5]{a^4}$ **c)** $\sqrt[5]{a^2}$ **d)** $\sqrt[b]{a}$
e) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ **f)** $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ **g)** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$

30 **a)** $a^{\frac{5}{8}}$ **b)** $a^{\frac{3}{4}}$ **c)** $a^{\frac{2}{5}}$ **d)** $a^{\frac{s}{r}}$ **e)** $a^{-\frac{1}{3}}$
f) $a^{-\frac{3}{4}}$ **g)** $a^{-\frac{1}{2}}$ **h)** $a^{-\frac{1}{t}}$

31 **a)** $a^{\frac{3}{4}}\, b^{\frac{1}{2}}$ **b)** $(4\,a)^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}$ **c)** $a^2\, b$
d) $(2\,a)^{\frac{3}{5}}\, b^{-\frac{4}{5}}$ **e)** $(3\,a^2)^{\frac{1}{3}}\, b^{-2}$ **f)** $5\,a^2\, b^{-4}$

32 $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{E}}$

33 **a)** 3 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** 2 **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** 5
g) 49 **h)** 0,5 **i)** $\frac{1}{3}$

34 ☐ ☒ ☒ ☒ ☒

35 **a)** $a^{\frac{1}{6}}$ **b)** $a^{\frac{7}{12}}$ **c)** a^{-3} **d)** $a^{\frac{3}{2}}$

36 **a)** $\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = a^{\frac{1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a\,b}$
b) $\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{k}}}{b^{\frac{1}{k}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{a}{b}}$
c) $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

37 **a)** 2 **b)** 2 **c)** 10

38 Renés Behauptung ist falsch, weil z. B.:
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7 \neq \sqrt{16 + 9} = 5$

39 **1)** *1. Schritt*: 18 wird als Produkt von 9 und 2 geschrieben; *2. Schritt*: die Wurzel wird über jeden einzelnen Faktor geschrieben; *3. Schritt*: aus 9 wird die Wurzel gezogen
2) Das ist nicht zielführend, weil weder die Zahl 6 noch die Zahl 3 eine Quadratzahl ist und daher keine Wurzel gezogen werden kann.

40 **a)** $10\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $4\sqrt{2}$ **d)** $4\sqrt{3}$

41 **a)** $3\,a\sqrt{b}$ **b)** $5\,a^3\, b\sqrt{2\,b}$ **c)** $\sqrt{a}$ **d)** $\frac{b}{a\sqrt{2}}$
e) $a\,b\sqrt[3]{9\,a\,b^2}$ **f)** $2\,a\,b^2\sqrt{b}$

42 **a)** $5\sqrt{2\,a}$ **b)** $2\sqrt{\frac{a}{b}}$ **c)** $\frac{3\,a}{b}\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ **d)** $\frac{a}{2}\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^2}}$
e) $6\sqrt[4]{a^3\, b^2}$ **f)** $\frac{1}{a\,b}$

43 **a)** $\sqrt{3\,a^3}$ **b)** $\sqrt{a}$ **c)** $\sqrt{\frac{3\,a}{2}}$ **d)** $\sqrt{\frac{2}{a}}$
e) $\sqrt{\frac{a\,b}{3}}$ **f)** $\sqrt{\frac{2\,a}{5\,b}}$

44 **1)** *1. Schritt*: Die k-te Wurzel wird als Potenz mit einem Bruch im Exponenten geschrieben; *2. Schritt*: Das Gleiche wird mit der n-ten Wurzel gemacht; *3. Schritt*: die Rechenregel für das Potenzieren von Potenzen wird angewandt; *4. Schritt*: im Exponenten wird zusammengefasst; *5. Schritt*: Die Potenz wird wieder als Wurzel geschrieben
2) $k, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^+$, da die Potenz auf Seite 10 im Schulbuch für diese Zahlen definiert ist

45 **a)** $2\,a\sqrt[4]{b}$ **b)** $b\sqrt[4]{50\,a^3\, b^2}$ **c)** $2\,a\sqrt{b}$
d) $a\,b\sqrt[3]{a^2}$ **e)** $a\sqrt[6]{b^5}$ **f)** $a\,b\sqrt[4]{a\,b}$

46 **1)** Der Bruch wird mit $(5 + \sqrt{2})$ erweitert. Vereinfacht man den Nenner mithilfe einer binomischen Formel, so fällt die Wurzel weg.
2) Der Bruch wird mit $\sqrt{1 - x}$ erweitert. Dadurch fällt die Wurzel im Nenner weg:
$\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 - x} = (\sqrt{1 - x})^2 = 1 - x$

47 **a)** $2 + \sqrt{3}$ **b)** $\frac{15 - 5\sqrt{2}}{7}$ **c)** $\frac{-8 - 2\sqrt{5}}{11}$
d) $\frac{4\sqrt{2 + x}}{2 + x}$ **e)** $-\frac{x\sqrt{x - 3}}{x - 3}$ **f)** $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2 + x}$

48 Im Buch ausgeführt.

49 Im Buch ausgeführt.

50 **a)** $2 < \sqrt{8} < 3$ **b)** $4 < \sqrt{20} < 5$
c) $10 < \sqrt{113} < 11$ **d)** $8 < \sqrt{68} < 9$

51 **a)** $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ **b)** $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$
c) $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ **d)** $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$

52 **a)** $3^{\sqrt{3}} \approx 6{,}70$ **b)** $2^{\sqrt{5}} \approx 4{,}71$
c) $2^{\sqrt{7}} \approx 6{,}26$ **d)** $3^{\sqrt{10}} \approx 32{,}27$

53 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

54 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

55 ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

56 ☒ ☒ ☐ ☒ ☐

57 **a)** 1 **b)** $a^{2\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$
d) a^4 **e)** a^{π} **f)** a^6

58 **1)** *Potenzen mit Exponenten aus* $\mathbb{N}$*:*
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$; $a^0 = 1$

Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Z}$*:*
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Q}$*:*
$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$ für $a \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$

Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{R}$*:* Durch Einschränken der Hochzahl mithilfe von rationalen Zahlen lässt sich der Wert der Potenz näherungsweise berechnen.

2) Im Falle natürlicher Exponenten muss keine Einschränkung hinsichtlich der Basis getroffen werden. Jede beliebige reelle Zahl kann wiederholt mit sich selbst multipliziert werden.
Lässt man im Exponenten auch ganze Zahlen zu, so darf die Basis nicht 0 sein (vgl. Aufgabe **17**).
Für rationale Exponenten muss die Basis eine positive reelle Zahl sein, da aus negativen Zahlen (über der Grundmenge $\mathbb{R}$) keine Wurzel gezogen werden kann.

3) ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

59 Im Buch ausgeführt.

60 Im Buch ausgeführt.

61 Im Buch ausgeführt.

62 Im Buch ausgeführt.

63 **a)** $3 = \log_2 8$ **b)** $3 = \log_4 64$ **c)** $b = \log_a c$
d) $t = \log_s r$

64 **a)** $3^2 = 9$ **b)** $2^{-1} = 0{,}5$ **c)** $h^g = k$

65 **a)** 2; 3; 3 **b)** 3; -3; $\frac{3}{2}$
c) -2; -1; $\frac{2}{3}$ **d)** 3; -1; -3

66 **a)** $x = 32$ **b)** $x = \frac{1}{16}$ **c)** $x = \frac{1}{100}$ **d)** $x = 5$
e) $x = 3$ **f)** $x = 5$

67 D F A E

68 **a)** $x = 1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = -1$ **d)** $x = \frac{1}{2}$

69 **a)** $\log_a r = x \Leftrightarrow a^x = r$ und
$\log_a s = y \Leftrightarrow a^y = s$. Daraus folgt:
$\log_a \frac{r}{s} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a r - \log_a s$
b) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Daraus folgt:
$\log_a (b^c) = \log_a \left((a^x)^c\right) = \log_a (a^{xc}) = xc = c \cdot \log_a b$

70 **a)** $2\log 2 + 2\log a + 5\log b$
b) $\log 5 + 2\log a + 3\log b$
c) $3\log 2 + 4\log a + 2\log b$
d) $2\log 2 + 3\log a + 2\log(a+b)$
e) $\log 3 + 2\log 2 + 3\log a + 2\log(b-a)$
f) $2\log 2 + \log a + 3\log(a+2b)$

71 **a)** $5\log a + \log b - \log 3 - 2\log(a-b)$
b) $2\log(a+2b) - \log 2 - \log a - 3\log b$
c) $2\log 3 + 2\log b - 3\log(a-2b)$
d) $\log(a+b) - \log 2 - \frac{3}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b$
e) $\log(a+b) + \log(a-b) - \frac{1}{3}\log 3 - \frac{2}{3}\log b$
f) $\log 5 - \frac{1}{2}\log a - 2\log b - \log 2$

72 **a)** $\log\left(\frac{a^2}{(a+b)^3}\right)$ **b)** $\log\left((a+b)^4 \cdot 9a\right)$
c) $\log\left(\frac{(a-3)^{a+b}}{(2+b)^4}\right)$ **d)** $\log\left(2\sqrt{a}\,(a+b)^3\right)$
e) $\log\left(\frac{(6ab)^3}{\sqrt[3]{(a-2b)^2}}\right)$
f) $\log\left(2(a-b) \cdot b \cdot \sqrt{2(a-b)} \cdot \sqrt[3]{9a}\right)$

73 **a)** $\log_a a^2 + \log_a 1 = \log_a (a^2 \cdot 1) = \log_a a^2 = 2$
b) $\log_a a^2 - \log_a a^{-2} = \log_a \left(\frac{a^2}{a^{-2}}\right) = \log_a a^4 = 4$
c) $\log_a a^3 + \log_a \left(\frac{1}{a^2}\right) = \log_a \left(a^3 \cdot \frac{1}{a^2}\right) = \log_a a = 1$
d) $\log_{a+1}(a^2 + 2a + 1) = \log_{a+1}(a+1)^2 = 2$

74 **a)** $\frac{\lg 81}{\lg 3} = 4$ **b)** $\frac{\lg \frac{1}{243}}{\lg 5} = -\frac{\lg 243}{\lg 5} \approx -3{,}4$
c) $\frac{\lg \frac{1}{225}}{\lg 5} = -\frac{\lg 225}{\lg 5} \approx -3{,}4$ **d)** $\frac{\lg \frac{1}{625}}{\lg 5} = -\frac{\lg 625}{\lg 5} = -4$
e) $\frac{\lg 65\,536}{\lg 16} = 4$ **f)** $\frac{\lg \frac{1}{4\,096}}{\lg 16} = -\frac{\lg 4\,096}{\lg 16} = -3$

75 **a)** $x = \frac{\lg 40}{\lg 4} \approx 2{,}66$ **b)** $x = \frac{\lg 400}{2 \cdot \lg 1{,}03} \approx 101{,}35$
c) $x = -\frac{\lg 0{,}008}{\lg 5} = 3$ **d)** $x = -\frac{\lg 0{,}5}{3 \cdot \lg 0{,}5} = -\frac{1}{3}$

76 *1. Schritt*: Die Zahl 9 wird als Potenz umgeschrieben; *2. Schritt*: Das Rechengesetz $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ wird auf beiden Seiten angewendet; *3. Schritt*: auf der rechten und linken Seite ist die gleiche Basis, daher können die Hochzahlen miteinander verglichen werden;
4. Schritt: die Gleichung kann durch Äquivalenzumformungen gelöst werden

77 **a)** $x = \frac{8}{3}$ **b)** $x = \frac{3}{2}$ **c)** $x = \frac{1}{3}$ **d)** $x = 2$

78 *1. Schritt*: Beide Seiten werden logarithmiert; *2. Schritt*: Es wird das Rechengesetz $\log_a (r^c) = c \cdot \log_a r$ angewendet; *3. Schritt*: Die Klammer auf der rechten Seite wird ausmultipliziert; *4. Schritt*: Es wird die Äquivalenzumformung $-x \cdot \lg 3$ angewendet und auf der linken Seite x herausgehoben; *5. Schritt*: Die Gleichung wird durch Division gelöst

79 **a)** $x \approx 10{,}84$ **b)** $x \approx 1{,}51$ **c)** $x \approx -6{,}37$
d) $x = 0$

80 Tim sollte sich die Variante von Bsp. **78** merken, denn sie funktioniert für diese Art von Aufgaben immer. Die andere Variante funktioniert nur bei gleicher Basis.

81 Im Buch ausgeführt.

82 Im Buch ausgeführt.

83 Im Buch ausgeführt.

84 **1)** $2^5 = 32$ Vorfahren
2) $2^{70} \approx 1{,}2 \cdot 10^{21}$
Das Resultat ist nicht sinnvoll, da es größer ist als die derzeitige Weltbevölkerung.

85 Es bräuchte dafür nur 21 Schritte $\left(x = \frac{\lg(7{,}5 \cdot 10^9)}{\lg 3}\right)$.

86 **a)** rund 10 730 Personen
b) ca. 2,45 %; Da die 0,5 % jedes Jahr von einem neuen (Grund-)Wert berechnet werden, führt die Rechnung 0,5 % · 5 = 2,5 % nicht zum richtigen Ergebnis.

87 **a)** **1)** 3183,62 € **2)** nach ca. 35 Jahren
b) **1)** 512,10 € **2)** nach ca. 87 Jahren
c) **1)** 52 283,92 € **2)** nach ca. 47 Jahren
d) **1)** 50 225,34 € **2)** nach ca. 462 Jahren

88 $K_0 \cdot q^x = 2 \cdot K_0 \quad | : K_0$
$q^x = 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log q}$

89 **1)** Maria hat nach fünf Jahren 46 370,96 €. Die Summe ist um rund 15,9 % gestiegen.
2) Das wird ca. $7\frac{1}{2}$ Jahre dauern.

90 **a)** Der Zinssatz müsste höher sein als 2,53 %.
b) Die durchschnittliche Wachstumsrate in den beiden letzten Jahren war nur 1,1 %.

91 **1)** Der durchschnittliche jährliche Zuwachs betrug rund 2,4 %.
2) Anfang 2016 lebten ca. 42 915 Menschen in der Gemeinde.
3) Im Jahr 2023 hat die Gemeinde mehr als 50 000 Einwohner (nach 4,44 Jahren).

92 **1)** Hubert trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,6 % ($0{,}75^4$) nie und mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,4 % ($1 - 0{,}75^4$) mindestens einmal.
2) Die Wahrscheinlichkeit, dass man auf die Zielscheibe trifft, müsste dazu rund 21 % sein ($1 - x^5 = 0,7$).
3) Er muss dazu mindestens 10-mal schießen
($1 - 0{,}6 = 0{,}99$).

93 **1)** Das Papier wäre dann ungefähr 536,87 km dick.
2) Das Papier müsste dazu rund 48-mal gefaltet werden.

94 Im Buch ausgeführt.

95 **a)** $-\frac{1}{3a^7b^4}$ **b)** $-16y^5$ **c)** $\frac{243d^5}{400c^6}$ **d)** $-\frac{k \cdot m}{2}$

96 Im Buch ausgeführt.

97 Im Buch ausgeführt.

98 **a)** $4\sqrt{2}$ **b)** $3x\sqrt{2}$ **c)** x^2 **d)** $4x^4$

99 Im Buch ausgeführt.

100 Im Buch ausgeführt.

101 **a)** $\approx 1{,}86$ **b)** $\approx 2{,}01$ **c)** $\approx 2{,}97$
d) $\approx 1{,}16$

102 **a)** $x \approx 1{,}57$ **b)** $x \approx 2{,}01$ **c)** $x \approx 2{,}63$
d) $x \approx 3{,}98$

103 **a)** ☐ ☐ ☒ ☒ ☒ **b)** ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

104 **a)** ☒ ☐ ☒ ☐ ☐ **b)** ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

105 **a)** $\boxed{A}$ $\boxed{E}$ $\boxed{D}$ $\boxed{F}$ **b)** $\boxed{D}$ $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{E}$

106 $x^2 = x \cdot x$ und $2^x = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{x\text{-mal}}$;
1. Gleichung: $x = \pm 8$; *2. Gleichung*: $x = 6$

107 **a)** k-te Wurzel aus a^n; z. B.:
$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$; $a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$; $a^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{a^8}$
b) k-te Wurzel aus 1 durch a^n; z. B.:
$a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a^3}}$; $a^{-\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^7}}$; $a^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a^5}}$

108 6; $2^6 = 64$

109 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

110 **1)** z. B.: $a = 0{,}5$ oder $a = -2$
2) Die Behauptung ist nur richtig für $a > 1$, denn multipliziert man eine Zahl $a > 1$ wiederholt mit sich selbst, so wird das Ergebnis größer.

111 a) $\sqrt{(a\,b)^4} = (a\,b)^2$, da $\sqrt{(a\,b)^4} = (a\,b)^{\frac{4}{2}} = (a\,b)^2$;
$b\sqrt{(a\,b)^2} = a\,b^2$, da $b\sqrt{(a\,b)^2} = b \cdot (a\,b) = a\,b^2$;
$\sqrt{a^2\,b^2} = a\,b$, da $\sqrt{a^2\,b^2} = \sqrt{(a\,b)^2} = a\,b$
b) $\sqrt{(a-b)^4} = (a-b)^2$,
da $\sqrt{(a-b)^4} = (a-b)^{\frac{4}{2}} = (a-b)^2$;
$a - \sqrt{b^2} = a - b$, da $a - \sqrt{b^2} = a - b^{\frac{2}{2}} = a - b$;
$a^2 - \sqrt{b^4} = a^2 - b^2$, da $a^2 - \sqrt{b^4} = a^2 - b^{\frac{4}{2}} = a^2 - b^2$

112 1) In jedem der vier Fälle wird auf *andere* (bereits bekannte) Definitionen und Rechenregeln zurückgegriffen, z. B.:
1. Fall: Definition von Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Z}^+$, Rechenregel zum Multiplizieren von Potenzen mit natürlichen Potenzen
2. Fall: Definition von Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Z}^+$ und $\mathbb{Z}^-$, Rechenregel zum Dividieren von Potenzen mit natürlichen Exponenten
2) *1. Schritt*: Wenn k und n negative Zahlen sind, dann sind die Zahlen $-k$ und $-n$ positiv. Diese werden hier l und m benannt. *2. Schritt*: $-l$ und $-m$ wird für k und n eingesetzt; *3. Schritt*: Es wird die Definition für negative Hochzahlen verwendet; *4. Schritt*: Alles wird auf einen Bruchstrich geschrieben; *5. Schritt*: Nachdem l und m positiv sind, kann das Rechengesetz für Potenzen mit natürlichen Exponenten angewendet werden: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$; *6. Schritt*: Der Bruch kann wieder als Potenz mit negativer Hochzahl angeschrieben werden; *7. Schritt*: Das Vorzeichen vor der Klammer wird aufgelöst; *8. Schritt*: $-l = k$ und $-m = n$ wird eingesetzt
3) $a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n}$

113 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}$

114 $0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0}$
Die Division durch 0 ist nicht definiert.

115 Wenn $\sqrt{50}$ das Gleiche ist wie $5 \cdot \sqrt{2}$, dann muss 0 herauskommen, wenn man $\sqrt{50} - 5 \cdot \sqrt{2}$ in den Taschenrechner eingibt. Mit dieser Methode kann Jakob ganz leicht überprüfen, ob zwei Terme gleich sind.

116 *1. Schritt*: Umschreiben der Wurzel als Potenz; *2. Schritt*: Die Potenz eines Produktes ist das Produkt der Potenzen; *3. Schritt*: Die Rechenregeln für das Potenzieren von Potenzen werden angewendet, die Potenzen werden dabei multipliziert; *4. Schritt*: durch das inverse Element der Multiplikation ist $k \cdot \frac{1}{k} = 1$; *5. Schritt*: Umschreiben der Potenz als Wurzel;
Voraussetzungen: $a, b \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$

117 a) Richtig, z. B.: $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$
b) Falsch, denn z. B.: $\sqrt{9} + \sqrt{4} \neq \sqrt{13}$

118 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a} + b > a + b$
$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$; Die Summe der Wurzeln ist größer als die Wurzel der Summen.

119 $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

120 $a^{\log_a n} = x \Rightarrow \log_a a^{\log_a n} = \log_a x$
$\Rightarrow \log_a n = \log_a x \Rightarrow n = x \Rightarrow a^{\log_a n} = n$

121 1) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$, $c \neq 1$
2) *1. Schritt*: Verwenden der Definition des Logarithmus; *2. Schritt*: auf beiden Seiten wird logarithmiert; *3. Schritt*: Die Rechenregel für den Logarithmus wird verwendet, der Exponent wird zum Faktor; *4. Schritt*: auf beiden Seiten wird durch $\log_a c$ dividiert

122 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

123 multipliziert; addiert

124 ☒ ☐ ☒ ☐ ☒

125 $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ $\boxed{B}$

126 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

127 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

128 $\boxed{C}$ $\boxed{E}$ $\boxed{A}$ $\boxed{F}$

129 ☐ ☐ ☒ ☒ ☒

130 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

131 $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{E}$

132 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

133 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

134 Nach 7 Jahren wurde ein Geldbetrag von 2 500 € mit einem Zinssatz von 3 % erreicht.

135 a) $n_0 \approx 45\,\text{mol} \approx 2{,}7 \cdot 10^{25}$;
$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{8{,}3 \cdot 273{,}15}{101\,325}$
$\Rightarrow V \approx 0{,}0224\,\text{m}^3 = 22{,}4\,\text{dm}^3$
b) $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$; $p \cdot V^{\kappa} = p \cdot V \cdot V^{\kappa-1} = n \cdot R \cdot \overbrace{T \cdot V^{\kappa-1}}^{\text{konstant}}$
$\Rightarrow p \cdot V^{\kappa}$ ist konstant, da auch R eine Konstante ist und sich die Gasmenge n nicht ändert;
Die Luft erwärmt sich auf rund 285 °C (558 K).

c) Der Ausdruck ist positiv, da $\frac{n_1+n_2}{n_1} = 1 + \frac{n_2}{n_1} > 1$ und $\frac{n_1+n_2}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} + 1 > 1$ und da der Logarithmus einer Zahl größer als 1 positiv ist. Somit ist der ganze Ausdruck positiv;

$R \cdot \left(n_1 \cdot \ln \frac{n_1+n_2}{n_1} + n_2 \cdot \ln \frac{n_1+n_2}{n_2}\right) =$

$= R \cdot \left(n_1 \cdot \ln \frac{n_1+2\,n_1}{n_1} + 2\,n_1 \cdot \ln \frac{n_1+2\,n_1}{2\,n_1}\right) =$

$= R \cdot \left(n_1 \cdot \ln 3 + 2\,n_1 \cdot \ln \frac{3}{2}\right) =$

$\left[n = n_1 + n_2 \Rightarrow n = n_1 + 2\,n_1 \Rightarrow n = 3\,n_1 \Rightarrow n_1 = \frac{n}{3}\right]$

$= R \cdot \left(\frac{n}{3} \cdot \ln 3 + \frac{2n}{3} \cdot \ln \frac{3}{2}\right) = n \cdot R \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \ln 3 + \frac{2}{3} \cdot \ln \frac{3}{2}\right) =$

$= n \cdot R \cdot \left(\ln \left(3^{\frac{1}{3}}\right) + \ln \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = n \cdot R \cdot \ln \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) =$

$= n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right) =$

$= n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}\right) = n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{2}\right) =$

$= n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$

136 a) $p = 10^{\lg 2 - 0{,}5}\,\text{Pa} \approx 0{,}63\,\text{Pa}$;
$L_p = 10\,\lg\left(\frac{(8 \cdot 0{,}63)^2}{(2 \cdot 10^{-5})^2}\right)\,\text{dB} \approx 108{,}03\,\text{dB}$

b) $L_p = 106\,\text{dB}$ ($p = 20\,\text{Pa}$); in ca. 25,3 km

c) Halbierung des Abstandes zur Schallquelle:
Verdoppelung des Schalldrucks auf $2\,p$;

$L_p = 10\,\lg\left(\frac{(2\,p)^2}{p_0^2}\right) - 10\,\lg\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right) =$

$= 20\,\lg\left(\frac{2\,p}{p_0}\right) - 20\,\lg\left(\frac{p}{p_0}\right) =$

$= 20\,\lg 2 + 20\,\lg p - 20\,\lg p_0 - 20\,\lg p + 20\,\lg p_0 =$

$= 20\,\lg 2 \approx 6$;

bei der $\sqrt{10}$-fachen Entfernung, also ca. bei der 3,2-fachen Entfernung

Thema: Geschichte der Rechenhilfen

T1 a) aus dem lateinischen „abacus“ und aus dem griechischen „αβαχ“; Bedeutung: Tafel oder Brett
b) zwischen 2700 und 2300 v. Chr. in Sumer (zwischen Bagdad und persischem Golf)
c) über 2 300 Jahre (Salaminische Tafel)
d) z. B.: in China in kleinen Geschäften

T2 a) z. B. im Nahen Osten 8000 bis 3000 v. Chr. oder bei den Griechen und Römern
b) Calculus; die Begriffe „kalkulieren“ und „Kalkül“ leiten sich daraus ab

T3 Der Abakus besteht aus einem Rahmen mit Stäben, auf dem Kugeln aufgefädelt sind. Die Kugeln stellen dabei durch ihre Lage eine bestimmte Zahl im Stellenwertsystem dar. Zum Beispiel sind die Kugeln in der untersten Zeile die Einer, die Kugeln in der Zeile darüber die Zehner, die Kugeln darüber die Hunderter etc. Durch Verschieben der jeweiligen Kugeln nach rechts oder links können daher auch sehr große Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden oder es kann die Wurzel gezogen werden.

T4 Rechercheaufgabe

T5 *Abakus*: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Wurzelziehen (Quadrat- und Kubikwurzel);
Rechenschieber: Multiplikation, Division, Berechnung von Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Kehrwerte, Logarithmen, Winkelberechnungen, Addition und Subtraktion funktioniert auch, ist aber etwas umständlicher

T6 Rechercheaufgabe

T7 a) Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division;
im 18. Jh. von Anton Braun und Philipp Matthäus Hahn
b) schnelle Addition vieler Zahlen, auch Subtraktion;
1623 von Wilhelm Schickard

T8 Rechercheaufgabe

2. Ungleichungen

137 Im Buch ausgeführt.

138 Im Buch ausgeführt.

139 Im Buch ausgeführt.

140 **a)** x … Länge des Weges in km; $x < 3$
b) x … Kochzeit in min; $x \leq 10$
c) x … Alkoholgehalt in %; $x \geq 9{,}5$
d) k … Größe von Kia, c … Größe von Christa,
l … Größe von Leo; $k \leq c$, $k > l$

141 x … Anzahl der gefahrenen Kilometer;
$(99 + 0{,}04\,x) + 20 \leq 0{,}08\,x$

142 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

143 **a)** nicht äquivalent, da sie unterschiedliche Lösungsmengen besitzen ($\left(\frac{4}{15}; \infty\right)$ und $(4; \infty)$)
b) äquivalent, da sie die gleiche Lösungsmenge besitzen ($(-\infty; -4)$)
c) nicht äquivalent, da sie unterschiedliche Lösungsmengen besitzen ($(-\infty; 14]$ und $(-\infty; 14)$)
d) äquivalent, da sie die gleiche Lösungsmenge besitzen ($\left[\frac{1}{16}; \infty\right)$)

144 **a)** z. B. ist $x = -5$ eine Lösung von der zweiten Gleichung ($-5 < 3$), aber nicht von der ersten Gleichung ($(-5)^2 < 9$ ist falsch). Daher sind die Ungleichungen nicht äquivalent.
b) z. B. ist $x = -4$ eine Lösung von der ersten Gleichung ($(-4)^2 - (-4) \geq 0$), aber nicht von der zweiten Gleichung ($-4 - 1 \geq 0$ ist falsch). Daher sind die Ungleichungen nicht äquivalent.

145 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\} = (-\infty; 6)$
b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{15}{2}\right\} = \left(-\frac{15}{2}; \infty\right)$
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} = (-\infty; 2]$
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 15\} = [15; \infty)$

146 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3; \infty)$
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = (-\infty; 5]$
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -18\} = (-18; \infty)$
d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4}{5}\right\} = \left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$

147 A B D F

148 Für ein Datenvolumen kleiner als 2,4 Gigabite ist Tarif A der günstigere.

149 **1)** Nach 4 Jahren sind die Sträucher vom Typ B größer ($50 + 10\,x < 30 + 15\,x$).
2) Der Strauchtyp B erreicht schneller die Höhe von 1,6 m.

150 Isabell legt in t Stunden nach ihrer Abfahrt einen Weg von $12\,t$ Kilometer zurück, Joachim nach der selben Zeit einen Weg von $30\,t - 6$ Kilometer.
Da er 12 min = 0,2 h später gestartet ist, müssen von seinem Weg $30 \cdot 0{,}2 = 6$ Kilometer abgezogen werden.
Joachim hat seine Schwester nach einer drittel Stunde überholt.

151 **a)** $1 < m < 9{,}3$ **b)** $d \leq 5{,}9$
c) $-2 \leq y < 2$ **d)** $6{,}8 \leq c$ **e)** $2{,}5 \leq f \leq 3{,}5$
f) $9{,}01 \leq e \leq 9{,}03$ **g)** $128 \leq a \leq 132$
h) $4\,106{,}6 \leq q \leq 4\,111{,}4$

152 $4\,929 \leq A \leq 5\,071{,}5$; $147{,}3 \leq c \leq 149{,}5$

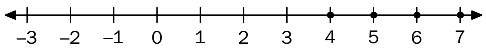
153 **1)** $10{,}433 \leq v \leq 10{,}444$;
Es ergibt sich eine Unsicherheit von 0,0055 m/s.
2) Es ergibt sich eine Unsicherheit von 0,001 s.
Hinweis: Die Geschwindigkeit v kann als fix angenommen werden.

154 Im Buch ausgeführt.

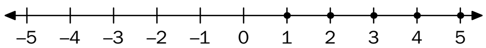
155 Im Buch ausgeführt.

156 A F B C

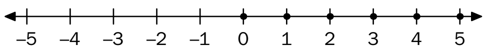
157 **a)**



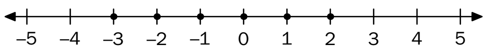
b)



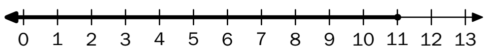
c)



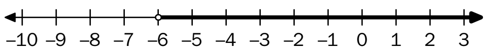
d)



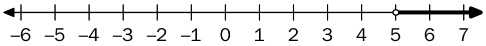
158 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 11\} = (-\infty; 11]$



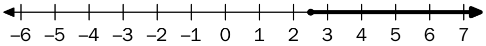
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -6\} = (-6; \infty)$



c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5; \infty)$

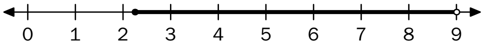


d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\} = \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$

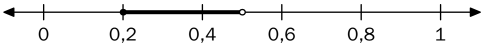


159 B C D F

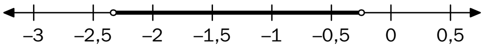
160 a) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{4} \leq x < 9\right\} = \left[\frac{9}{4}; 9\right)$



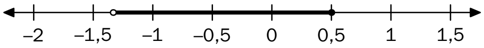
b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$



c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} < x < -\frac{1}{4}\right\} = \left(-\frac{7}{3}; -\frac{1}{4}\right)$

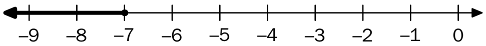


d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x \leq \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right]$

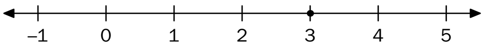


161 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

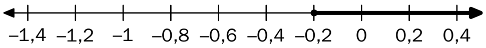
162 a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\} = (-\infty; -7]$



b) $\mathbb{L} = \{3\}$



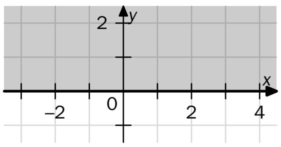
c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{5}\right\} = \left[-\frac{1}{5}; \infty\right)$



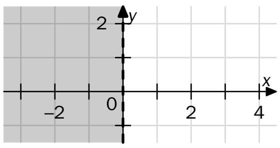
d) $\mathbb{L} = \emptyset$

163 Die beiden Gleichungen unterscheiden sich durch das Relationszeichen: In der ersten Gleichung $>$ und in der zweiten Gleichung $\geq$. Daher ist in der ersten Grafik die Gerade strichliert – sie gehört nicht zur Lösungsmenge. In der zweiten Grafik ist die Gerade durchgehend – sie gehört zur Lösungsmenge.

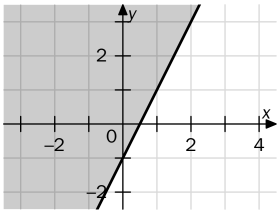
164 a)



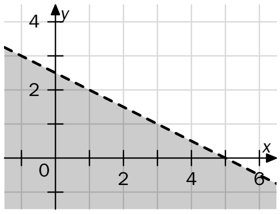
b)



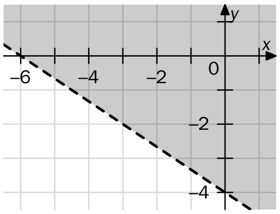
c)



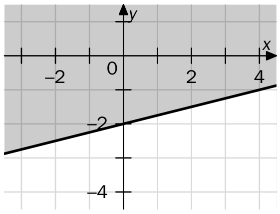
d)



e)



f)

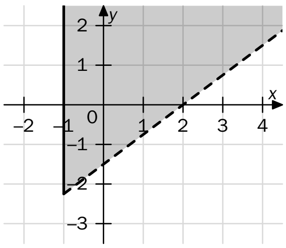


165 B C
A E

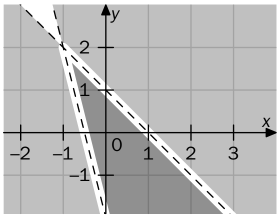
166 a) $r < -4$ **b)** $r > 7$ **c)** $r > 10$ **d)** $r < 3$

167 1) $x \geq -1$; $3x - 4y < 6$

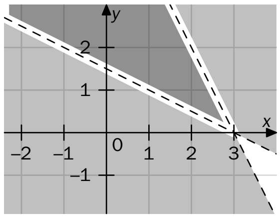
2)



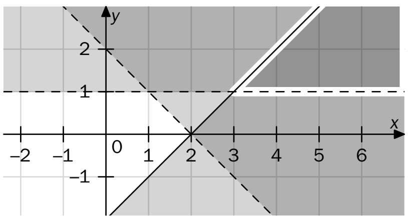
168 a)



b)



c)



169 Im Buch ausgeführt.

170 Im Buch ausgeführt.

171 **1)** ***1. Ungleichung***: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 - a\}$;
2. Ungleichung:
1. Fall: für $a > 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{1}{a}\right\}$,
2. Fall: für $a = 0$ ist $\mathbb{L} = \emptyset$,
3. Fall: für $a < 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{1}{a}\right\}$

2) Bei der ersten Ungleichung muss beim Lösen nur die Äquivalenzumformung $-a$ durchgeführt werden. Bei der zweiten Ungleichung muss durch a dividiert werden. Weil man nicht weiß, ob a positiv oder negativ ist, müssen beide Fälle berücksichtigt werden. In einem Fall muss also das Relationszeichen umgedreht werden.

172 ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

173 **a)** *1. Fall*: für $b < \frac{4}{5}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{9}{4-5b}\right\}$,
2. Fall: für $b = \frac{4}{5}$ ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$,
3. Fall: für $b > \frac{4}{5}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{9}{4-5b}\right\}$
b) 1. Fall: für $b > 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{18}{b}\right\}$,
2. Fall: für $b = 0$ ist $\mathbb{L} = \emptyset$,
3. Fall: für $b < 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{18}{b}\right\}$
c) 1. Fall: für $b < \frac{3}{2}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le \frac{4b}{3-2b}\right\}$,
2. Fall: für $b = \frac{3}{2}$ ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$,
3. Fall: für $b > \frac{3}{2}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge \frac{4b}{3-2b}\right\}$
d) 1. Fall: für $b > -3$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge -\frac{2}{3+b}\right\}$,
2. Fall: für $b = -3$ ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$,
3. Fall: für $b < -3$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le -\frac{2}{3+b}\right\}$
e) 1. Fall: für $b > 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{53}{2b}\right\}$,
2. Fall: für $b = 0$ ist $\mathbb{L} = \emptyset$,
3. Fall: für $b < 0$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{53}{2b}\right\}$
f) 1. Fall: für $b < \frac{1}{2}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{25}{2-4b}\right\}$,
2. Fall: für $b = \frac{1}{2}$ ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$,
3. Fall: für $b > \frac{1}{2}$ ist $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{25}{2-4b}\right\}$

174 $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{F}$

175 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9 \lor x < 1\}$
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 4\}$
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 3 \lor x \le -5\}$
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x \le -2\}$

176 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

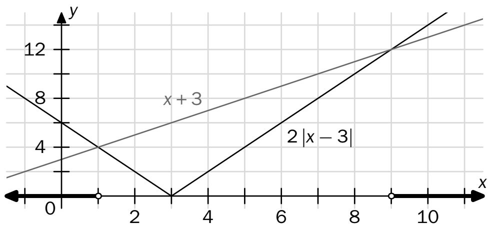
177 ***1. Gleichung***: *1. Schritt*: Wie in der ersten Grafik gezeigt, liegt der Wert des Betrages zwischen $-a$ und a, daher im dargestellten Fall zwischen -2 und 2; *2. Schritt*: Mit der Äquivalenzumformung -5, die auf der linken und rechten Seite und in der Mitte angewendet wird, kann die Ungleichungskette vereinfacht werden; *3. Schritt*: Man erhält die Lösung $-7 \le x \le -3$;

2. Gleichung: *1. Schritt*: Wie in der zweiten Grafik gezeigt, liegt der Wert des Betrages unterhalb von $-a$ und oberhalb von a, daher im dargestellten Fall unterhalb von -5 und oberhalb von 5; *2. Schritt*: Auf beiden Seiten wird die Äquivalenzumformung -1 durchgeführt; *3. Schritt*: Auf beiden Seiten wird die Äquivalenzumformung $:4$ durchgeführt; *4. Schritt*: Man erhält die Lösung $x < -1{,}5$ und $x > 1$

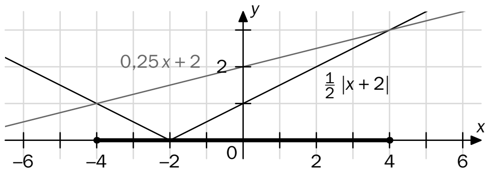
178 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x < 41\}$
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \lor x > 6\}$
c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge 2 \lor x \le -\frac{14}{5}\right\}$
d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{10}{3} \le x \le \frac{8}{3}\right\}$

179 **a)** **1)** $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [2; 6]$
2) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 6\}$
b) **1)** $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus (0; 2)$
2) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

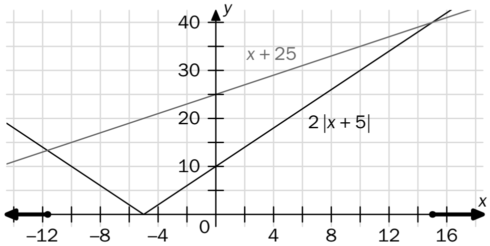
180 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \lor x > 9\}$



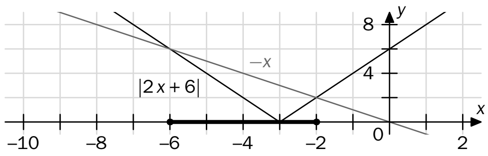
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 4\}$



c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge 15 \lor x \le -\frac{35}{3}\right\}$



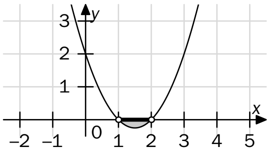
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x \le -2\}$



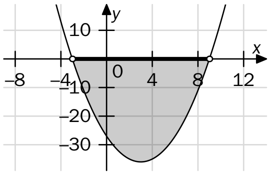
181 Im Buch ausgeführt.

182 Im Buch ausgeführt.

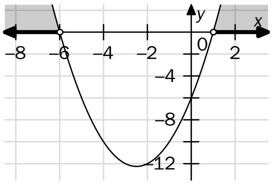
183 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} = (1; 2)$



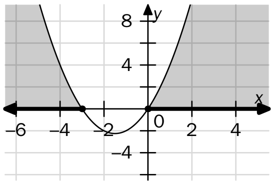
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 9\} = (-3; 9)$



c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \lor x > 1\} = (-\infty; -6) \cup (1; \infty)$



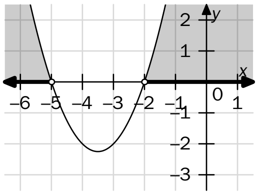
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \lor x \geq 0\} = (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$



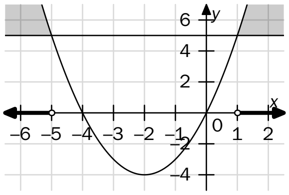
184 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > -2\} =$
$= (-\infty; -5) \cup (-2; \infty)$
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1\} = [-4; 1]$
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -7\} = (-9; -7)$
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -9 \lor x \geq -7\} =$
$= (-\infty; -9] \cup [-7; \infty)$
e) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > -3\} =$
$= (-\infty; -5) \cup (-3; \infty)$
f) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -2\} = [-7; -2]$
g) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 7\} = (-6; 7)$
h) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \lor x > 7\} = (-\infty; 5) \cup (7; \infty)$

185 **a)** **1)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} = [-2; 1]$
2) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \lor x > 1\} = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
b) **1)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8 \lor x \geq 0\} =$
$= (-\infty; -8] \cup [0; \infty)$
2) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8 \lor x > 0\} = (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$

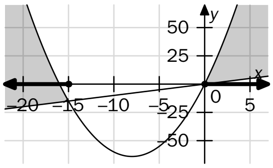
186 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > -2\} = (-\infty; -5) \cup (-2; \infty)$



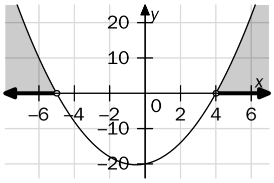
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > 1\} = (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$



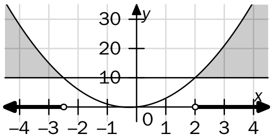
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -15 \lor x \geq 0\} = (-\infty; -15] \cup [0; \infty)$



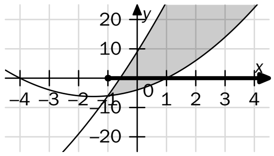
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > 4\} = (-\infty; -5) \cup (4; \infty)$



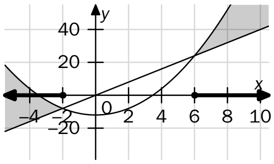
187 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2{,}5 \lor x > 2\} = (-\infty; -2{,}5) \cup (2; \infty)$



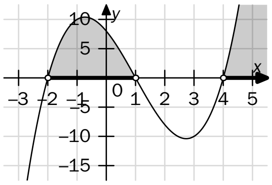
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = [-1; \infty)$



c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \lor x \geq 6\} = (-\infty; -2] \cup [6; \infty)$



d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \lor x > 4\} = (-2; 1) \cup (4; \infty)$



188 *1. Lösungsvariante*: Grafische Darstellung der beiden Funktionen, deren Funktionsterm durch $T_L(x)$ und $T_R(x)$ gegeben ist; Bestimmen der Schnittpunkte der Funktionsgraphen; Ablesen, für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $T_L(x) < T_R(x)$
2. Lösungsvariante: Zusammenfassen von T_L und T_R

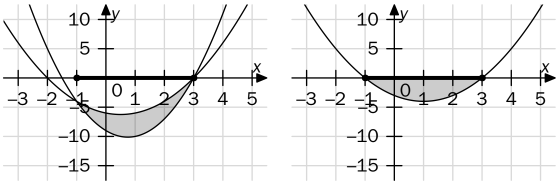
$$T_L(x) < T_R(x) \quad | - T_R(x)$$
$$T_L(x) - T_R(x) < 0$$

Grafische Darstellung jener Funktion, deren Funktionsterm durch $T_L(x) - T_R(x)$ gegeben ist; Bestimmen der Nullstellen des Funktionsgraphen; Ablesen, für welche $x \in \mathbb{R}$ der Funktionswert negativ ist
Fazit: Die 1. Variante ist anschaulicher, da die grafische Darstellung sofort mit der Angabe in Beziehung gesetzt werden kann. Durch die isolierte Betrachtung der beiden Seiten werden jedoch mögliche *Synergieeffekte* übersehen, wie das folgende Beispiel zeigt:

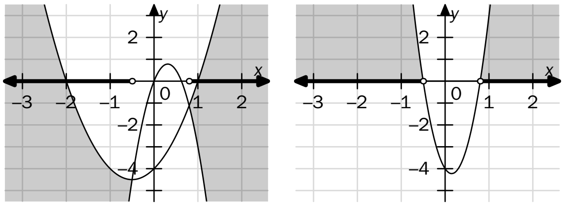
$$x^3 + 2x^2 + 3x < x^3 + 2x^2 + x + 4 \quad | - x^3 - 2x^2 - x$$
$$2x < 4 \quad | : 2$$
$$x < 2$$

Außerdem ist die 1. Lösungsvariante ohne den Einsatz entsprechender Technologie in der Regel aufwendiger.

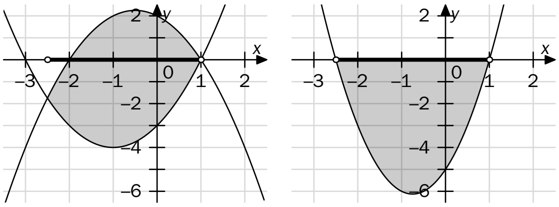
189 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\} = [-1; 3]$



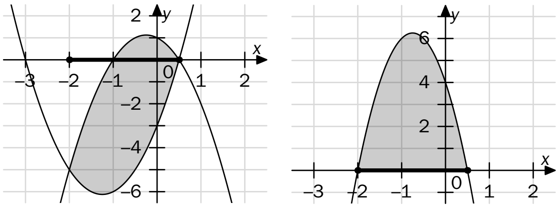
b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -\frac{1}{2} \ \lor \ x > \frac{4}{5}\right\} =$
$= \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; \infty\right)$



c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{5}{2} < x < 1\right\} = \left(-\frac{5}{2}; 1\right)$



d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \le x \le \frac{1}{2}\right\} = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$



190 **1)** Die Firma erzielt Gewinn bei zwischen 40 und 100 Stück: $40 < x < 100$
2) Die Lösung ist genau gleich wie in **1)**.
3) $G = E - K$

191 Im Buch ausgeführt.

192 Im Buch ausgeführt.

193 Im Buch ausgeführt.

194 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 2\} = (-5; 2)$
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\} = (1; 4)$
c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le -\frac{1}{2} \ \lor \ x \ge 5\right\} =$
$= \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; \infty)$
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \ \lor \ x > 3\} =$
$= (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$

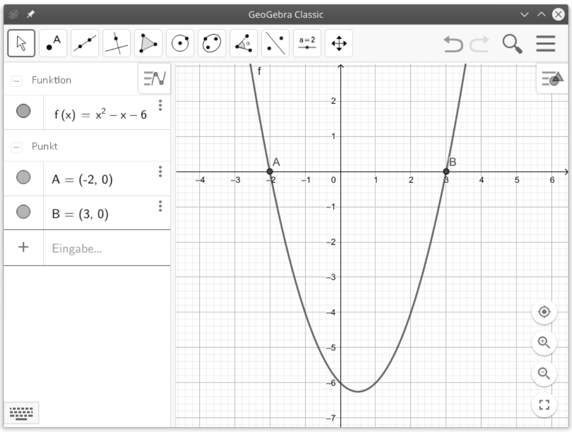
195 **a)** $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{2} < x < \frac{17}{2}\right\} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{17}{2}\right)$
b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{1}{4} \ \lor \ x > 2\right\} =$
$= \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (2; \infty)$
c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{12}{11} \ \lor \ x > \frac{12}{7}\right\} =$
$= \left(-\infty; \frac{12}{11}\right) \cup \left(\frac{12}{7}; \infty\right)$
d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{19}{5}\right\} = \left(\frac{19}{5}; \infty\right)$

196 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \ \lor \ x > 4\} =$
$= (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$
b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{4} < x < 0\right\} = \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$
c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{20}{7} < x < 5\right\} = \left(\frac{20}{7}; 5\right)$
d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le -\frac{8}{3} \ \lor \ x > -\frac{8}{5}\right\} =$
$= \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup \left(-\frac{8}{5}; \infty\right)$
e) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} = (2; 3)$
f) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{11}{4} \le x < -\frac{5}{2}\right\} = \left[-\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}\right)$

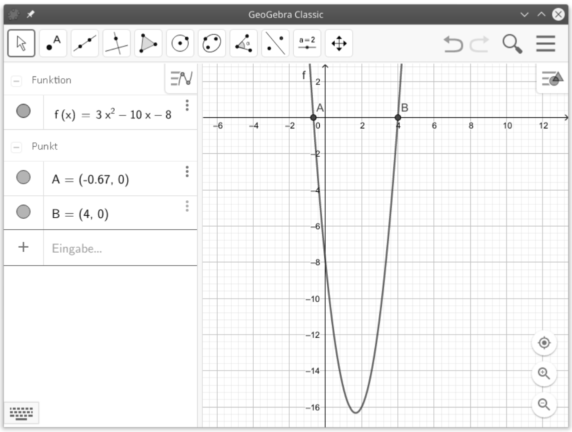
197 Im Buch ausgeführt.

198 Im Buch ausgeführt.

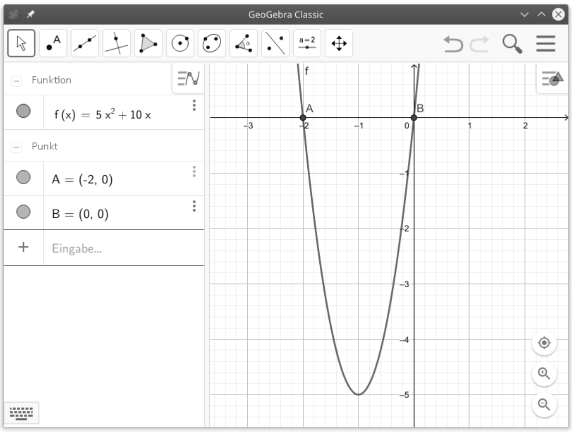
199 **a)** $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2 \ \lor \ x \ge 3\} =$
$= (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$



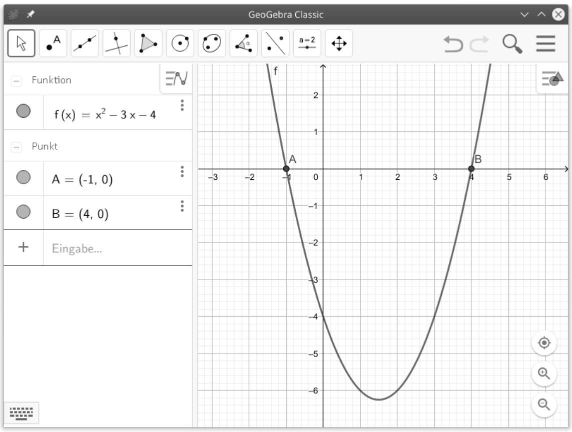
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -0{,}67 \ \lor \ x > 4\} =$
$= (-\infty; -0{,}67) \cup (4; \infty)$



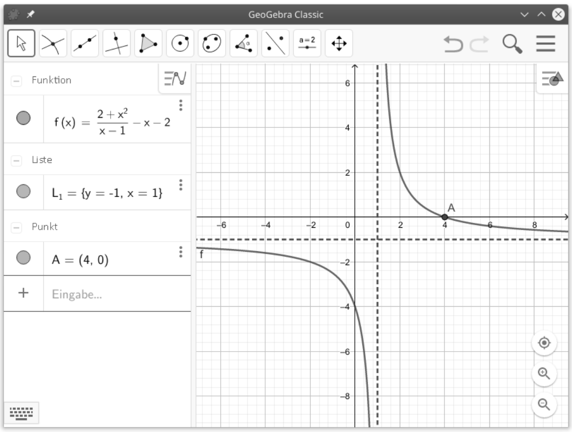
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\} = (-2; 0)$



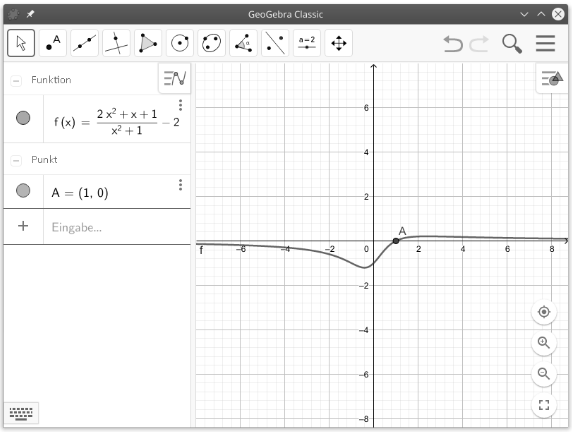
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\} = (-1; 4)$



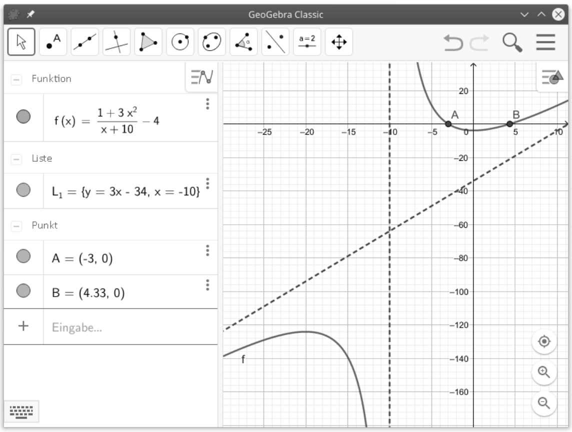
200 a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \ \vee \ x > 4\} =$
$= (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$



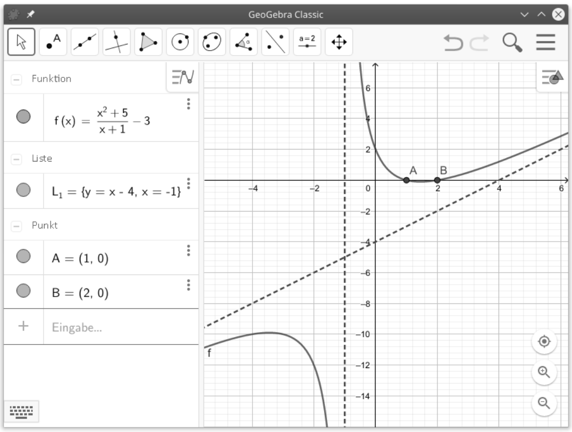
b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty; 1)$



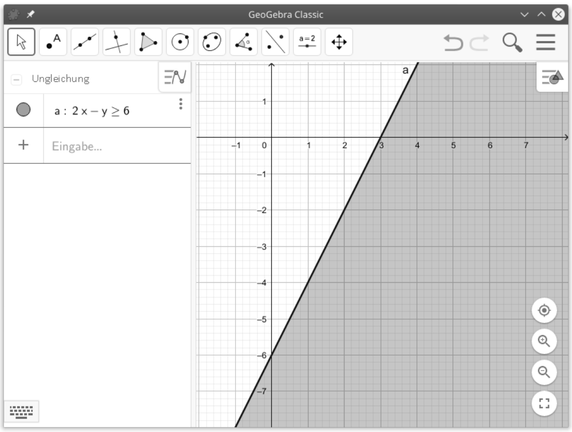
c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < -3 \ \vee \ x > 4{,}33\} =$
$= (-10; -3) \cup (4{,}33, \infty)$



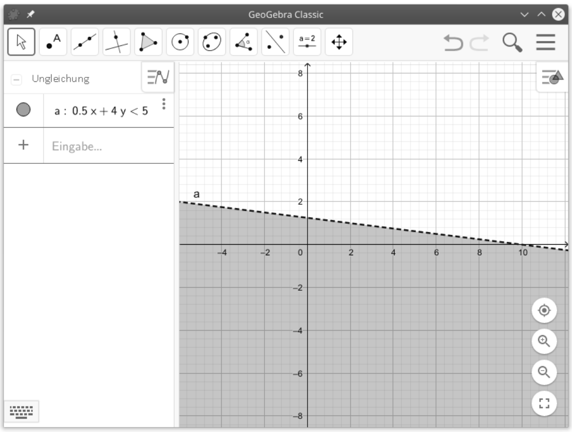
d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \ \vee \ x > 2\} =$
$= (-1; 1) \cup (2; \infty)$



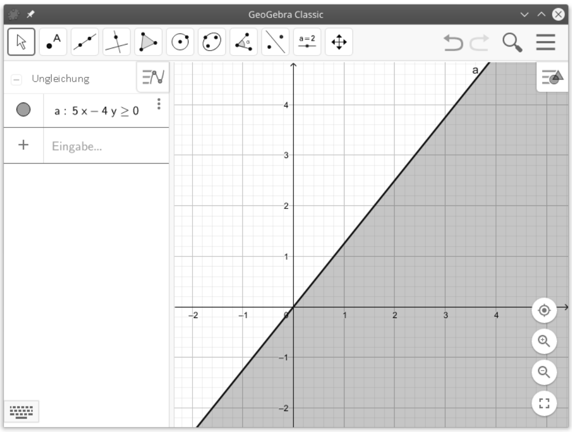
201 **a)**



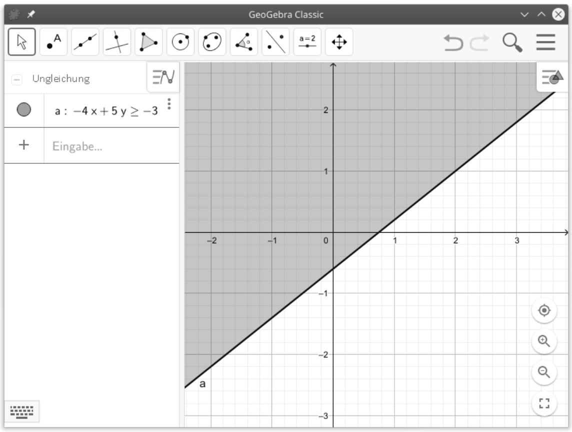
b)



c)



d)



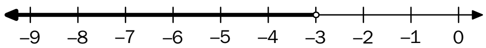
202 **a)** C A B D **b)** D B A C

203 Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung mit einem Wert $a < 0$ oder dividiert man durch $a < 0$, so wird das Relationszeichen umgedreht.

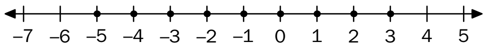
204 **a)** ☒ ☐ ☒ ☒ ☒
b) ☐ ☐ ☒ ☒ ☒
c) ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

205 **a)** D A B F **b)** F A D E

206 **a)**



b)



207 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

208 Jede Ungleichungskette ist ein besonderes Ungleichungssystem, z. B.:

Ungleichungskette	äquivalentes Ungleichungssystem
$-2 < x \leq 1$	$x > -2 \quad \wedge \quad x \leq 1$
$-4 \leq x < 4$	$x \geq -4 \quad \wedge \quad x < 4$
$a < b < c$	$a < b \quad \wedge \quad b < c$

209 $2x + y \leq 1$; $x - y > 1$

210 **1)** Die Ungleichung bedeutet, dass der Erlös größer ist als die Kosten. Für alle Stückzahlen *x*, die die Ungleichung erfüllen, wird daher ein Gewinn gemacht.
2) $x > \frac{1\,000}{13}$;
Ab 77 Stück kann ein Gewinn erwartet werden.

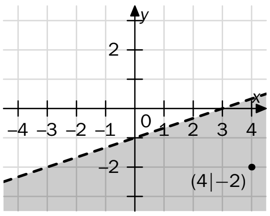
211 $v_{\min} = 50$, $v_{\max} = 80$, $t = \frac{s}{v}$;
Die minimale Druchfahrtszeit ergibt sich bei der höchsten Geschwindigkeit; die maximale Durchfahrtszeit bei der kleinsten Geschwindigkeit;
$t_{\min} = \frac{s}{v_{\max}} = \frac{8{,}3}{80}$, $t_{\max} = \frac{s}{v_{\min}} = \frac{8{,}3}{50}$

212 **1)** Negative Zeiten sind hier nicht sinnvoll.
2) Johannes ist früher losgestartet und Christina fährt mit einer höheren Durchschnittsgeschwindigkeit (22 km/h).
3) $t \geq \frac{15}{7}$
Nach etwas mehr als 2 Stunden hat Christina Johannes überholt und ist ab diesem Zeitpunkt weiter weg als Johannes.

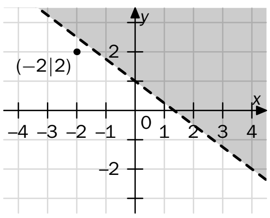
213 Die Fallunterscheidung ist notwendig, da $a \in \mathbb{R}$ ist und man daher nicht wissen kann, ob a positiv, null oder negativ ist. Bei einer Division durch eine negative Zahl muss das Relationszeichen umgedreht werden.
Im ersten Fall wird a als positiv angenommen und man erhält nach der Division die Lösung $x > \frac{7}{a}$, im zweiten Fall wird $a = 0$ angenommen. Da 0 nicht größer als 7 ist, gibt es hier keine Lösung. Im dritten Fall wird $a < 0$ angenommen und man erhält die Lösung $x < \frac{7}{a}$.

214 Z. B. $x = -5$ ist eine Lösung von der ersten Gleichung ($(-5)^2 \geq 16$), aber nicht von der zweiten Gleichung ($-5 \geq 4$ f. A.).

215 **a)**
$3 \cdot (-2) < 4 - 3 \Rightarrow -6 < 1$;
Das angegebene Zahlenpaar ist eine Lösung der Ungleichung, da die Aussage richtig ist.



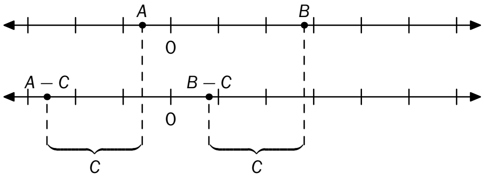
b) $2 > -\frac{3}{4} \cdot (-2) + 1$
$\Rightarrow 2 > 2{,}5$;
Das angegebene Zahlenpaar ist keine Lösung der Ungleichung, da die Aussage falsch ist.



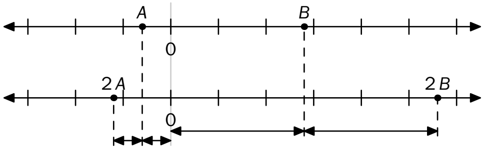
216 Die Aussage ist falsch, da die Ungleichung äquivalent zu $y \leq 3x - 5$ ist und ein Punkt, der die Ungleichung erfüllt, unterhalb der Geraden liegen müsste.

217 **1)** $A < B$ bedeutet, dass A links von B auf der Zahlengeraden liegt. Eine Addition von $C > 0$ entspricht einer Verschiebung auf der Zahlengeraden C Einheiten nach rechts. Da A und B gleich weit verschoben werden, bleibt die Relation erhalten: $A + C < B + C$

2) Subtraktion von $C > 0$ (Verschiebung nach links):



3) z. B. $C = 2$



Die Multiplikation mit $C > 0$ bewirkt, dass der Abstand vom Nullpunkt um den Faktor C vergrößert ($C > 1$) bzw. verkleinert ($0 < C < 1$) wird. Für $C < 0$ kommt zu dieser Streckung auch noch eine Spiegelung am Nullpunkt hinzu. Die Relation kehrt sich um.

218 Für jede Zeit t, die die Ungleichung erfüllt, ist der Zufluss größer als der Abfluss.

219 ☒ ☒ ☐ ☐ ☒

220 Die Kosten sind kleiner als der Erlös. Wenn mehr als 500 Autoreifen produziert werden, macht das Unternehmen Gewinn.

221 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

222 C E D A

223 $-x \leq 5$

224 C E A B

225 $a \in (-\infty; 4)$

226 A C E B

227 $s \leq -3$; kein $x \in \mathbb{N}$, das die Ungleichung erfüllt

228 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

229 a) für $0 \leq n \leq 2$, also $n = 0, 1$ oder 2:

$n = 0$: $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot a$ ✓

$n = 1$: $(1+a)^1 = 1 + a \geq 1 + 1 \cdot a$ ✓

$n = 2$: $(1+a)^2 = 1 + 2a + \underbrace{a^2}_{\geq 0} \geq 1 + 2 \cdot a$ ✓

Die Bernoulli'sche Ungleichung gilt daher für $0 \leq n \leq 2$.

$n = 3$: $(1+a)^3 \geq 1 + 3a \Leftrightarrow 1 + 3a + 3a^2 + a^3 \geq 1 + 3a$

$\Leftrightarrow 3a^2 + a^3 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(3+a) \geq 0$

Die Ungleichung ist erfüllt für $a \geq -3$ und dies ist laut Voraussetzung gegeben, daher stimmt die Ungleichung auch für $n = 3$.

b) Da $(n+1)^2 = \underbrace{n^2 + 2n}_{\geq 0} + 1 \geq 1$ ist, ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq 1$ und damit $-\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1$; $\left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$;

Nun kann die Bernoulli'sche Ungleichung mit $a = -\frac{1}{(n+1)^2}$ angewendet werden:

$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - n \cdot \frac{1}{n^2+2n+1}$

c) Aus der Ungleichung aus **b)** folgt $\left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq$

$\geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n^2+2n+1}{n}} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+2+\frac{1}{n}}}_{< \frac{1}{n+2}} > 1 - \frac{1}{n+2}$

Weiters $\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \overset{(\text{id1})}{=} \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \overset{\text{Bernoulli}}{\geq}$

$\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - n \cdot \frac{1}{n^2+2n+1} > 1 - \frac{1}{n+2} \overset{(\text{id2})}{=} \frac{n+1}{n+2}$

d) *1. Schritt*: Multiplizieren mit $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n > 0$ $\quad (n \in \mathbb{N})$;

2. Schritt: linke Seite: $\left(\frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n =$

$= \left(\frac{n \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{(n+1)^2 \cdot (n+2)}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

rechte Seite: $x \cdot x^n = x^1 \cdot x^n = x^{n+1}$;

3. Schritt: $\frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} \quad | \cdot (n+1)^n \cdot (n+2)^{n+1}$

$n^n \cdot (n+2)^{n+1} > (n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n \quad | : n^n; \quad : (n+1)^{n+1}$

$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} > \frac{(n+1)^n}{n^n}$

$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

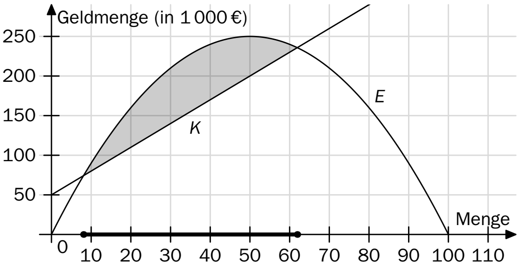
4. Schritt: linke Seite: $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, rechte Seite: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

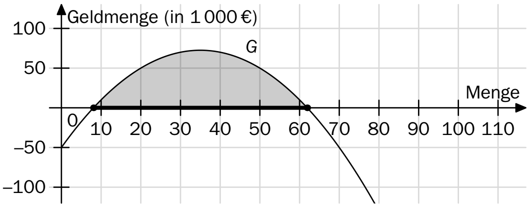
230 a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 35 - 5\sqrt{29} \leq x \leq 35 + 5\sqrt{29}\} =$

$= \left[35 - 5\sqrt{29}; 35 + 5\sqrt{29}\right]$

Wenn zwischen 9 und 61 Stück produziert werden, ist der Erlös höher als die Kosten, d. h. die Firma macht Gewinn.



b) $G(x) \geq 0 \Leftrightarrow E(x) - K(x) \geq 0 \Leftrightarrow E(x) \geq K(x)$



c) $G(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 70x + 500 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + \underbrace{(5\sqrt{29} - 35)}_{\approx -8{,}1}) \cdot (x - \underbrace{(35 + 5\sqrt{29})}_{\approx 61{,}9}) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 8{,}1) \cdot (x - 61{,}9) < 0$;

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 8{,}1 < x < 61{,}9\} = (8{,}1; 61{,}9)$

Thema: Lineare Optimierung

T1 Prozentanteil Eiweiß: $e = 21{,}6 + 0{,}8x + y$

Prozentanteil Kohlenhydrate: $k = 151{,}2$

Prozentanteil Fett: $f = 7{,}2 + 0{,}2x + 2{,}1y$

T2 Gesamt-Kalorien für einen Toast laut Rezept:

$180 + x + 3{,}1y$

1. Bedingung: mindestens 10 % der Gesamtkalorien aus Eiweiß-Anteil: $(180 + x + 3{,}1y) \cdot 0{,}1 \leq 21{,}6 + 0{,}8x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}7x + 0{,}69y \geq -3{,}6$

2. Bedingung: höchstens 22 % der Gesamtkalorien aus Eiweiß-Anteil: $(180 + x + 3{,}1y) \cdot 0{,}22 \geq 21{,}6 + 0{,}8x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}58x + 0{,}318y \leq 18$

Ebenso können die Kohlenhydrat- und die Fett-Bedingungen gefunden werden: $0{,}5x + 1{,}55y \leq 61{,}2$;

$0{,}6x + 1{,}86y \geq 43{,}2$; $\quad 1{,}48y \geq 28{,}8$;

$0{,}15x - 1{,}015y \geq -55{,}8$;

T3 Gesättigte Fettsäuren im Toast-Rezept (in mg):

$F = 936 + 50x + 180y$

3. Reelle Funktionen

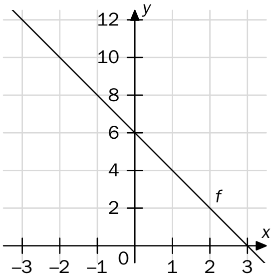
231 Im Buch ausgeführt.

232 Im Buch ausgeführt.

233 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

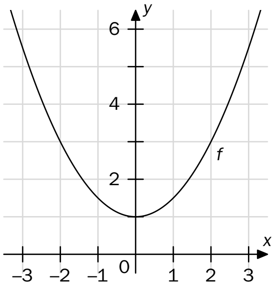
234 **a)**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	12	10	8	6	4	2	0



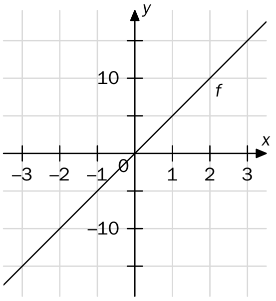
b)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	5,5	3	1,5	1	1,5	3	5,5



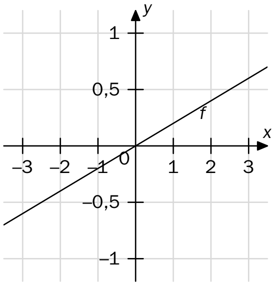
c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-15	-10	-5	0	5	10	15



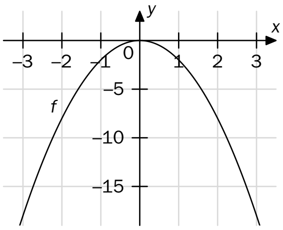
d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6



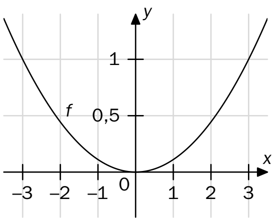
e)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



f)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	1



235 **a)** $f(x) = x$

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–2	–1	0	1	2

b) $f(x) = 2 - \frac{1}{3} \cdot x$

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$2{,}\dot{6}$	$2{,}\dot{3}$	2	$1{,}\dot{6}$	$1{,}\dot{3}$	1	$0{,}\dot{6}$	$0{,}\dot{3}$	0	$-0{,}\dot{3}$	$-0{,}\dot{6}$

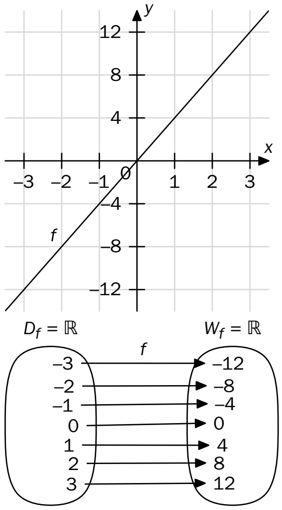
c) $f(x) = 1 - x^2$

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–3	0	1	0	–3

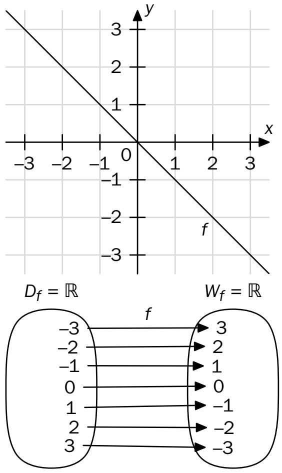
d) $f(x) = x^2 - 2$

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	2	–1	–2	–1	2

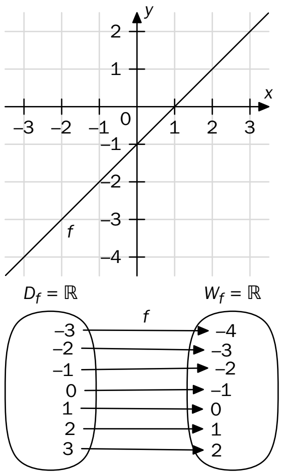
236 **a)** $f(x) = 4x$



b) $f(x) = -x$

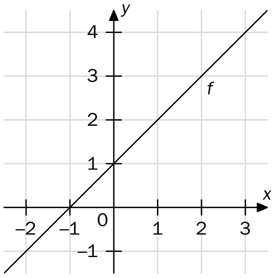


c) $f(x) = x - 1$



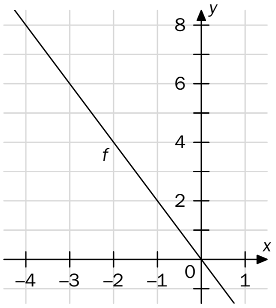
237 **a)** $y = x + 1$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4



b) $y = -2x$

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	8	6	4	2	0



238 ***Wertetabelle***: *Vorteile*: hohe Relevanz, da Werte aus der Realität häufig in Form einer Wertetabelle gegeben sind; erleichtert das Zeichnen des Funktionsgraphen bzw. bereitet es vor;
Nachteile: Eigenschaften der Funktionen sind nicht unmittelbar ablesbar; nur einige Wertepaare $(x|f(x))$ werden dargestellt
Funktionsgraph: *Vorteile*: Eigenschaften der Funktion sind auf einen Blick erkennbar;
Nachteile: in der Regel wird nur ein Ausschnitt der Funktion dargestellt; Wertepaare $(x|f(x))$ können oft nur näherungsweise ermittelt werden;
Funktionsterm: *Vorteile*: Wertepaare $(x|f(x))$ können für beliebige Argumente und Funktionswerte exakt bestimmt werden; Wechsel in andere Darstellungsformen gelingt leicht;
Nachteile: Eigenschaften der Funktion sind oft nicht sofort ersichtlich;
Pfeildiagramm: *Vorteile*: „Mehrfachzuweisungen" sind sofort erkennbar;
Nachteile: Eigenschaften der Funktionen sind nicht unmittelbar ablesbar; nur einige Wertepaare $(x|f(x))$ werden dargestellt

239 **a)** **1)** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$;
$N_1 = (-1|0)$; $N_2 = (3|0)$
2) $F_1 = (-2|-2)$; $F_2 = (1{,}5|1{,}5)$

b) **1)** $x_1 = -1$; $x_2 = 4$; $N_1 = (-1|0)$; $N_2 = (4|0)$
2) $F_1 = (-2|-2)$; $F_2 = (1|1)$; $F_3 = (2|2)$

c) **1)** $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $N_1 = (-3|0)$; $N_2 = (0|0)$
2) $F_1 = (-1|-1)$; $F_2 = (0|0)$; $F_3 = (1|1)$

d) **1)** $x_1 = -5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$;
$N_1 = (-5|0)$; $N_2 = (0|0)$; $N_3 = (2|0)$
2) $F_1 = (-2|-2)$; $F_2 = (-1|-1)$; $F_3 = (0|0)$

240 **a)** **1)** $x = \frac{3}{2}$ **2)** $F = (2|2)$

b) **1)** $x = 2$ **2)** $F_1 = (1|1)$; $F_2 = (4|4)$

c) **1)** $x = -4$
2) $F_1 \approx (-6{,}6|-6{,}6)$; $F_2 \approx (-2{,}4|-2{,}4)$

d) **1)** $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ **2)** $F_1 = (0|0)$; $F_2 = (3|3)$

e) **1)** $x_1 \approx 2{,}4$; $x_2 \approx -3{,}4$
2) $F_1 = (-4|-4)$; $F_2 = (2|2)$

f) **1)** $x_1 = 3$; $x_2 = 4$ **2)** keine Fixpunkte

g) **1)** $x = 0$ **2)** $F_1 = (0|0)$; $F_2 = (1|1)$

h) **1)** $x = 0$
2) $F_1 = (-1|-1)$; $F_2 = (0|0)$; $F_3 = (1|1)$

241 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

242 Die Produktionsmenge sollte im Bereich von 20 bis 120 Stück liegen.

243 Der Ball ist 5 s lang in der Luft.

244 Im Buch ausgeführt.

245 Im Buch ausgeführt.

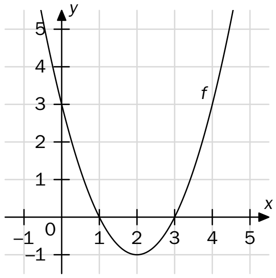
246 Die Funktion f ordnet der Länge des zurückgelegten Weges die aktuelle Höhe zu:
$f: [0; 8] \to \mathbb{R}^+$, Weg (in km) $\mapsto$ Höhe (in m)
$x_{min} \approx 1{,}4$; $f(1{,}4) \approx 1\,550$; Die tiefste Stelle ($\approx 1\,550$ m) wird nach ca. 1,4 km erreicht.
$x_{max} \approx 3{,}8$; $f(3{,}8) \approx 1\,680$; Die höchste Stelle ($\approx 1\,680$ m) wird nach ca. 3,8 km erreicht.

247 In $0 \leq x \leq 1{,}1$ ist f monoton fallend; die ersten 1,1 km geht es bergab oder es ist eben.
In $1{,}1 \leq x \leq 1{,}3$ ist f streng monoton wachsend; von Kilometer 1,1 bis Kilometer 1,3 geht es bergauf.
In $1{,}3 \leq x \leq 1{,}4$ ist f streng monoton fallend; von Kilometer 1,3 bis Kilometer 1,4 geht es bergab.
In $1{,}4 \leq x \leq 3{,}8$ ist f streng monoton wachsend; von Kilometer 1,4 bis Kilometer 3,8 geht es bergauf.
In $3{,}8 \leq x \leq 5{,}1$ ist f monoton fallend; von Kilometer 3,8 bis Kilometer 5,1 geht es bergab oder ist eben.
In $5{,}1 \leq x \leq 5{,}4$ ist f streng monoton wachsend; von Kilometer 5,1 bis Kilometer 5,4 geht es bergauf.
In $5{,}4 \leq x \leq 6{,}5$ ist f streng monoton fallend; von Kilometer 5,4 bis Kilometer 6,5 geht es bergab.
In $6{,}5 \leq x \leq 6{,}9$ ist f streng monoton wachsend; von Kilometer 6,5 bis Kilometer 6,9 geht es bergauf.
In $6{,}9 \leq x \leq 7{,}1$ ist f streng monoton fallend; von Kilometer 6,9 bis Kilometer 7,1 geht es bergab.
In $7{,}1 \leq x \leq 7{,}6$ ist f streng monoton wachsend; von Kilometer 7,1 bis Kilometer 7,6 geht es bergauf.
In $7{,}6 \leq x \leq 8$ ist f streng monoton fallend; ab Kilometer 7,6 verläuft der Weg bergab.

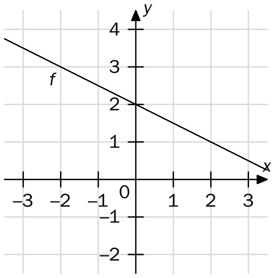
248 **a)** In $a \leq x \leq b$ ist die Funktion streng monoton wachsend;
in $b \leq x \leq c$ ist die Funktion monoton wachsend;
in $c \leq x \leq d$ ist die Funktion streng monoton fallend
b) In $a \leq x \leq b$ ist die Funktion streng monoton fallend;
in $b \leq x \leq d$ ist die Funktion monoton fallend
c) In $a \leq x \leq b$ ist die Funktion streng monoton fallend;
in $b \leq x \leq c$ ist die Funktion zuerst streng monoton fallend und dann streng monoton steigend;
in $c \leq x \leq d$ ist die Funktion streng monoton fallend;
d) In $a \leq x \leq c$ ist die Funktion monoton wachsend;
in $c \leq x \leq d$ ist die Funktion streng monoton fallend;

249 **a)** **1)** $x_{min} = -2$; $x_{max} = 4$
2) streng monoton wachsend
b) **1)** $x_{min} = -3$; $x_{min} = 3$; $x_{max} = 0$
2) in $-3 \leq x \leq 0$ streng monoton wachsend;
in $0 \leq x \leq 3$ streng monoton fallend
c) **1)** $x_{min} = -2$; $x_{min} = 5$; $x_{min} = 9$;
$x_{max} = -3$; $x_{max} = 1$; $x_{max} = 8$
2) in $-3 \leq x \leq -2$ streng monoton fallend;
in $-2 \leq x \leq 1$ streng monoton wachsend;
in $1 \leq x \leq 5$ streng monoton fallend;
in $5 \leq x \leq 8$ streng monoton wachsend;
in $8 \leq x \leq 9$ streng monoton fallend
d) **1)** $x_{min} = 0$; $x_{min} = 4$; $x_{max} = -2$; $x_{max} = 3$
2) in $-2 \leq x \leq 0$ streng monoton fallend;
in $0 \leq x \leq 3$ streng monoton wachsend;
in $3 \leq x \leq 4$ streng monoton fallend

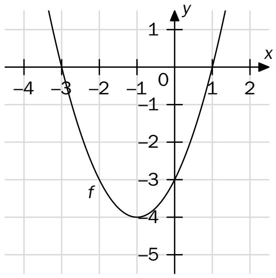
250 **a)** globales Minimum: $x_{min} = 2$; $f(2) = -1$;
$-\infty < x \leq 2$ streng monoton fallend;
$2 \leq x < \infty$ streng monoton wachsend



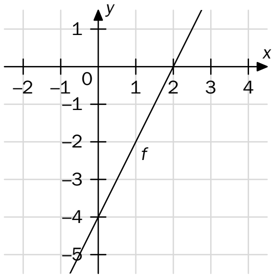
b) keine Extremstellen; streng monoton fallend



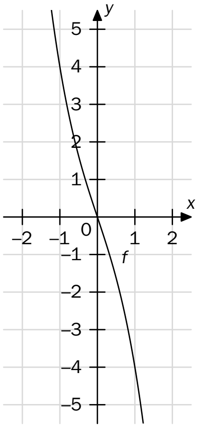
c) globales Minimum: $x_{min} = -1$; $f(-1) = -4$;
$-\infty < x \leq -1$ streng monoton fallend;
$-1 \leq x < \infty$ streng monoton wachsend



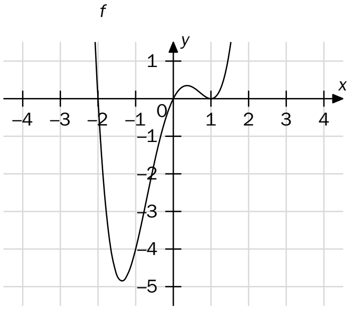
d) keine Extremstellen; streng monoton wachsend



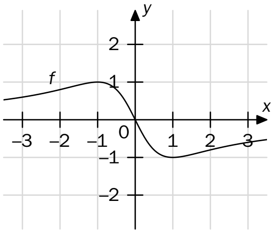
e) keine Extremstellen; streng monoton fallend



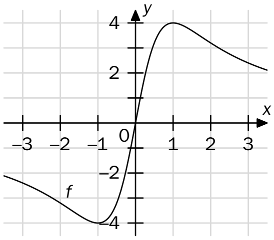
f) lokales Maximum: $x_{max} \approx 0{,}4$; $f(0{,}4) \approx 0{,}3$;
lokales Minimum: $x_{min} = 1$; $f(1) = 0$;
globales Minimum: $x_{min} \approx -1{,}4$; $f(-1{,}4) \approx -4{,}8$;
$-\infty < x \leq -1{,}4$ streng monoton fallend;
$-1{,}4 \leq x \leq 0{,}4$ streng monoton wachsend;
$0{,}4 \leq x \leq 1$ streng monoton fallend;
$1 \leq x < \infty$ streng monoton wachsend



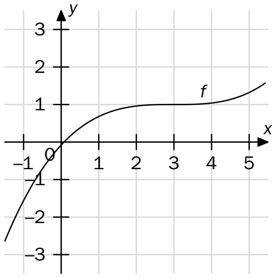
g) globales Maximum: $x_{max} = -1$; $f(-1) = 1$;
globales Minimum: $x_{min} = 1$; $f(1) = -1$;
$-\infty < x \leq -1$ streng monoton wachsend;
$-1 \leq x \leq 1$ streng monoton fallend;
$1 \leq x < \infty$ streng monoton wachsend



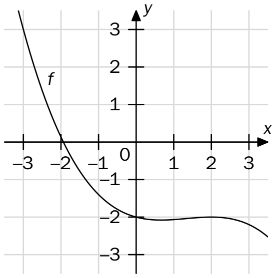
h) globales Maximum: $x_{max} = 1$; $f(1) = 4$;
globales Minimum: $x_{min} = -1$; $f(-1) = -4$;
$-\infty < x \leq -1$ streng monoton fallend;
$-1 \leq x \leq 1$ streng monoton wachsend;
$1 \leq x < \infty$ streng monoton fallend



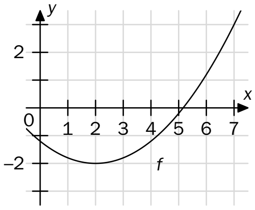
251 **a)** z. B.:



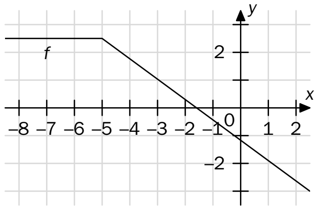
b) z. B.:



c) z. B.:



d) z. B.:



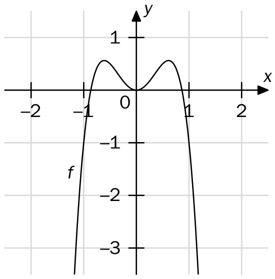
252 ☒ ☒ ☒ ☐ ☒

253 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

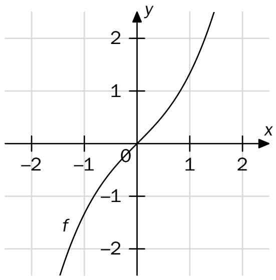
254 Im Buch ausgeführt.

255 Im Buch ausgeführt.

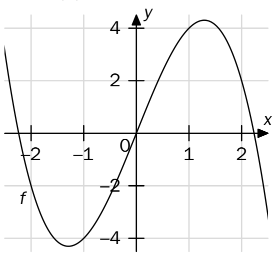
256 **a)** gerade: $f(-x) = $
$= 3 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x)^4 = $
$= 3\,x^2 - 4\,x^4 = f(x)$



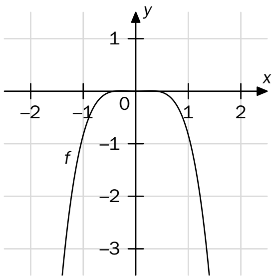
b) ungerade: $f(-x) = $
$= \frac{(-x)^3}{3} + (-x) = \frac{-x^3}{3} - x = $
$= -\left(\frac{x^3}{3} + x\right) = -f(x)$



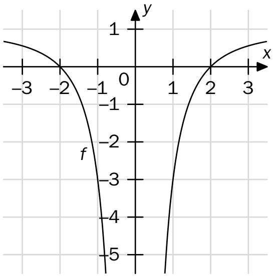
c) ungerade: $f(-x) = $
$= -(-x)^3 + 5 \cdot (-x) = $
$x^3 - 5\,x = -\left(-x^3 + 5\,x\right) = $
$= -f(x)$



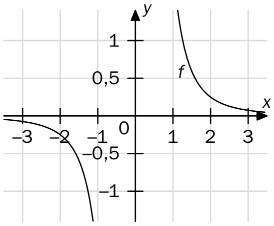
d) gerade: $f(-x) = $
$= \frac{(-x)^2}{6} - (-x)^4 = $
$= \frac{x^2}{6} - x^4 = f(x)$



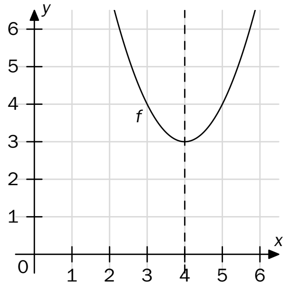
e) gerade: $f(-x) = $
$= \frac{-4+(-x)^2}{(-x)^2} = \frac{-4+x^2}{x^2} =$
$= f(x)$



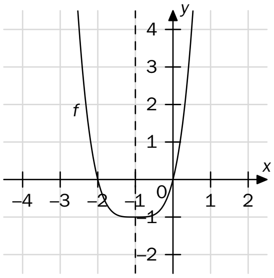
f) ungerade: $f(-x) =$
$= \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -f(x)$



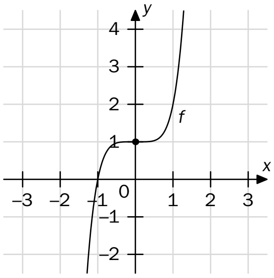
257 a) 1)
symmetrisch zur Gerade
$x = 4$
2) weder gerade noch ungerade, da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$



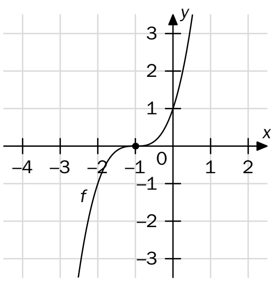
b) 1) symmetrisch zur Gerade $x = -1$
2) weder gerade noch ungerade, da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$



c) 1) symmetrisch zum Punkt $(0|1)$
2) weder gerade noch ungerade, da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$



d) 1) symmetrisch zum Punkt $(-1|0)$
2) weder gerade noch ungerade, da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$



258 a) periodisch mit $p = 4$ **b)** periodisch mit $p = 5$
c) periodisch mit $p \approx 6{,}2$ **d)** periodisch mit $p = 2$
e) periodisch mit $p = 4$

259 Die Periode kann hier nicht anhand der Nullstellen bestimmt werden, da die Monotonie an den Nullstellen abwechselnd fallend oder wachsend ist. Die Werte sind daher kurz nach den Nullstellen einmal größer und einmal kleiner als null. Für die Periode würde dann der falsche Wert $p = 1$ herauskommen.

260 a) 1) symmetrisch zur y-Achse; gerade
2) nicht periodisch

b) 1) symmetrisch zum Ursprung; ungerade
2) nicht periodisch

c) 1) symmetrisch zu den Geraden $y = -3$, $y = -1$, $y = 1, \ldots$; weder gerade noch ungerade
2) periodisch mit $p = 4$

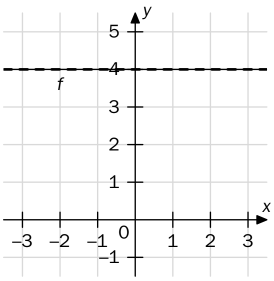
d) 1) symmetrisch zu den Geraden $y = -1{,}5$; $y = -0{,}5$; $y = 0{,}5$; …; weder gerade noch ungerade
2) periodisch mit $p = 2$

261 ☒ ☒ ☐ ☐ ☒

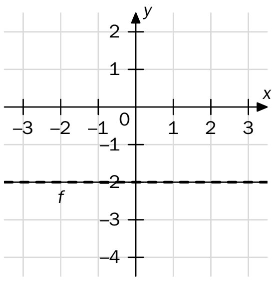
262 Das EKG ist nur annähernd periodisch. Schaut man es genauer an, so erkennt man kleine Abweichungen z. B. in der Höhe der Ausschläge.

263 Nur die Funktion $f(x) = 0$ ist symmetrisch zur x-Achse. Eine weitere solche Funktion kann es nicht geben, da es dann zu jedem x-Wert zwei y-Werte geben müsste und das wäre keine Funktion mehr.

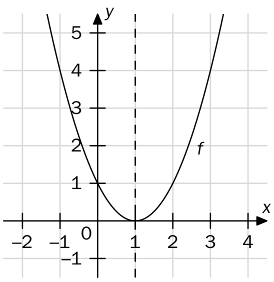
264 a)



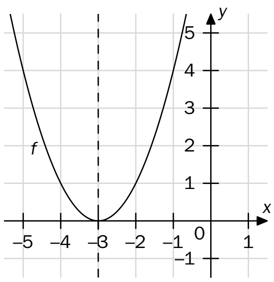
b)



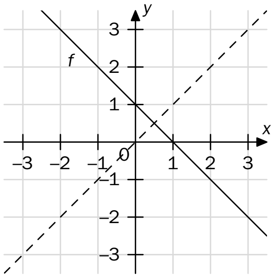
c) z. B.:



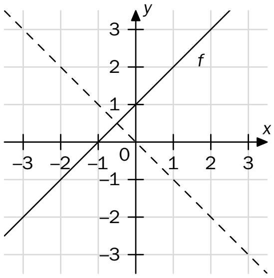
d) z. B.:



e) z. B.:



f) z. B.:



265 Im Buch ausgeführt.

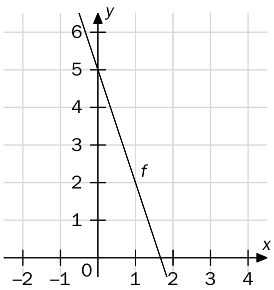
266 Im Buch ausgeführt.

267 **1)** ca. 1,4 km **2)** ca. 2,2 km oder 7,1 km
3) ca. 3,7 km

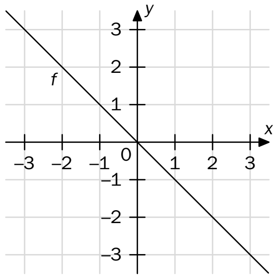
268 Nein, mehrere Werte *x* sind einem Wert *y* zuordenbar; die Funktion ist nicht injektiv.

269 **a)** nicht bijektiv, da zu vielen *y*-Werten zwei *x*-Werte existieren (*f* ist nicht injektiv)
b) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}$ genau einmal als Funktionswert auftritt
c) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}^+$ genau einmal als Funktionswert auftritt
d) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}$ genau einmal als Funktionswert auftritt
e) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}_0^+$ genau einmal als Funktionswert auftritt
f) nicht bijektiv, da für viele *y*-Werte zwei *x*-Werte existieren (*f* ist nicht injektiv)

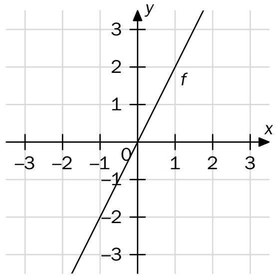
270 **a)** bijektiv für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



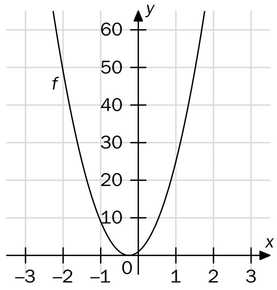
b) bijektiv für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



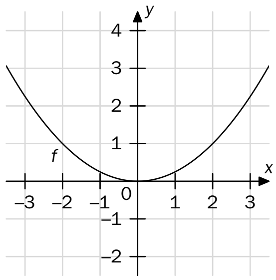
c) bijektiv für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



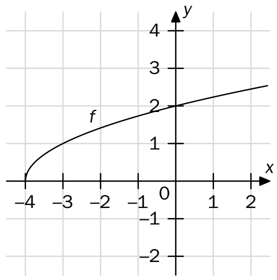
d) bijektiv für $\mathbb{D}_f = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ oder für $\mathbb{D}_f = \left[-\frac{1}{4}; \infty\right)$



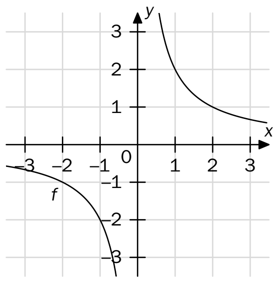
e) bijektiv für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ oder für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^-$



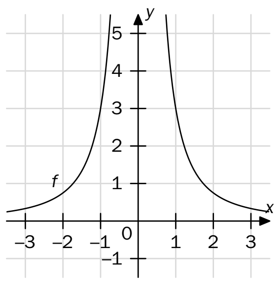
f) bijektiv für $\mathbb{D}_f = [-4; \infty)$



g) bijektiv für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

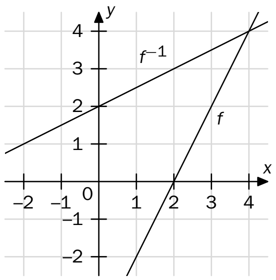


h) bijektiv für $\mathbb{D}_f = (-\infty; 0)$ oder für $\mathbb{D}_f = (0; \infty)$

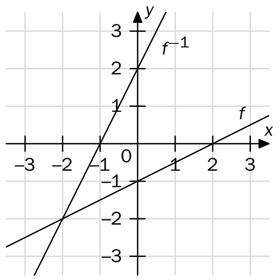


271 Die Funktion ist nicht bijektiv, da zum mit dem Lineal eingezeichneten *y*-Wert sogar drei *x*-Werte existieren.

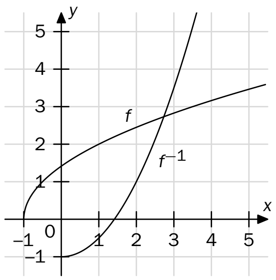
272 **a)** **1)** Jeder Wert aus $\mathbb{R}$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+4}{2}$
2)



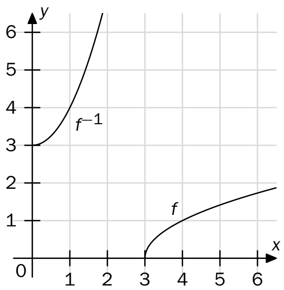
b) **1)** Jeder Wert aus $\mathbb{R}$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$x \mapsto 2\,(x+1)$ **2)**



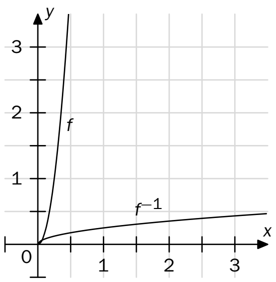
c) **1)** Jeder Wert aus $\mathbb{R}_0^+$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to [-1; \infty),$
$x \mapsto \frac{x^2-2}{2}$ **2)**



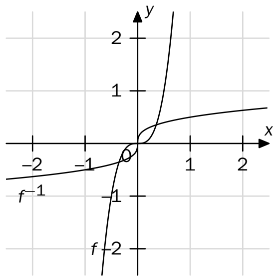
d) **1)** Jeder Wert aus $\mathbb{R}_0^+$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to [3; \infty),$
$x \mapsto x^2 + 3$ **2)**



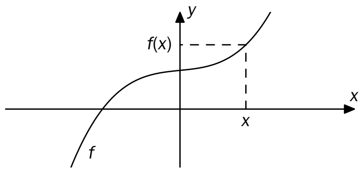
e) **1)** Jeder Wert aus $[0; \infty)$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: [0; \infty) \to [0; \infty),$
$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{4}$ **2)**



f) **1)** Jeder Wert aus $\mathbb{R}$ tritt genau einmal als Funktionswert auf.
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{8}}$
2)



273 Wenn f streng monoton steigend ist, dann haben zwei verschiedene Argumente nie denselben Funktionswert (für $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ laut Definition).
$\Rightarrow$ Jedem Funktionswert kann eindeutig ein x-Wert zugeordnet werden.



274 **a)** injektiv, da jedes $y \in \mathbb{W}_f$ höchstens einmal als Funktionswert auftritt
b) surjektiv, da jedes $y \in \mathbb{W}_f$ mindestens einmal als Funktionswert auftritt
c) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{W}_f$ genau einmal als Funktionswert auftritt
d) bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{W}_f$ genau einmal als Funktionswert auftritt
e) weder injektiv noch surjektiv, daher nicht bijektiv, da ein $y \in \mathbb{W}_f$ zweimal als Funktionswert auftritt und ein $y \in \mathbb{W}_f$ überhaupt nicht als Funktionswert auftritt
f) weder injektiv noch surjektiv, daher nicht bijektiv, da ein $y \in \mathbb{W}_f$ zweimal als Funktionswert auftritt und ein $y \in \mathbb{W}_f$ überhaupt nicht als Funktionswert auftritt

275 injektiv; höchstens

276 Im Buch ausgeführt.

277 **1)** absolute Änderung: 190;
relative Änderung: ca. 127 %
2) absolute Änderung: 275;
relative Änderung: ca. 122 %

278 **a)** Die Anzahl der verkauften Fernseher ist um 28 Stück gestiegen.
b) Die Anzahl der verkauften Fernseher ist von November bis Dezember um 50 % gestiegen.
c) Zwischen Oktober und Dezember ist die Anzahl der verkauften Fernseher monatlich um durchschnittlich 14 Stück gestiegen.
d) Von Oktober bis Dezember hat sich die Anzahl der verkauften Fernseher auf das 1,8-Fache erhöht.

279 **a)** 9 € **b)** −64 € **c)** 0,0625 €

280 **a)** ≈ 14,7 % **b)** −5 % **c)** ≈ 61,5 %

281 **a)** −0,5 kg **b)** 0,25 cm **c)** 3,75 °C

282 **a)** $s-k$ **b)** $\frac{s-k}{k}$ **c)** $\frac{s-k}{2}$

283 Die Zeitersparnis für diese Strecke beträgt ca. eine Minute (0,018 h).

284 **1)** ☐ ☐ ☒ ☐ ☒
2) **a)** absolute Änderung; 1,6 Mrd; Die Weltbevölkerung ist von 1990 bis 2010 um 1,6 Milliarden gestiegen.
b) mittlere Änderungsrate; 0,082 Mrd; Zwischen 1980 und 2010 ist die Weltbevölkerung jährlich um durchschnittlich 82 Millionen gestiegen.
c) Änderungsfaktor; 1,15; Von 1990 bis 2000 hat sich die Weltbevölkerung auf das 1,15-Fache erhöht.
d) relative Änderung; 37,8 %; Die Weltbevölkerung ist von 1980 bis 2000 um ca. 37,8 % gestiegen.

285 **a)** **1)** absolute Änderungsrate: 8; relative Änderungsrate: 400 %; mittlere Änderungsrate: 4
2) absolute Änderungsrate: 40; relative Änderungsrate: 400 %; mittlere Änderungsrate: 10
3) absolute Änderungsrate: 125; relative Änderungsrate: 123,8 %; mittlere Änderungsrate: 25
b) **1)** absolute Änderungsrate: 6; relative Änderungsrate: –300 %; mittlere Änderungsrate: 3
2) absolute Änderungsrate: 12; relative Änderungsrate: 300 %; mittlere Änderungsrate: 3
3) absolute Änderungsrate: 15; relative Änderungsrate: 60 %; mittlere Änderungsrate: 3
c) **1)** absolute Änderungsrate: $-\frac{4}{3}$; relative Änderungsrate: –66,7 %; mittlere Änderungsrate: $-\frac{2}{3}$
2) absolute Änderungsrate: $-\frac{8}{21}$; relative Änderungsrate: –57,1 %; mittlere Änderungsrate: $-\frac{2}{21}$
3) absolute Änderungsrate: $-\frac{1}{15}$; relative Änderungsrate: –33,3 %; mittlere Änderungsrate: $-\frac{1}{75}$
d) **1)** absolute Änderungsrate: 13; relative Änderungsrate: 2 600 %; mittlere Änderungsrate: 6,5
2) absolute Änderungsrate: 158; relative Änderungsrate: 1 170,4 %; mittlere Änderungsrate: 39,5
3) absolute Änderungsrate: 1 187,5; relative Änderungsrate: 237,5 %; mittlere Änderungsrate: 237,5

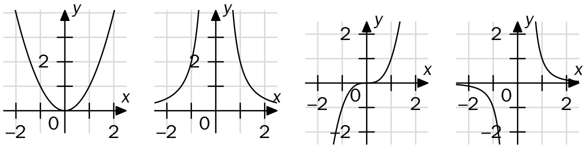
286 **a)** $-\frac{5}{6}$ (bzw. ca. –83 %) **b)** $-\frac{5}{3}$
c) –6 **d)** 0,4

287 Im Buch ausgeführt.

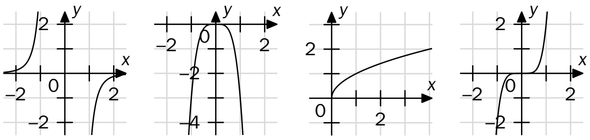
288 A C
D F

289 **a)** $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$
b) $f(x) = 2x^3$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^-$
d) $f(x) = \frac{1}{8}x^3$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
e) $f(x) = \frac{3}{x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f) $f(x) = \frac{2}{x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

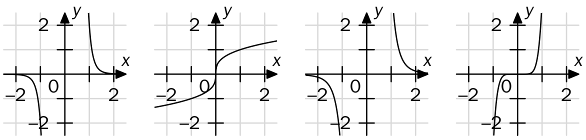
290 **a)**



b)



c)

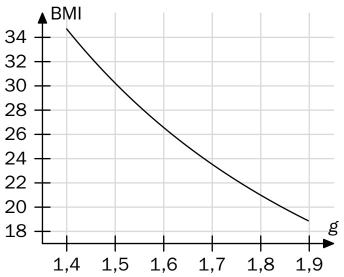


291 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

292 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

293 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

294 hat die y-Achse als Asymptote; keine Extremstellen



295 **1)** Alle Graphen gehen durch die Punkte (0|0) und (1|1), da $1^{\frac{1}{r}} = 1$ und $0^{\frac{1}{r}} = 0$ ist.
2) Wenn r gerade ist, ist die Funktion gerade und es gibt ein globales Minimum an der Stelle $x_{\min} = 0$. Wenn r ungerade ist, ist die Funktion ungerade und es gibt keine Extremstelle.

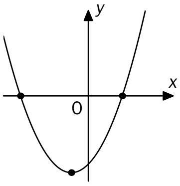
296 $a \in \mathbb{R}^*$, $b = 0$, $r = -1$

297 Im Buch ausgeführt.

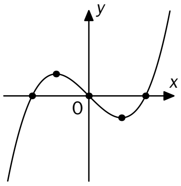
298 ☒ ☒ ☐ ☐ ☒

299 **a)** 3. Grad **b)** 4. Grad **c)** 5. Grad

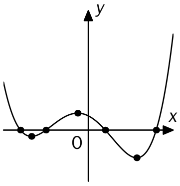
300 **1)** höchstens zwei Nullstellen, eine lokale Extremstelle



2) höchstens drei Nullstellen, höchstens zwei lokale Extremstellen

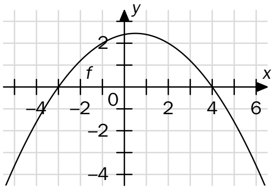


3) höchstens vier Nullstellen, höchstens drei lokale Extremstellen

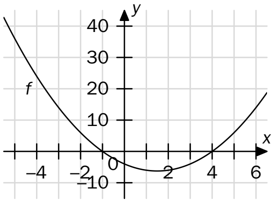


301 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

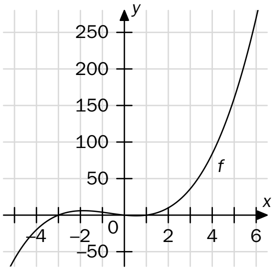
302 **a)** **1)** $f(x) = -0{,}2\,x^2 + 0{,}2\,x + 2{,}4$
2) $f(-5) = f(6) = -3{,}6$



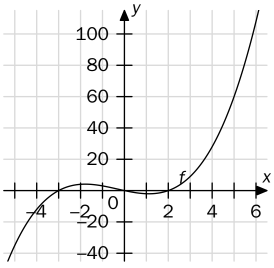
b) **1)** $f(x) = x^2 - 3\,x - 4$
2) $f(-5) = 36$;
$f(6) = 14$



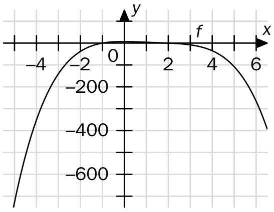
c) **1)**
$f(x) = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x$
2) $f(-5) = -60$;
$f(6) = 270$



d) **1)**
$f(x) = 0{,}5\,x^3 + 0{,}5\,x^2 - 3\,x$
2) $f(-5) = -35$;
$f(6) = 108$



e) **1)** $f(x) = -0{,}5\,x^4 + 2{,}5\,x^3 - 4{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x + 7$
2) $f(-5) = -728$; $f(6) = -266$



303 **1)** Eine Polynomfunktion zweiten Grades ist eine reelle Funktion der Form $f(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Um die drei unbekannten Koeffizienten a_2, a_1 und a_0 zu bestimmen, benötigt man mindestens drei Gleichungen.
2) *Termdarstellung*: $f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$;
Anzahl der Unbekannten: 4 (a_3, a_2, a_1 und a_0);
(Mindest-)Anzahl der Funktionswerte: 4
3) *Termdarstellung*: $f(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$;
Anzahl der Unbekannten: 5 (a_4, a_3, a_2, a_1 und a_0);
(Mindest-)Anzahl der Funktionswerte: 5
4) *Termdarstellung*:
$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$;
Anzahl der Unbekannten: $n + 1$
($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ und a_0);
(Mindest-)Anzahl der Funktionswerte: $n + 1$

304 Durch Ausmultiplizieren der Binome entsteht eine Summe aus Potenzen der Form x^k mit reellen Koeffizienten. Diese Summanden können der Größe des Wertes der jeweiligen Hochzahl nach geordnet werden und erfüllen somit die Definition für Polynomfunktionen. Jeder Wert x_k führt dazu, dass der Linearfaktor $x - x_k$ und damit das Produkt null wird, und ist somit eine Nullstelle.
$\Rightarrow f(x_k) = 0$

305 Der Koeffizient c ist für **a)** bis **d)** jeweils beliebig wählbar.
a) $f(x) = c\,(x^2 + 2\,x - 8)$
b) $f(x) = c\,(x^3 + x^2 - 2\,x)$
c) $f(x) = c\,(x^3 + 8\,x^2 + 15\,x)$
d) $f(x) = c\,(x^4 - 3\,x^3 - 15\,x^2 + 19\,x + 30)$

306 Der Koeffizient c ist für **a)** bis **d)** jeweils beliebig wählbar.
a) $f(x) = c\,(x^3 - 5\,x^2 + 4\,x)$
b) $f(x) = c\,(x^3 - 7\,x^2 + 14\,x - 8)$
c) $f(x) = c\,(x^4 + 4\,x^3 + x^2 - 6\,x)$

307 **1)** Joachim hat ein Polynom mit diesen Nullstellen berechnet. Hier gibt es aber unendlich viele Möglichkeiten. Er hat den Faktor a wie in Bsp. **304** vergessen. Die Funktionsgleichung wäre dann $y = a \cdot (x-1)\,(x+2)\,x$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Den Wert müsste er noch genau berechnen, indem er einen weiteren Punkt (keine Nullstelle) einsetzt, z. B. $(-1|-4)$.
2) $y = -2\,(x-1)\,(x+2)\,x$

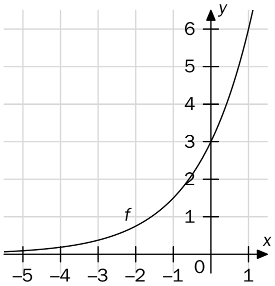
308 $(-\infty; x_T]$; streng monoton fallend

309 Im Buch ausgeführt.

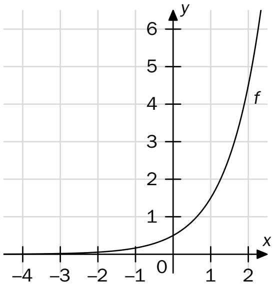
310 Im Buch ausgeführt.

311 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

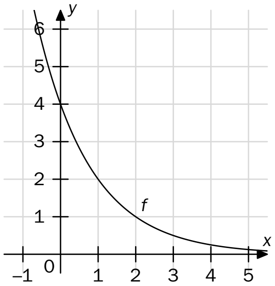
312 **a)**



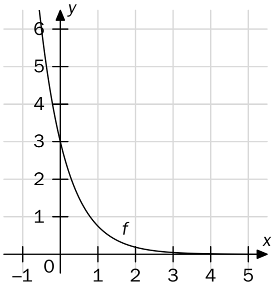
b)



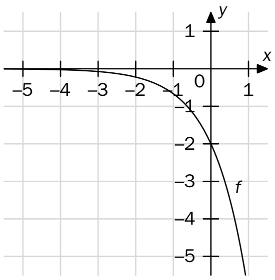
c)



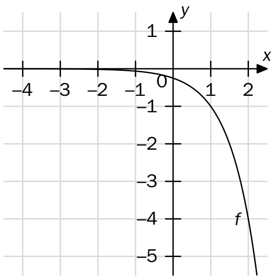
d)



e)



f)



313 **a)** $f(x) = 2 \cdot 2^x$ **b)** $f(x) = 3^x$ **c)** $f(x) = 0{,}5^x$
d) $f(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$

314 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

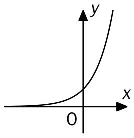
315 $f(x+1) = c \cdot a^{x+1} = c \cdot a^x \cdot a = a \cdot f(x)$
Erhöht man das Argument um 1, so wird der Funktionswert mit a multipliziert.

316 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

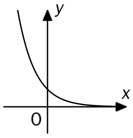
317 **a)** Exponentialfunktion; $f(x) = 3 \cdot 2^x$
b) keine Exponentialfunktion

318 **a)** $f(x) = 2 \cdot 2^x$; $f(x) = 2 \cdot e^{\ln(2)\,x}$
b) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; $f(x) = 3 \cdot e^{\ln(2)\,x}$
c) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f(x) = 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)x}$
d) $f(x) = 4^x$; $f(x) = e^{\ln(4)\,x}$

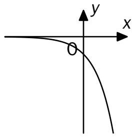
319 **a)**



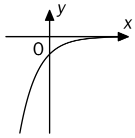
b)



c)



d)



320 E D A B

321 **a)** **1)** um 4 % erhöht **2)** um 8,16 % erhöht
3) um rund 22 % erhöht
b) **1)** um 20 % erhöht **2)** um 44 % erhöht
3) um rund 149 % erhöht
c) **1)** um 25 % verringert **2)** um 43,75 % verringert
3) um rund 76 % verringert
d) **1)** um 10 % verringert **2)** um 19 % verringert
3) um rund 41 % verringert
e) **1)** um rund 65 % erhöht
2) um rund 172 % erhöht
3) um rund 1 118 % erhöht
f) **1)** um rund 86 % verringert
2) um rund 98 % verringert
3) um fast 100 % verringert

322 Zu Beginn sind 150 Seerosen im Teich. Pro Tag steigt die Zahl an Seerosen um rund 2 % ($e^{0{,}02} \approx 1{,}02$).

323 **a)** $N(t) = 10^5 \cdot 1{,}0473^t$; ($a = \sqrt[15]{2}$)
b) $N(t) = 10^6 \cdot 1{,}0313^t$; ($a = \sqrt[45]{4}$)

324 $L(h) = 1{,}013 \cdot 0{,}8816^h$; ($a = \sqrt[5{,}5]{0{,}5}$)

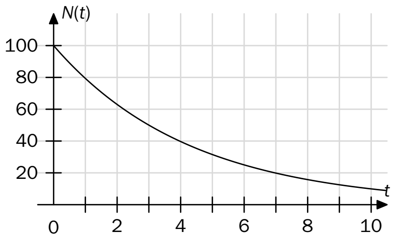
325 Im Buch ausgeführt.

326 **a)** 88 159 Bakterien **b)** in 3,9 Stunden

327 **a)** $N(t) = 180\, e^{0{,}0719\,t}$ (t in Jahren)
b) um 7 % **c)** $\approx$ 9,6 Jahre

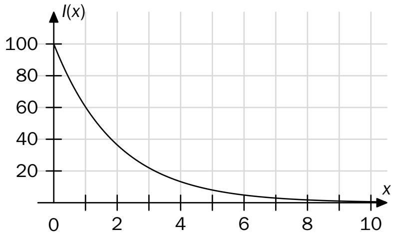
328 ☒ ☒ ☐ ☐ ☒

329 **a)** $N(t) = 100\, e^{-0{,}2310\,t}$



b) Es sind 6,25 mg vorhanden.
c) Es dauert 12,97 h.
d) Es dauert 3 Stunden.

330 a) $I(x) = 100\,e^{-0{,}5051\,x}$



b) Das Material muss rund 4,6 cm dick sein.

331 $\tau = 4$ Jahre

332 $\tau = 2$ Jahre

333 $N(\tau) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow N_0\,e^{-\lambda\,\tau} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda\,\tau} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\lambda\,\tau = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-\lambda} \Leftrightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$

334 Nach etwa 380 Jahren sind 15 % des Radiums zerfallen.

335 a) $\tau \approx 30$ Jahre ($\lambda \approx 0{,}0233$);
Es sind noch rund 25 % vorhanden.
b) Erst nach rund 80 Tagen sind nur mehr 0,1 % vorhanden.

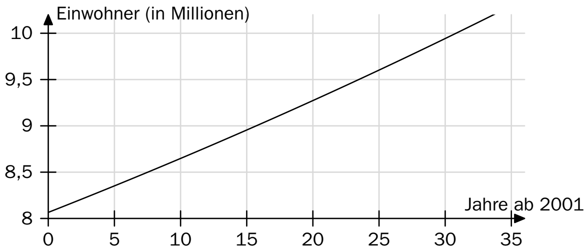
336 a) $\tau = 8$ Stunden ($\lambda \approx 2{,}0794$)
b) Nach etwa 2 Tagen und 6 Stunden (2,21 Tagen) sind weniger als 1 % vorhanden.

337 a) Es wurden rund 86 g hergestellt.
b) Nach etwa 153 Stunden sind 80 % zerfallen.
c) Pro Tag zerfallen etwa 22 %.

338 Ötzi weist ein Alter von etwa 4 575 Jahren auf.

339 Im Buch ausgeführt.

340 1) $f(x) = 8\,065\,466 \cdot 1{,}007^x$



2) 2021 würden rund 9 272 970 Einwohner in Österreich leben; Im Jahr 2032 würde eine Bevölkerungszahl von 10 Millionen erreicht sein.

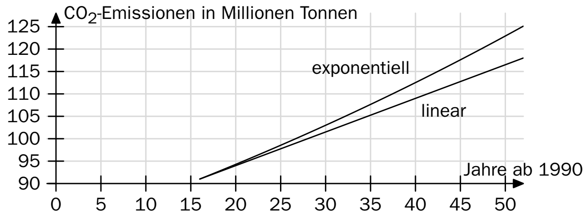
3) Die Bevölkerung kann nicht im gleichen Tempo weiter wachsen, denn irgendwann wäre in Österreich nicht mehr genug Platz bzw. könnten die Menschen dann nicht ausreichend mit Nahrung versorgt werden. Das Modell könnte vielleicht für einen Zeitraum von 100 Jahren gelten.

341 Ein exponentielles Modell kann die Entwicklung besser beschreiben, da die relative Änderung für zwei Jahre jeweils ungefähr 0,08 beträgt: $f(t) = 500 \cdot e^{0{,}0393\,t}$
Erwartete Nächtigungszahlen:

Jahr	2017	2018	2019	2020
Nächtigungszahl	658	685	712	741

342 Das lineare Modell kann ab 10 km Höhe verwendet werden, davor ist das exponentielle Modell notwendig:
$0 \le h \le 10$; $f_{\text{exp}}(h) = 995{,}51 \cdot 0{,}88^h$;
$10 \le h \le 13$; $f_{\text{lin}}(h) = -30\,h + 590$

343 1) $f_{\text{lin}}(t) = 79 + \frac{3}{4}\,t$; $f_{\text{exp}}(t) = 79\,(1 + 0{,}00888)^t$
2) Dem linearen Modell liegt die Annahme zugrunde, dass die CO_2-Emissionen jedes Jahr um 750 000 Tonnen steigen. Im Jahr 2040 werden sie knapp 117 Millionen Tonnen betragen.
Das exponentielle Modell prognostiziert einen rascheren Anstieg der Emissionen. Mit einer jährlichen Steigerung um etwa 0,9 % wird es 2040 knapp 123 Millionen Tonnen CO_2-Emissionen geben.



344 1) $f_{\text{lin}}(t) = 12\,t + 760$; $f_{\text{exp}}(t) = 760 \cdot e^{0{,}0148\,t}$

Jahr	2000	2005	2010	2015
linear	904	964	1 024	1 084
exponentiell	908	977	1 053	1 133

2) Das exponentielle Modell liegt näher an den tatsächlichen Werten.

Jahr	2000	2005	2010	2015
Bevölkerung (in Mio.)	1 014	1 095	1 201	1 283

345 1) jährliches Wachstum von 0,74 %

2) Im Rahmen eines Modells werden Vorgänge aus der Realität mithilfe der Mathematik beschrieben. Ob es sinnvoll ist, muss durch Messungen überprüft und validiert werden.
Das Modell kann nicht alle zukünftigen Einflussfaktoren (Kriege, Hungersnöte, …) berücksichtigen. Dass im Jahr 2050 exakt 9,2 Mrd. Menschen auf der Erde leben, ist unwahrscheinlich.

346 **1)** $f(t) = 100 \cdot e^{0{,}0347\,t}$;
Nach rund 266 Minuten wird die kritische Zahl überschritten, genauer nach 4 h 25 min 48 s. Danach kann ein lineares Modell verwendet werden: $f(t) = 1\,000\,000 + 35\,000\,t$
2) In den ersten 5,2 h ist die relative Änderung konstant: Die Anzahl der Bakterien wächst pro Minute um etwa 3,5 %.
Nachdem die kritische Zahl von 1 000 000 Bakterien erreicht ist, steigt die Anzahl linear an. Pro Minute werden 35 000 Bakterien neu gebildet, d. h. die mittlere Änderungsrate (der Differenzenquotient) ist konstant.

347 Im Buch ausgeführt.

348 $f(a) = \log_a a = 1$;
Daher liegt der Punkt $(a|1)$ auf der Funktion.

349 **a)** $f(x) = \log_4 x$ **b)** $f(x) = \log_5 x$
c) $f(x) = \log_3 x$ **d)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

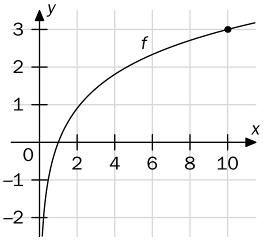
350 $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{E}$ $\boxed{D}$

351 ☐ ☐ ☒ ☒ ☒

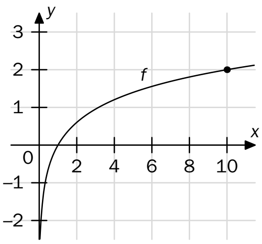
352 **a)** $f(x) = \lg x$ **b)** $f(x) = \log_3 x$
c) $f(x) = \log_{0,5} x$ **d)** $f(x) = \log_2 x$

353 $f(x) > 0$ für $(1, \infty)$; streng monoton steigend

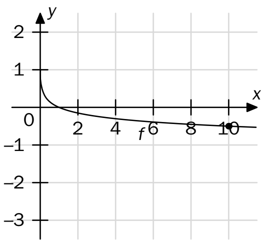
354 **1)** $c = 3$ macht die Funktion steiler. Sie geht durch den Punkt $(10|3)$.



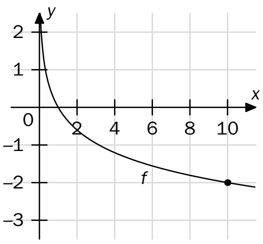
2) $c = 2$ macht die Funktion steiler. Sie geht durch den Punkt $(10|2)$.



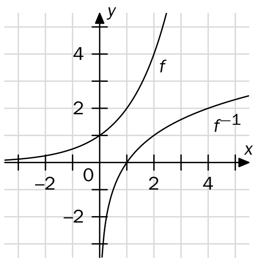
3) $c = -0{,}5$ macht die Funktion flacher. Das negative Vorzeichen spiegelt die Funktion an der x-Achse. Die Funktion geht durch den Punkt $(10|-0{,}5)$.



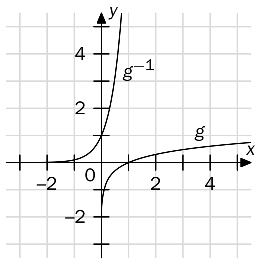
4) $c = -2$ macht die Funktion steiler. Das negative Vorzeichen spiegelt die Funktion an der x-Achse. Die Funktion geht durch den Punkt $(10|-2)$.



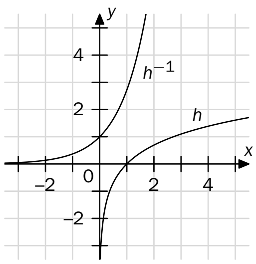
355 **a)** $f^{-1}(x) = \log_2 x$



b) $g^{-1}(x) = 10^x$



c) $h^{-1}(x) = e^x$



356 Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion zur Logarithmusfunktion, d. h. $f(x) = c \cdot \log_a x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = c \cdot a^x$. Für $a = 1$ gilt: $f^{-1}(x) = c \cdot 1^x = c$. Da die konstante Funktion keine Umkehrfunktion besitzt, ist die Funktion $f(x) = c \cdot \log_a x$ für $a = 1$ nicht definiert.

357 **1)** Die y-Achse ist in 10-er Schritten beschriftet.
2) f ist eine Logarithmusfunktion.

358 **1)** Der Schallpegel nimmt um ca. 3 Dezibel zu.
2) Der Schallpegel verringert sich um 10 Dezibel.
3) Die Schallintensität müsste verzehnfacht werden.

359 **a)** $\frac{\pi}{4}$; π; $\frac{16\pi}{9}$ **b)** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; 3π
c) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ **d)** $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{2}$; 4π

360 jeweils mit $k \in \mathbb{Z}$:

a) Nullstellen: $k \cdot \pi$;
lokale Maxima: $2k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$; lokale Minima: $2k \cdot \pi + \frac{3\pi}{2}$
b) Nullstellen: $k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$;
lokale Maxima: $2k \cdot \pi$; lokale Minima: $(2k+1) \cdot \pi$
c) Nullstellen: $k \cdot \pi$; keine lokalen Extremstellen

361 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

362 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

363 **a)** richtig, siehe Schulbuch S. 68
b) richtig, siehe Schulbuch S. 68

364 **a)** $p = \pi$ **b)** $p = \frac{\pi}{3}$ **c)** $p = 4\pi$

365 Für eine periodische Funktion f mit Periode p gilt $f(x) = f(x+p)$. Wenn also die Periode $\frac{2\pi}{k}$ ist, muss gelten $f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = f(x)$.
1. Schritt: Das Argument $x + \frac{2\pi}{k}$ wird in die Funktion $\sin(kx)$ eingesetzt;
2. Schritt: die Klammer wird ausmultipliziert;
3. Schritt: $\sin(kx + 2\pi) = \sin(kx)$
4. Schritt: Man erhält wieder die ursprüngliche Funktion, also ist die Periode $p = \frac{2\pi}{k}$.

366 $f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = \cos\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)\right) = \cos(kx + 2\pi) = \cos(kx) = f(x)$

367 **a)** Der Winkel $-x$ ist der Winkel x gespiegelt an der x-Achse. Die Länge der Gegenkathete im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel x im Einheitskreis ist $\sin(x)$, also ist die Länge der Gegenkathete bei dem an der x-Achse gespiegelten Dreieck $-\sin(x)$; zusammengefasst gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$.
b) Der Winkel $-x$ ist der Winkel x gespiegelt an der x-Achse. Die Länge der Ankathete im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel x im Einheitskreis ist $\cos(x)$, durch Spiegeln an der x-Achse ändert sich die Länge nicht, also gilt $\cos(-x) = \cos(x)$.
c) Vertauscht man im rechtwinkligen Dreieck im Einheitskreis die beiden Katheten, so entspricht das einer Änderung des Winkels x von $180° - 90° - x = 90° - x = \frac{\pi}{2} - x$, also gilt $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, und wegen **b)** auch $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

368 **a) b)** Jeder Funktionswert y kommt in diesem Intervall genau einmal vor, daher existiert auch eine Umkehrfunktion.

369 **a)** $\sin(x)$;
Wenn x und y vertauscht werden, erhält man $\sin(x)$.
b) $\cos(x)$;
Wenn x und y vertauscht werden, erhält man $\cos(x)$.
c) $\tan(x)$;
Wenn x und y vertauscht werden, erhält man $\tan(x)$.

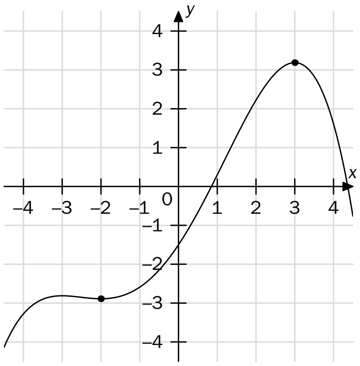
370 **a)** $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
b) $\mathbb{D}_f = [-1; 1]$; $\mathbb{W}_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
c) $\mathbb{D}_f = [-1; 1]$; $\mathbb{W}_f = [0; \pi]$

371 **a)** *1. Schritt*: $\sin \alpha + \beta$ ist die y-Koordinate vom Punkt S, also gleich $r + s$;
2. Schritt: r ist die y-Koordinate vom Punkt A, der vom Ursprung unter dem Winkel α zu sehen ist und einen Abstand von k hat, also ist $r = \sin \alpha \cdot k$; ähnlich ist s die Länge der Ankathete vom Winkel α im Dreieck SCA, also ist $s = \cos \alpha \cdot t$;
3. Schritt: k ist $\cos \beta$ und t ist $\sin \beta$ (stelle dir das Koordinatensystem so gedreht vor, dass die x-Achse durch k verläuft)
b) *1. Schritt*: $\cos(\alpha+\beta)$ ist die x-Koordinate vom Punkt S, also gleich $q - p$;
2. Schritt: q ist die x-Koordinate vom Punkt A, der vom Ursprung unter dem Winkel α zu sehen ist und einen Abstand von k hat, also ist $q = \cos \alpha \cdot k$; ähnlich ist p die Länge der Gegenkathete vom Winkel α im Dreieck SCA, also ist $p = \sin \alpha \cdot t$;
3. Schritt: k ist $\cos \beta$ und t ist $\sin \beta$ (siehe **a)**)

372 C F D E

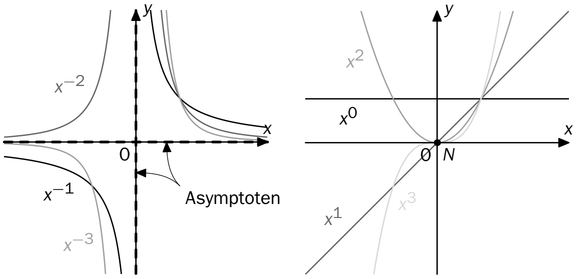
373 E B A C

374 **1)** z. B.:

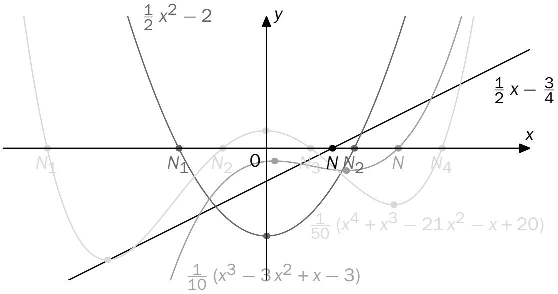


2) Polynomfunktion
3) Die Funktion kann z. B. auf der y-Achse beliebig nach oben oder unten verschoben werden, ohne dass sich die Extremstellen ändern. Der Grad der Polynomfunktion muss gerade sein – nur dann kann die Funktion ein globales Maximum haben.

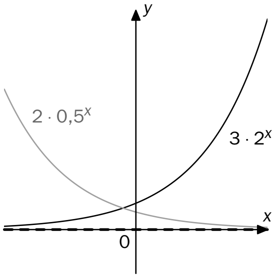
375 *Potenzfunktionen*: z. B.



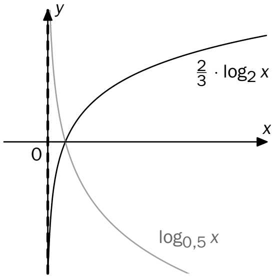
Polynomfunktionen: z. B.



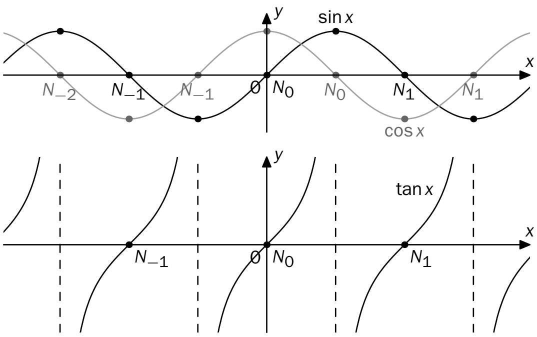
Exponentialfunktionen: z. B.



Logarithmusfunktionen: z. B.



Winkelfunktionen: z. B.



a) *Potenzfunktion*: kein Schnittpunkt für negative Hochzahlen, ein Schnittpunkt für positive natürliche Hochzahlen;
Polynomfunktion: ein Schnittpunkt;
Exponentialfunktion: ein Schnittpunkt an der Stelle $y = c$ mit $f(x) = c \cdot a^x$;
Logarithmusfunktion: kein Schnittpunkt;
Winkelfunktion: Sinus und Tangens an der Stelle $y = 0$, Cosinus an der Stelle $y = 1$

b) *Potenzfunktion*: keine Nullstelle für negative Hochzahlen und die Hochzahl 0, eine Nullstelle für positive Hochzahlen bei $x = 0$;
Polynomfunktion: höchstens n verschiedene Nullstellen, wenn die Polynomfunktion vom Grad n ist;
Exponentialfunktion: keine Nullstelle;
Logarithmusfunktion: eine Nullstelle an der Stelle $x = 1$;
Winkelfunktion: Sinus und Tangens an den Stellen $x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, Cosinus an den Stellen $x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$

c) *Potenzfunktion*: für gerade negative Hochzahlen für negative x streng monoton steigend und für positive x streng monoton fallend; für ungerade negative Hochzahlen jeweils für negative und für positive x streng monoton fallend; für gerade positive Hochzahlen streng monoton fallend bis $x = 0$ und dann streng monoton steigend; für ungerade positive Hochzahlen streng monoton steigend; konstant für die Hochzahl 0;
Polynomfunktion: streng monoton zwischen den Extremstellen;
Exponentialfunktion: streng monoton fallend für $a < 1$ und streng monoton steigend für $a > 1$ mit $f(x) = c \cdot a^x$, für $a = 1$ ist die Funktion konstant;
Logarithmusfunktion: streng monoton fallend für $a < 1$ und streng monoton steigend für $a > 1$ mit $f(x) = c \log_a x$;
Winkelfunktion: für Sinus und Cosinus zwischen den Extrema abwechselnd streng monoton steigend und streng monoton fallend, der Tangens ist zwischen den Asymptoten jeweils streng monoton steigend

d) *Potenzfunktion*: für gerade positive Hochzahlen ein Minimum an der Stelle $x = 0$, für alle anderen Hochzahlen kein globales Extremum;
Polynomfunktion: höchstens ein globales Maximum oder Minimum;
Exponentialfunktion: kein globales Extremum;
Logarithmusfunktion: kein globales Extremum;
Winkelfunktion: beim Sinus globale Maxima an den Stellen $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ und globale Minima an den Stellen $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$;
beim Cosinus globale Maxima an den Stellen $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ und globale Minima an den Stellen $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$;
beim Tangens keine globalen Extrema

e) *Potenzfunktion*: bei negativem ganzzahligen Exponenten sind die beiden Koordinatenachsen die Asymptoten, alle anderen haben keine Asymptoten;
Polynomfunktion: keine Asymptoten;
Exponentialfunktion: x-Achse ist Asymptote;
Logarithmusfunktion: y-Achse ist Asymptote;
Winkelfunktion: keine Asymptoten beim Sinus und Cosinus; Asymptoten beim Tangens an den Stellen $x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

f) *Potenzfunktion*: für gerade positive Hochzahlen ein Minimum an der Stelle $x = 0$, für alle anderen Hochzahlen kein lokales Extremum;
Polynomfunktion: höchstens $n - 1$ lokale Extremstellen, wenn die Polynomfunktion vom Grad n ist;
Exponentialfunktion: kein lokales Extremum;
Logarithmusfunktion: kein lokales Extremum;
Winkelfunktion: beim Sinus lokale Maxima an den Stellen $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ und lokale Minima an den Stellen $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$;
beim Cosinus lokale Maxima an den Stellen $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ und lokale Minima an den Stellen $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$;
beim Tangens keine globalen Extrema

g) *Potenzfunktion*: nicht periodisch;
Polynomfunktion: nicht periodisch;
Exponentialfunktion: nicht periodisch;
Logarithmusfunktion: nicht periodisch;
Winkelfunktion: periodisch

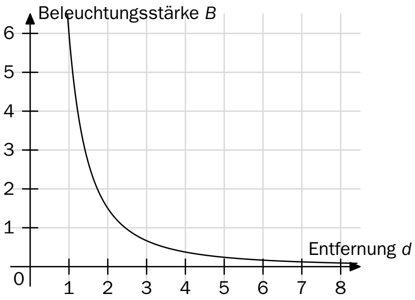
h) *Potenzfunktion*: gerade für gerade Hochzahlen, ungerade für ungerade Hochzahlen;
Polynomfunktion: im Allgemeinen weder gerade noch ungerade;
Exponentialfunktion: weder gerade noch ungerade;
Logarithmusfunktion: weder gerade noch ungerade
Winkelfunktion: Sinus und Tangens sind ungerade, Cosinus ist gerade

376 a) Potenzfunktion mit Exponent 1 und Polynomfunktion vom Grad 1
b) Potenzfunktion mit Exponent -1
c) Polynomfunktion vom Grad 1

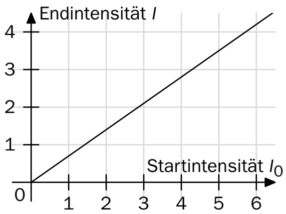
377 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

378 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

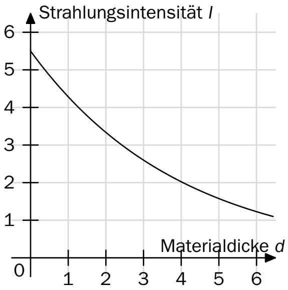
379 Potenzfunktion: $B(d) = k \cdot d^{-2}$; z. B.:



380 a) lineare Funktion (bzw. Potenz- oder Polynomfunktion); z. B.:



b) Exponentialfunktion; z. B.:



381 a) 1) & **2)** & **3)** lineare Funktion (bzw. Polynomfunktion)
b) 1) & **2)** & **3)** lineare Funktion (bzw. Polynomfunktion)
c) 1) lineare Funktion (bzw. Potenz- oder Polynomfunktion)
2) & **3)** Potenzfunktion

d) **1)** & **3)** lineare Funktion
(bzw. Potenz- oder Polynomfunktion)
2) Potenzfunktion

e) **1)** Exponentialfunktion **2)** Potenzfunktion
3) lineare Funktion (bzw. Potenz- oder Polynomfunktion)

f) **1)** lineare Funktion (bzw. Polynomfunktion)
2) Exponentialfunktion **3)** Potenzfunktion

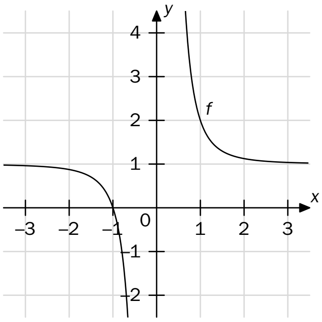
382 Im Buch ausgeführt.

383 Im Buch ausgeführt.

384 **1)** a positiv: f streng monoton steigend;
a negativ: f streng monoton fallend;
für $|a| > 1$: Streckung;
für $0 < |a| < 1$: Stauchung entlang der y-Achse
2) Senkrechte Verschiebung um b Einheiten

385 ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

386



387 **1)** Die Parameter c und a bewirken eine Streckung bzw. Stauchung entlang der y-Achse. Die Funktion g ist stärker gestreckt, daher muss $c > a$ gelten.
2) Die Parameter b und d bewirken eine senkrechte Verschiebung um b bzw. d Einheiten. Die Funktion f liegt weiter unten, also muss $b < d$ gelten.

388 Der Parameter c verschiebt die Funktion entlang der x-Achse und zwar für $c > 0$ nach links und für $c < 0$ nach rechts.

389 **a)** $b = -3$; $c = 2$ **b)** $b = -2$; $c = -1$
c) $b = 1$; $c = -3$ **d)** $b = -1$; $c = 1$

390 Der Parameter e verschiebt die Funktion entlang der y-Achse und zwar für $e > 0$ nach oben und für $e < 0$ nach unten.

391 $f(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0$, also $f(0) = a_0$, also schneidet die Funktion die y-Achse im Punkt $(0|a_0)$.

392 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

393 **1)** Der Parameter d verschiebt die Funktion entlang der y-Achse und zwar für $d > 0$ nach oben und für $d < 0$ nach unten.
2) Der Parameter c verschiebt die Funktion entlang der x-Achse und zwar für $c > 0$ nach links und für $c < 0$ nach rechts.

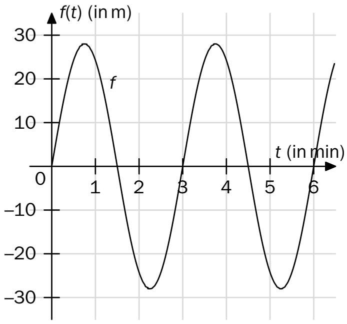
394 **a)** $b = 2$ **b)** $b = -1$ **c)** $a = -1$ **d)** $a = 2$
e) $a = 2$; $b = -1$ **f)** $a = -3$; $b = -2$

395 **a)** Der Parameter a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung entlang der y-Achse. Für $a > 0$ wird der Graph gestreckt, für $0 < a < 1$ wird er gestaucht und für $a < 0$ wird er an der y-Achse gespiegelt und entsprechend gestaucht oder gestreckt.
b) Der Parameter b bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung entlang der x-Achse. Für $b > 1$ wird der Graph gestaucht, für $0 < b < 1$ wird er gestreckt und für $b < 0$ wird er an der y-Achse gespiegelt und entsprechend gestaucht oder gestreckt.

396 **a)** $a = 2$ **b)** $a = -1$ **c)** $b = 4$
d) $b = \frac{1}{3}$ **e)** $a = -2$; $b = 2$ **f)** $a = b = \frac{1}{2}$
g) $a = 2$; $b = \frac{1}{2}$ **h)** $a = -1$; $b = 2$

397 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

398 **1)** Eine Umdrehung dauert 3 Minuten und der Durchmesser ist 56 m.



2) Statt 28 müsste 60 eingesetzt werden und statt $\frac{2\pi}{3}$ eine entsprechend kleinere Zahl.

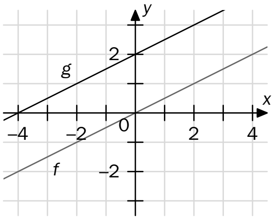
399 **1)** Der Parameter c verschiebt die Funktion entlang der x-Achse und zwar für $c > 0$ nach links und für $c < 0$ nach rechts.
2) Der Parameter d verschiebt die Funktion entlang der y-Achse und zwar für $d > 0$ nach oben und für $d < 0$ nach unten.

400 $c = \frac{\pi}{2}$

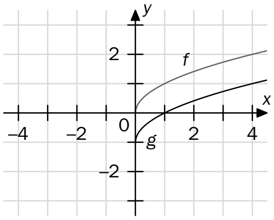
401 **a)** $c = -\frac{\pi}{2}$; $d = 1$ **b)** $c = \pi$; $d = -1$
c) $c = -\frac{\pi}{2}$; $d = -2$ **d)** $c = 0$; $d = 3$

402 $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{F}}$

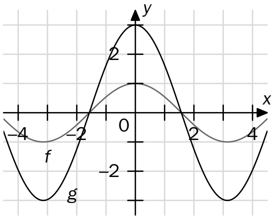
403 **a)**



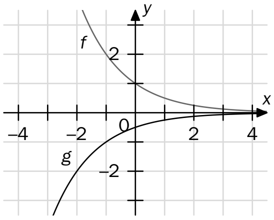
b)



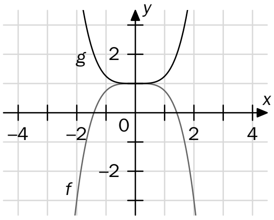
c)



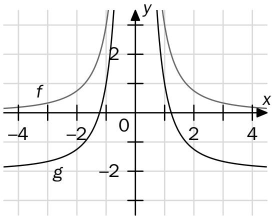
d)



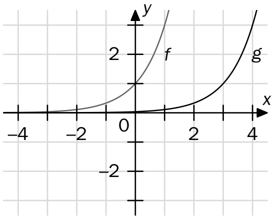
e)



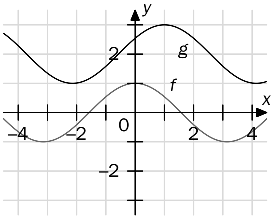
f)



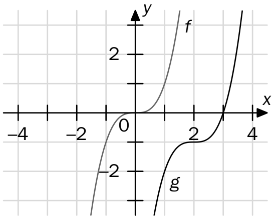
404 **a)**



b)



c)



405 Im Buch ausgeführt.

406 **a)** $\omega = 2\pi$; $f = 1$; $s(t) = 2\sin(2\pi t)$
b) $\omega = \frac{2\pi}{5}$; $f = \frac{1}{5}$; $s(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$
c) $\omega = 3\pi$; $f = \frac{3}{2}$; $s(t) = \sin(3\pi t)$

407 2; $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{\pi}$

408 **1)** **a)** $r = 2{,}5$; $T = 4\pi$
b) $r = 1{,}5$; $T = \frac{2\pi}{3}$ **c)** $r = 1{,}4$; $T = \frac{\pi}{2}$

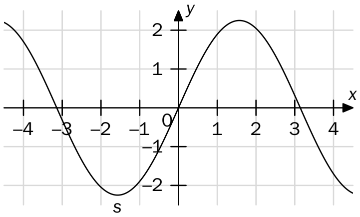
2) **a)** $f = \frac{1}{4\pi}$; $\omega = \frac{1}{2}$ **b)** $f = \frac{3}{2\pi}$; $\omega = 3$
c) $f = \frac{2}{\pi}$; $\omega = 4$

3) **a)** $s(t) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ **b)** $s(t) = 1{,}5 \cdot \sin(3t)$
c) $s(t) = 1{,}4 \cdot \sin(4t)$

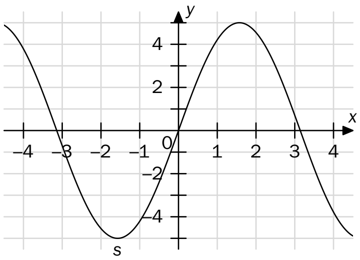
409 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

410 Die Grundschwingung *f* hat die Amplitude 1 und die Schwingungsdauert 2π.

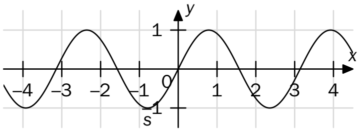
a) Der Graph von *f* wird entlang der *y*-Achse um den Faktor 2,25 gestreckt. Die Amplitude von *s* ist 2,25-mal so groß wie die Amplitude von *f*.
Der Graph von *f* wird entlang der *x*-Achse nicht gestreckt.
$\Rightarrow$ *s* hat eine Schwingungsdauer von 2π.



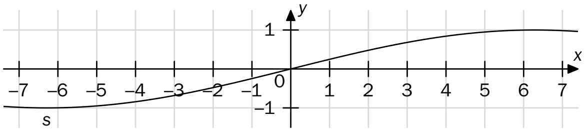
b) Der Graph von *f* wird entlang der *y*-Achse um den Faktor 5 gestreckt. Die Amplitude von *s* ist 5-mal so groß wie die Amplitude von *f*.
Der Graph von *f* wird entlang der *x*-Achse nicht gestreckt.
$\Rightarrow$ *s* hat eine Schwingungsdauer von 2π.



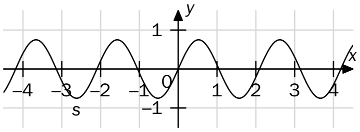
c) Der Graph von f wird entlang der y-Achse nicht gestreckt. Die Amplitude ist daher 1.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 2 gestaucht (bzw. um den Faktor 0,5 gestreckt). Für s gilt: $\omega = 2$ und $T = \pi \Rightarrow s$ hat die halbe Schwingungsdauer im Vergleich zu f.



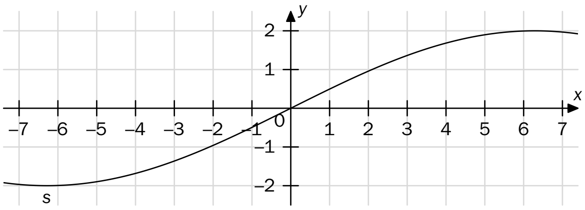
d) Der Graph von f wird entlang der y-Achse nicht gestreckt. Die Amplitude ist daher 1.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 4 gestreckt. Für s gilt: $\omega = \frac{1}{4}$ und $T = 8\pi \Rightarrow s$ hat die vierfache Schwingungsdauer im Vergleich zu f.



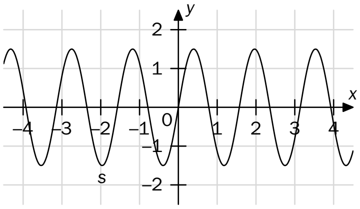
e) Der Graph von f wird entlang der y-Achse um den Faktor $\frac{3}{4}$ gestreckt. Die Amplitude von s ist nur $\frac{3}{4}$-mal so groß wie die Amplitude von f.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 3 gestaucht (bzw. um den Faktor $\frac{1}{3}$ gestreckt). Für s gilt: $\omega = 3$ und $T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow s$ hat ein Drittel der Schwingungsdauer von f.



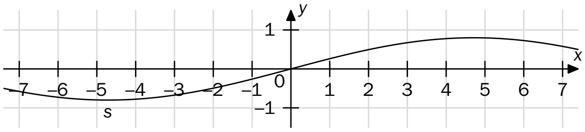
f) Der Graph von f wird entlang der y-Achse um den Faktor 2 gestreckt. Die Amplitude von s ist 2-mal so groß wie die Amplitude von f.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 4 gestreckt. Für s gilt: $\omega = 0{,}25$ und $T = 8\pi \Rightarrow s$ hat die vierfache Schwingungsdauer im Vergleich zu f.



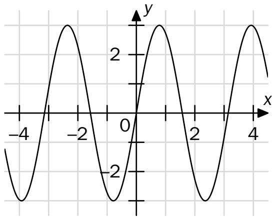
g) Der Graph von f wird entlang der y-Achse um den Faktor 1,5 gestreckt. Die Amplitude von s ist 1,5-mal so groß wie die Amplitude von f.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 4 gestaucht (bzw. um den Faktor $\frac{1}{4}$ gestreckt). Für s gilt: $\omega = 4$ und $T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s$ hat ein Viertel der Schwingungsdauer im Vergleich zu f.



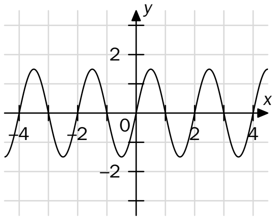
h) Der Graph von f wird entlang der y-Achse um den Faktor 0,8 gestreckt. Die Amplitude von s ist 0,8-mal so groß wie die Amplitude von f.
Der Graph von f wird entlang der x-Achse um den Faktor 3 gestreckt. Für s gilt: $\omega = \frac{1}{3}$ und $T = 6\pi \Rightarrow s$ hat die dreifache Schwingungsdauer im Vergleich zu f.



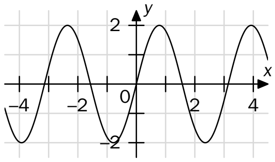
411 **a)** $s(t) = 3 \cdot \sin(2\,t)$



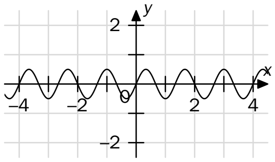
b) $s(t) = 1{,}5 \cdot \sin(\pi\,t)$



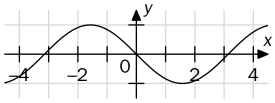
c) $s(t) = 2 \cdot \sin(2\,t)$



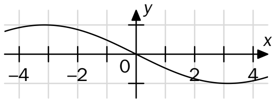
d) $s(t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\,t\right)$



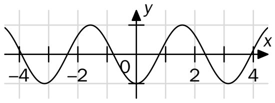
412 **1)** **a)**



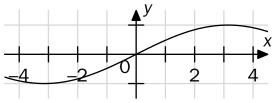
b)



c)



d)



2) **a)** $\varphi_0 = -\pi$ **b)** $\varphi_0 = \pi$
c) $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ **d)** $\varphi_0 = 2\pi$
3) **a)** um π **b)** um 2π **c)** um $\frac{\pi}{4}$ **d)** um 0

413 Im Buch ausgeführt.

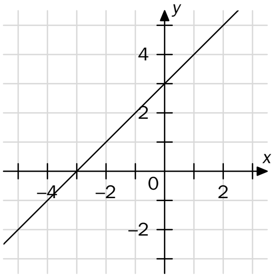
414 Im Buch ausgeführt.

415 Im Buch ausgeführt.

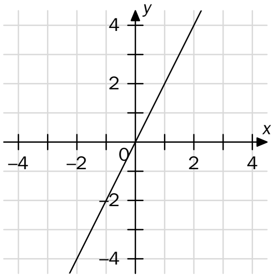
416 **a)** $h = f \circ g$ mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2$
b) $h = f \circ g$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \sin(x)$
c) $h = f \circ g$ mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x^2$
d) $h = f \circ g$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = 4^x$
e) $h = f \circ g$ mit $f(x) = 4x$ und $g(x) = \sin(x)$
f) $h = f \circ g$ mit $f(x) = 6x$ und $g(x) = x^2$

417 ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

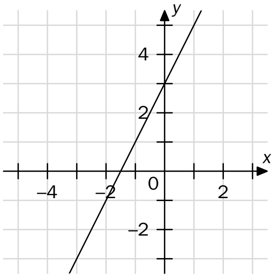
418 **a)** $f(x) = x + 3$



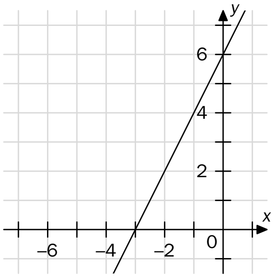
$g(x) = 2 \cdot x$



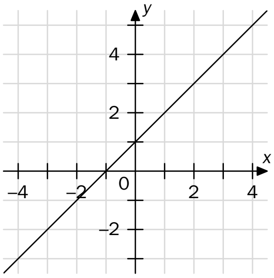
$(f \circ g)(x) = 2x + 3$



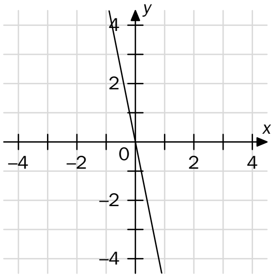
$(g \circ f)(x) = 2x + 6$



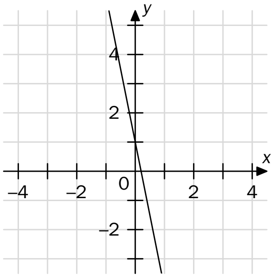
b) $f(x) = x + 1$



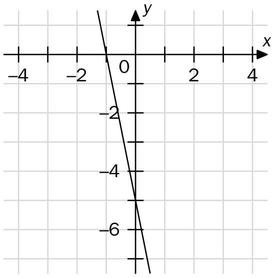
$g(x) = -5 \cdot x$



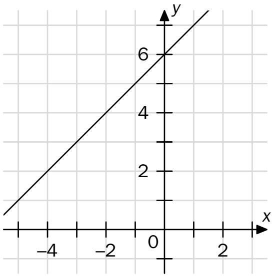
$(f \circ g)(x) = -5x + 1$



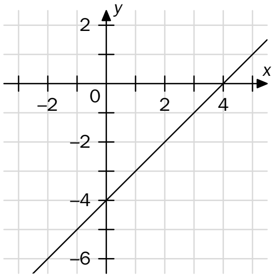
$(g \circ f)(x) = -5x - 5$



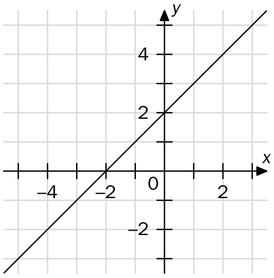
c) $f(x) = x + 6$



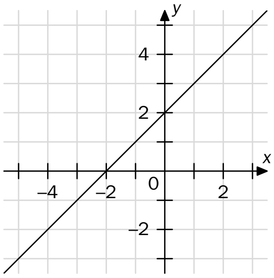
$g(x) = x - 4$



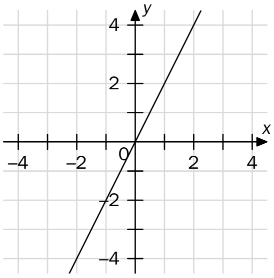
$(f \circ g)(x) = x + 2$



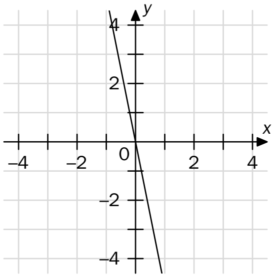
$(g \circ f)(x) = x + 2$



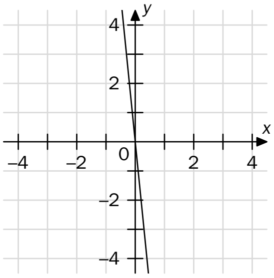
d) $f(x) = 2 \cdot x$



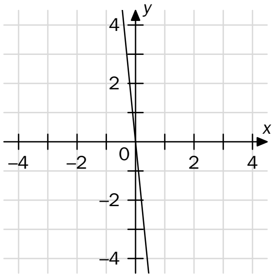
$g(x) = -5 \cdot x$



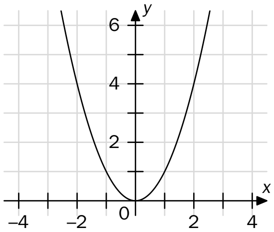
$(f \circ g)(x) = -10x$



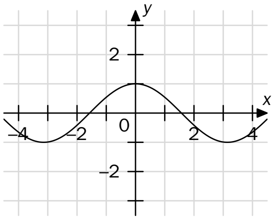
$(g \circ f)(x) = -10x$



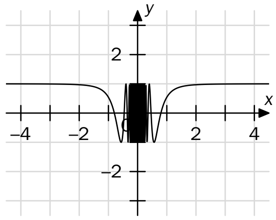
e) $f(x) = x^2$



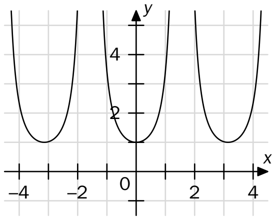
$g(x) = \cos x$



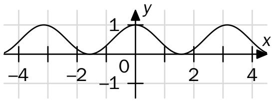
$(f \circ g)(x) = \cos(x^{-2})$



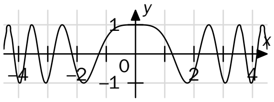
$(g \circ f)(x) = (\cos x)^{-2}$



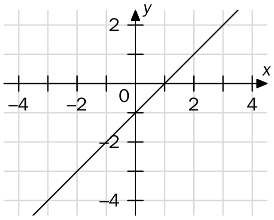
$(f \circ g)(x) = (\cos x)^2$



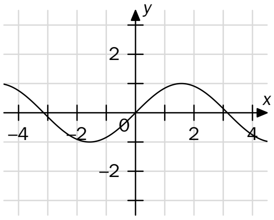
$(g \circ f)(x) = \cos(x^2)$



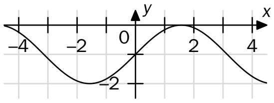
f) $f(x) = x - 1$



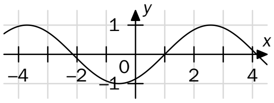
$g(x) = \sin x$



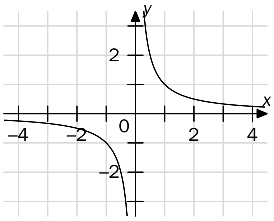
$(f \circ g)(x) = \sin x - 1$



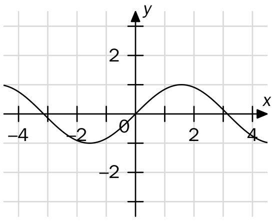
$(g \circ f)(x) = \sin(x - 1)$



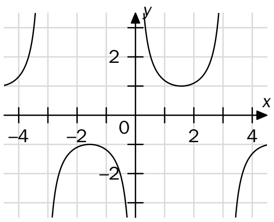
g) $f(x) = x^{-1}$



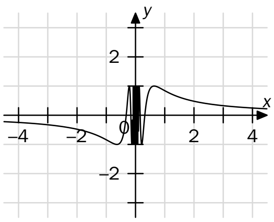
$g(x) = \sin x$



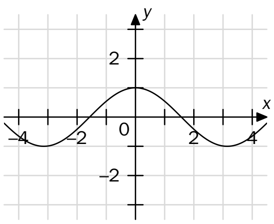
$(f \circ g)(x) = (\sin x)^{-1}$



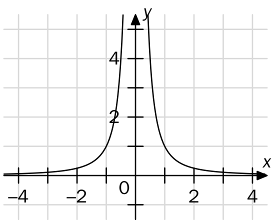
$(g \circ f)(x) = \sin(x^{-1})$



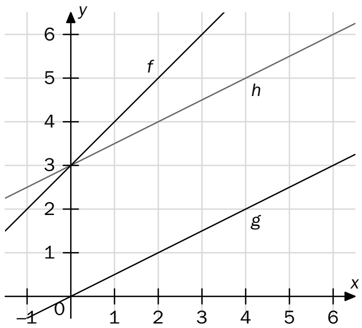
h) $f(x) = \cos x$



$g(x) = x^{-2}$



419 z. B.: $f(x) = x + 3$; $g(x) = \frac{x}{2}$



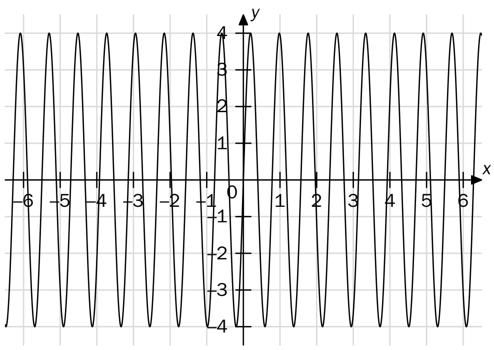
420 **a)** $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$, aber $(g \circ f)(x) = 2 \cdot (x+3)^2$

b) $(f \circ g)(x) = (\cos x)^2$, aber $(g \circ f)(x) = \cos(x^2)$

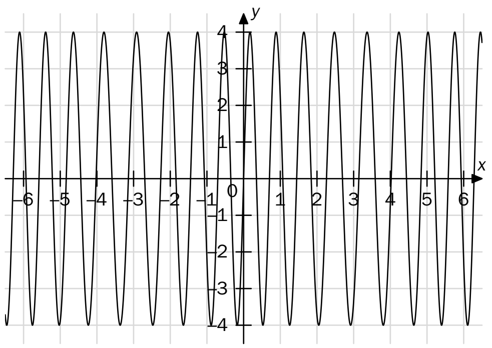
c) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$, aber $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$

d) $(f \circ g)(x) = 2e^x - 7$, aber $(g \circ f)(x) = e^{2x-7}$

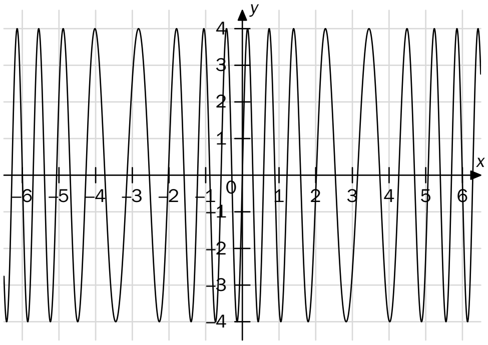
421 **1)** $(f \circ g)(x) = 4\,\sin(8x)$



2) $(f \circ g)(x) = 4\,\sin(8x + \sin x)$



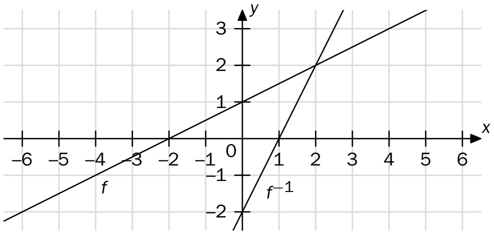
3) $(f \circ g)(x) = 4\sin(8x + 3\sin x)$



422 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

423 f ist streng monoton wachsend für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher bijektiv; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$;
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+1) = \frac{(3x+1)-1}{3} = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x-1}{3} + 1 = x$

424 **1)** $f^{-1}(x) = 2x - 2$
2)



3) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right) - 2 = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2x-2) = \frac{2x-2}{2} + 1 = x$

425 **a)** $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$
b) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$; $f^{-1}(x) = \ln x$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln(e^x) = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x$
c) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{3}{x}$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{\frac{3}{x}} = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{\frac{3}{x}} = x$
d) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = 10^x$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\lg x) = 10^{\lg x} = x$;
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(10^x) = \lg(10^x) = x$

426 Es kommt überall die Funktion selbst heraus. Die Verkettung mit der identischen Funktion ändert also nichts an der Funktion.
1) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x^2$
2) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = e^x$
3) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$

427 **a)** $f_n(x) = x + n$ **b)** $f_n(x) = x - 3n$
c) $f_n(x) = 5^n x$ **d)** $f_n(x) = 2^n x$ **e)** $f_n(x) = \frac{x}{4^n}$
f) $f_n(x) = \frac{x}{(-3)^n}$ **g)** $f_n(x) = x^{(2^n)}$
h) $f_n(x) = (-1)^n x^{(2^n)}$ **i)** $f_n(x) = 5^{(2 - 0{,}5^{n-1})} x^{(0{,}5^n)}$
j) $f_n(x) = 9^{(2^n - 1)} x^{(2^n)}$

428 Im Buch ausgeführt.

429 Im Buch ausgeführt.

430 **a)** $f(0,0) = 0$; $f(1,4) = 4$; $f(-2,3) = -6$
b) $f(0,0) = 0$; $f(1,4) = -25$; $f(-2,3) = -27$
c) $f(0,0) = 0$; $f(1,4) = 5$; $f(-2,3) = 16$
d) $f(0,0) = 0$; $f(1,4) = \frac{2}{9}$; $f(-2,3) = -\frac{4}{7}$

431 **1)** $h(V,a) = \frac{V}{a^2}$
2) $h(12,2) = 3$; $h(90,3) = 10$;
Ein quadratisches Prisma mit Seitenlänge 2 und Volumen 12 hat eine Höhe von 3. Ein quadratisches Prisma mit Seitenlänge 3 und Volumen 90 hat eine Höhe von 10.

432 **1)** 100 Geldeinheiten
2) Nur die Menge in der dritten Zeile ist wirtschaftlich sinnvoll, da hier ein Erlös von 16 Geldeinheiten gemacht wird. Für die Mengen in den ersten beiden Zeilen wird ein Verlust von 65 bzw. 16 Geldeinheiten gemacht.
3) Die Ware A wird pro Stück um 10, die Ware B um 26 Geldeinheiten verkauft.

433 **1)** $T(p,V) = \frac{P \cdot V}{R}$
2) $T(10^5, 0{,}025) \approx 300{,}84$

434 Die Punkte liegen nicht auf derselben Höhe, da $f(-2,-2) = \sqrt{17}$, aber $f(2,0) = \sqrt{21}$ ist.

435 **1)** $f(0,0) = 1{,}5$; Im Punkt $(0|0)$ hat die Welle eine momentane Auslenkung von 1,5.
2) $f(2,3) \approx -1{,}34$; Im Punkt $(2|3)$ hat die Welle eine momentane Auslenkung von $-1{,}34$.
3) $f(5,5) = 1{,}06$; Im Punkt $(5|5)$ hat die Welle eine momentane Auslenkung von 1,06.

436 Der Punkt liegt über 5 000 m ($f(0,2) \approx 5{,}24$).

437 Liegen zwei Punkte A und B mit $A = (a|b)$ und $B = (x|y)$ auf einer Höhenlinie, so gilt: $f(a,b) = f(x,y)$. Die Funktionswerte (entsprechen in diesem Fall der Höhe) sind entlang einer Höhenlinie immer gleich.

438 a) Spiegelung entlang der Geraden $y = x$
b) 90°-Drehung um den Punkt $(0|0)$
c) Verschiebung um $(4|-2)$
d) Spiegelung entlang der Geraden $y = 0{,}5x$
e) Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$

439 1) Um den Normalabstand zu bestimmen, berechnen wir zuerst den Schnittpunkt von der Geraden $y = x$ und einer dazu Normalen durch einen beliebigen Punkt mit der Gleichung $y = -x + d$. Durch Lösen des Gleichungssystems erhalten wir den Schnittpunkt der beiden Geraden: $S = \left(\frac{d}{2}\middle|\frac{d}{2}\right)$. Damit ist
$\overline{SP} = |P - S| = \left|(x|y) - \left(\frac{d}{2}\middle|\frac{d}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}$
und $\overline{SS_P} = |P - S_P| = \left|(y|x) - \left(\frac{d}{2}\middle|\frac{d}{2}\right)\right| =$
$= \sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}$
Sie haben den gleichen Normalabstand.
2) $\overrightarrow{PS_P} = S_P - P = \binom{y}{x} - \binom{x}{y} = \binom{y-x}{x-y}$
Die Gerade $y = x$ entspricht dem Vektor $(x|x)$. Wenn das Skalarprodukt der beiden Null ergibt, so stehen sie normal aufeinander:
$(x|x)\cdot(y - x|x - y) = x\cdot(y-x)+x\cdot(x-y) = xy-x^2+x^2-xy = 0$

440 1) $\overline{OP} = \left|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\overline{OS_P} = \left|\binom{-y}{x} - \binom{0}{0}\right| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
P und S_P haben den gleichen Abstand vom Ursprung.
2) $\binom{x}{y} \cdot \binom{-y}{x} = -xy + xy = 0$
Da das Skalarprodukt null ergibt, stehen sie normal aufeinander.

441 Im Buch ausgeführt.

442 Im Buch ausgeführt.

443 Im Buch ausgeführt.

444 Im Buch ausgeführt.

445 a) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$;
Extremstellen: $x_{min} = 2$; $x_{max} = 0$
b) Nullstellen: $x_1 = 5$; $x_2 = 0$;
Extremstellen: $x_{min} = \frac{10}{3}$; $x_{max} = 0$
c) Nullstelle: $x = 5$; Extremstelle: $x_{min} = 3$
d) Nullstelle: $x = 0$;
Extremstellen: $x_{min} = 0$; $x_{max} = 2{,}5$
e) Nullstelle: $x = -4$; keine Extremstellen

446 a) Der Parameter a streckt bzw. staucht die Funktion entlang der y-Achse; der Parameter b verändert den Grad der Funktion.
b) Der Parameter a streckt bzw. staucht die Funktion entlang der y-Achse; der Parameter b streckt bzw. staucht sie entlang der x-Achse.
c) Der Parameter a verschiebt die Funktion entlang der x-Achse; der Parameter b verschiebt sie entlang der y-Achse.
d) Der Parameter a streckt bzw. staucht die Funktion entlang der y-Achse; der Parameter b verschiebt die Funktion entlang der x-Achse.
e) Der Parameter a verändert die Amplitude, der Parameter b die Periode.

447 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

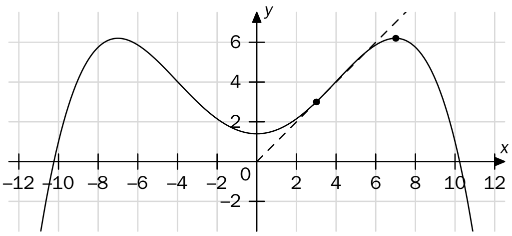
448 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

449 C F D B

450 C F E B

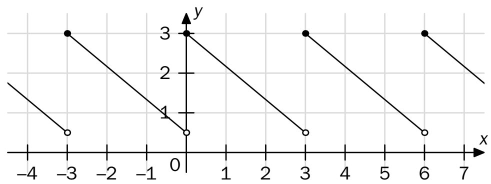
451 ☒ ☐ ☐ ☒ ☒

452 z. B.:

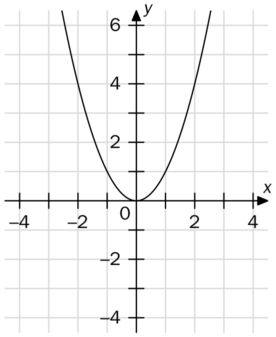


453 a) falsch, z. B. wenn die Funktion zuerst streng monoton fallend ist und dann irgendwann konstant wird gibt es unendlich viele globale Minima
b) falsch, z. B. die Funktion $f(x) = -x^2 + 3x$ hat die zwei Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$
c) falsch, z. B. die Funktion $f(x) = x^2$ ist symmetrisch, hat aber keine Asymptote bei der y-Achse
d) falsch, z. B. die Exponentialfunktion $f(x) = -2 \cdot 3^x$ hat negative Funktionswerte

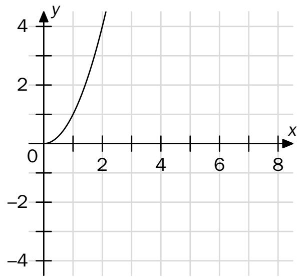
454 Jede Funktion, die in $[0;3]$ streng monoton fallend ist, ist auch in $(0;3)$ streng monoton fallend. Umgekehrt gilt das aber nicht, z. B. ist die folgende periodische Funktion streng monoton fallend in $(0;3)$ aber nicht in $[0;3]$.



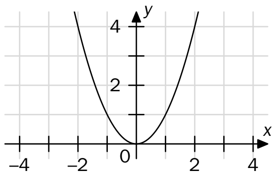
455 f_1 ist *nicht injektiv*, weil z. B. der Funktionswert 4 zweimal auftritt: $f_1(-2) = f_1(2) = 4$;
f_1 ist *nicht surjektiv*, weil es kein Argument mit dem Funktionswert -4 gibt;
f_1 ist *nicht bijektiv*, weil f_1 weder injektiv noch surjektiv ist



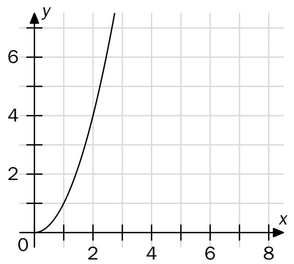
f_2 ist *injektiv*, weil jeder Funktionswert höchstens einmal vorkommt. Im Vergleich zu f_1 wird dies durch die Einschränkung der Definitionsmenge auf $\mathbb{R}_0^+$ erreicht.
f_2 ist *nicht surjektiv*, weil es kein Argument mit dem Funktionswert -4 gibt;
f_2 ist *nicht bijektiv*, weil f_2 nicht surjektiv ist



f_3 ist *nicht injektiv*, weil z. B. der Funktionswert 4 zweimal auftritt:
$f_3(-2) = f_3(2) = 4$;
f_3 ist *surjektiv*, weil jedes $y \in W = \mathbb{R}_0^+$ als Funktionswert auftritt. Durch die Einschränkung der Wertemenge auf $\mathbb{R}_0^+$ wird der Fall, der bei f_1 und f_2 aufgetreten ist, vermieden.
f_3 ist *nicht bijektiv*, weil f_3 nicht injektiv ist

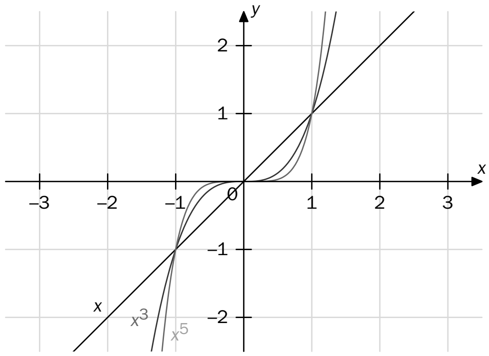


f_4 ist *injektiv*, weil jeder Funktionswert höchstens einmal vorkommt;
f_4 ist *surjektiv*, weil jedes $y \in W = \mathbb{R}_0^+$ als Funktionswert auftritt;
f_4 ist *bijektiv*, weil f_4 injektiv und surjektiv ist

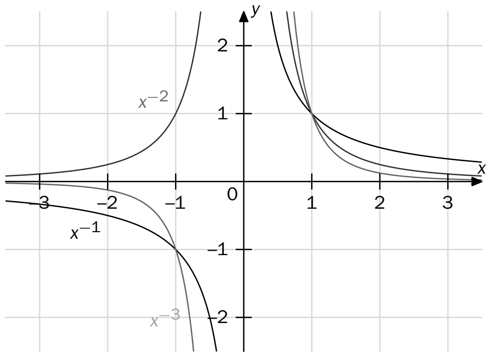


456 1) Die Arbeitslosenrate ist ein anderes Änderungsmaß.
2) Nein, denn die Bevölkerungszahl steigt.

457 1) Für $x \in [-1; 1]$ nähert sich der Graph bei größer werdendem Exponenten immer weiter der x-Achse an, d. h. die Funktionswerte werden immer kleiner. Die Kurve wird daher flacher.
Außerhalb des Intervalls werden die Funktionswerte mit wachsendem Exponenten immer größer, die Kurve wird daher steiler.
2) Multipliziert man eine Zahl aus dem Intervall $[-1; 1]$ wiederholt mit sich selbst, so wird das Ergebnis (dem Betrag nach) kleiner, z. B.:
$f_1(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$;
$f_2(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625$;
$f_3(0{,}5) = 0{,}5^6 = 0{,}015625$;
Potenziert man eine Zahl außerhalb des Intervalls, so wird das Ergebnis (dem Betrag nach) größer.
3) Die Überlegungen aus **1)** und **2)** können auch auf Exponenten aus $\mathbb{Z}_u^+$ übertragen werden:



Für Exponenten aus $\mathbb{Z}^-$ gilt es zu beachten, dass die Division durch immer kleiner werdende positive Zahlen das Ergebnis vergrößert. Für $x \in [-1; 1]$ wird die Kurve steiler, außerhalb des Intervalls wird die Kurve flacher.



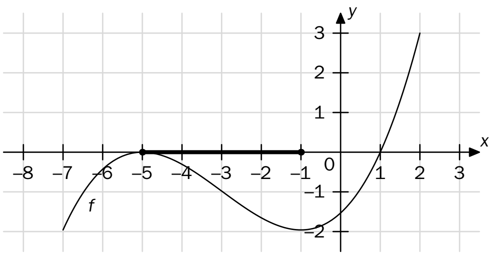
458 Wenn f und g Umkehrfunktionen sind, dann muss $(g \circ f)(x) = x$ gelten. Dies kann mithilfe der beiden Grafiken gezeigt werden:
Wir starten mit der Abbildung links: Die blauen Pfeile führen vom Punkt $(x|0)$ über die Punkte $\big(x\big|f(x)\big) = (x|\ln x)$ und $\big(f(x)\big|f(x)\big)$ zum Punkt $\big(f(x)\big|0\big)$.
Weiter geht es mit der Abbildung rechts: Die roten Pfeile führen vom Punkt $(f(x)|0)$ über den Punkt $\big(f(x)\big|g(f(x))\big) = \big(f(x)\big|(g \circ f)(x)\big)$ und den Punkt $\big((g \circ f)(x)\big|(g \circ f)(x)\big)$ zurück zum Punkt $(x|0)$.
Die Behauptung folgt aus dem Vergleich der x-Koordinaten der Punkte $\big((g \circ f)(x)\big|(g \circ f)(x)\big)$ und $(x|0)$.

459 *1. Schritt*: Die Definition von $f \circ g$ wird verwendet und der Reihe nach zuerst $g(x)$, dann $f(e^x)$ eingesetzt;
2. Schritt: $\ln(e^x)$ wird z gesetzt und die Gleichung durch Potenzieren gelöst. Man erhält $z = x$ und damit ist $\ln(e^x) = x$, also $(f \circ g)(x) = x$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = e^{\ln x}$; $\quad e^{\ln x} = z \Leftrightarrow \ln x = \ln z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = x \quad \Rightarrow \quad e^{\ln x} = x \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = e^{\ln x} = x$

460 ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

461 $f(x) = 5\,x^4$; $\quad f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

462



463 ☒ ☒ ☒ ☐ ☐

464 zur y-Achse; $\quad z$ eine gerade Zahl

465 D E A F

466 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

467 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

468 $a = 1$; $\quad b = 2$

469 z. B.: $g(x) = x^3 + x^2 - 2\,x$

470 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

471 Die Funktion f hat mindestens Grad 4, da es drei Extremstellen gibt.

472 $d > 0$; $\quad$ die positive y-Achse

473 $p(t) = 3^t$

474 $a = \frac{3}{4}$

475 $f(x) = 3 \cdot 2^x$

476 Wäre es eine Exponentialfunktion mit $f(x) = c \cdot a^x$, so müsste gelten: $c = 1$ und $a = 2$, also $f(x) = 2^x$. Bei $x = 2$ müsste der Funktionswert daher 4 sein, er ist aber 5.

477 $a = \frac{1}{2}$; $\quad c = 2$

478 Nach 6 Stunden sind noch rund 5,3 mg vorhanden.

479 $a < 1$; $\quad k < 0$

480 Pro Meter gehen rund 10,9 % verloren.

481 Die Bakterienkultur wächst pro Stunde um ca. 19,2 %.

482 Der Anfangsdruck beträgt 3,2 bar. Nach jeder Sekunde sinkt der Druck um 60 % (1 – 0,4).

483 ☒ ☒ ☐ ☐ ☐

484 Um 14:30 Uhr befindet sich nur noch $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge im Körper.

485 $a = 1{,}5$; $\quad b = 3$

486 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

487 Die Winkelgeschwindigkeit beträgt $0{,}4\,h^{-1}$.

488 ☒ ☒ ☐ ☒ ☐

489 **a)** $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} =$
$= -\sinh(x) \Rightarrow \sinh(x)$ ist eine ungerade Funktion;
$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
$\Rightarrow \cosh(x)$ ist eine gerade Funktion;
$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$
$\Rightarrow \tanh(x)$ ist eine ungerade Funktion

b) Sei $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eine Funktion, wobei $f(x)$ eine gerade Funktion und $g(x)$ eine ungerade Funktion ist. Dann gilt $h(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{-g(x)} = -h(x) \Rightarrow h(x)$ ist eine ungerade Funktion. Wenn $f(x)$ eine ungerade und $g(x)$ eine gerade Funktion ist, folgt analog, dass $h(x)$ auch da eine ungerade Funktion ist.

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide gerade Funktionen sind, gilt: $h(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \Rightarrow h(x)$ ist eine gerade Funktion.

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide ungerade Funktionen sind, gilt: $h(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \Rightarrow h(x)$ ist eine gerade Funktion.

c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{(e^x)^2 + 2\,e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2\,e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} =$

$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} =$

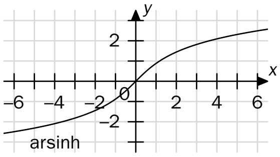
$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1;$

$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} =$

$= \frac{2\,e^x}{2} = e^x$

d) $\sinh(x)$: Nullstelle bei $x = 0$; keine Extremstellen;
$\cosh(x)$: keine Nullstellen; Minimum bei $x_{\min} = 0$;
$\sinh(x)$ ist streng monoton steigend;
$\cosh(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}^-$ streng monoton fallend und für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton steigend

e) $\operatorname{arsinh}(x)$: $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$



490 a) zum Beginn und am Ende: lineare Funktion; in der Mitte: Polynomfunktion;
unabhängige Variable: Zeit (in s);
abhängige Variable: Höhe (in ft);
der Parabelflug beginnt und endet bei einer Flughöhe von 17 000 ft

b) Die Angaben passen auch für diesen Flugzeugtyp, da in der Phase 3 Schwerelosigkeit herrscht und diese 20-25 Sekunden dauert. Dabei wird sogar eine Flughöhe von rund 910 Höhenmeter durchflogen. Die globalen Minima werden am Beginn (nach 0 s) und am Ende (ab ca. 68 s – 73 s) des Parabelflugs erreicht, hier ist das Flugzeug während des Parabelflugs am niedrigsten. Das Maximum wird zwischen 35 s – 37,5 s erreicht, hier ist das Flugzeug am höchsten Punkt.

c) Die Funktion ist nicht gerade, da sie nicht symmetrisch bzgl. der *y*-Achse ist.
Die Funktion ist nicht bijektiv, da zu mehreren Höhenangaben zwei Zeitangaben gehören, weil das Flugzeug hinauf und hinunter fliegt.

Thema: Schwingungen in der Musik

T1 Überlagert man zwei Sinusschwingungen gleicher Frequenz mit unterschiedlicher Phase, so erhält man als Lösung eine Schwingung derselben Frequenz.

Überlagert man Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen mit gleicher Phase, so erhält man eine Schwingung, deren Frequenz der größte gemeinsame Teiler der beiden ursprünglichen Frequenzen ist. Ist die Frequenz einer Schwingung irrational, so ist die Summenschwingung nicht mehr periodisch.

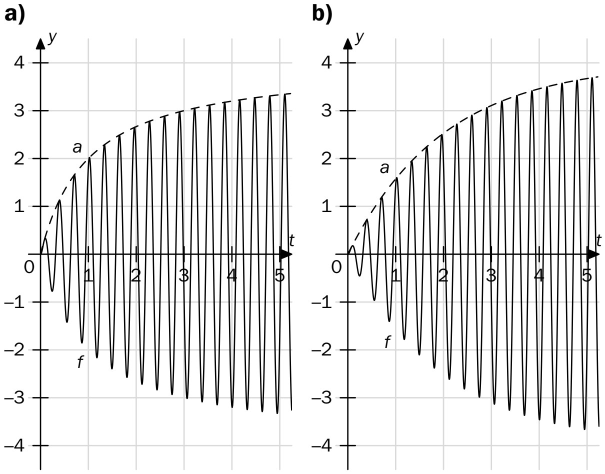
T2 Zwei genau entgegengesetzte bzw. um eine halbe Periode verschobene Sinusschwingungen gleicher Frequenz löschen sich aus.

T3 Die Funktion wird immer „spitzer“ (bzw. dreieckiger), je mehr Summanden hinzukommen.

T4 Die Funktion wird immer „eckiger“
(bzw. rechteckiger), je mehr Summanden hinzukommen.

T5 experimentelle Aufgabe

T6 In beiden Fällen wird der Ton lauter.



4. Folgen

491 Im Buch ausgeführt.

492 Im Buch ausgeführt.

493 **a)** **1)** 85, 102
2) Die Folge besteht aus den Vielfachen von 17;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 17$ mit $a_1 = 17$;
explizit: $a_n = n \cdot 17$ mit $n \geq 1$

b) **1)** 32, 35
2) In jedem Schritt wird 3 addiert;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 20$;
explizit: $a_n = n \cdot 3 + 17$ mit $n \geq 1$

c) **1)** 9, 11
2) Die Folge besteht aus den ungeraden Zahlen;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 1$;
explizit: $a_n = n \cdot 2 - 1$ mit $n \geq 1$

d) **1)** 32, 64
2) In jedem Schritt wird mit 2 multipliziert;
rekursiv: $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ mit $a_1 = 2$;
explizit: $a_n = 2^n$ mit $n \geq 1$

e) **1)** $-1, 1$
2) Die Folge besteht abwechselnd aus 1 und -1;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot (-1)$ mit $a_1 = 1$;
explizit: $a_n = (-1)^{n+1}$ mit $n \geq 1$

f) **1)** $\frac{1}{243}, -\frac{1}{729}$
2) In jedem Schritt wird mit $-\frac{1}{3}$ multipliziert;
rekursiv: $a_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot a_n$ mit $a_1 = \frac{1}{3}$;
explizit: $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}$ mit $n \geq 1$

494 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

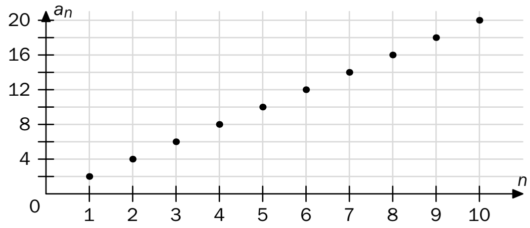
495 **a)** $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$
b) $(a_n) = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$
c) $(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$
d) $(a_n) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$
e) $(a_n) = (2, 0, 2, 0, 2, \ldots)$
f) $(a_n) = (0, 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}, \ldots)$

496 **a)** $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$
b) $(a_n) = (0, -3, -9, -21, -45, \ldots)$
c) $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{39}{256}, \frac{8\,463}{65\,536}, \ldots\right)$
d) $(a_n) = \left(2, \frac{2}{5}, \frac{2}{17}, \frac{2}{53}, \frac{2}{161}, \ldots\right)$

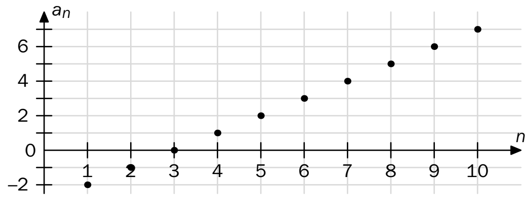
497 Oft ist es einfacher, eine gegebene Folge mithilfe der rekursiven Darstellung zu beschreiben. Es gibt sogar Folgen, die *nur* rekursiv (und nicht explizit) dargestellt werden können.
Kennt man die explizite Darstellung einer Folge (a_n), so kann man ein beliebiges Folgeglied, z. B. a_{100} sofort berechnen. Ist lediglich die rekursive Darstellung bekannt, so benötigt man dafür stets das vorhergehende Folgeglied, also a_{99} und daher auch a_{98}, a_{97} usw.

498 **a)** $(a_n) = (-0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 1{,}5; \ldots)$
b) $(a_n) = (-1{,}5; -2; -1{,}5; 0; 2{,}5; \ldots)$
c) $(a_n) = (0, 3, 2, 5, 4, \ldots)$
d) $(a_n) = (9, 7, 5, 3, 1, \ldots)$

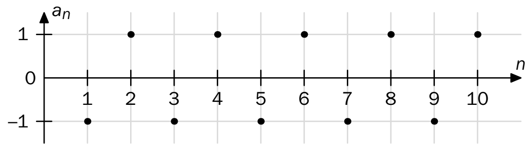
499 **a)** $(a_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$



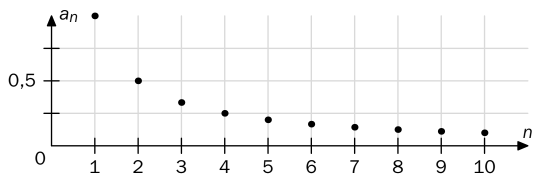
b) $(a_n) = (-2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$



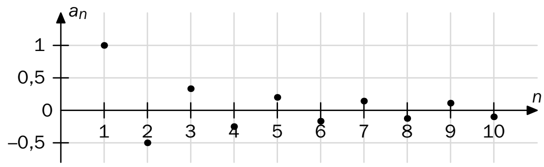
c) $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$



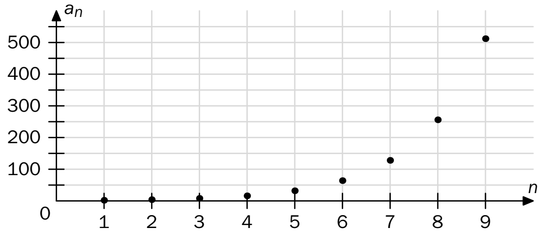
d) $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$



e) $(a_n) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$



f) $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$

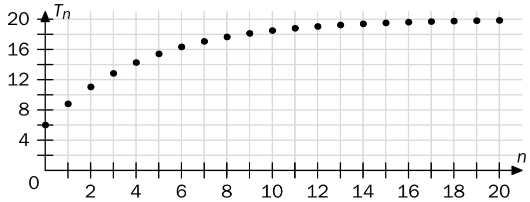


500 1) $a_n = n$ mit $n \geq 1$

2) $(a_n) = (1, 2, 3, -2, -19, \ldots)$

Nur die ersten 3 Folgenglieder sind gleich. Eine Folge ist durch die Angabe von endlich vielen Folgengliedern nicht eindeutig festgelegt!

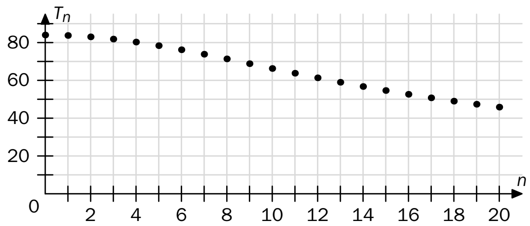
501 1) (6; 8,80; 11,04; 12,83; 14,27; 15,41; 16,33; 17,06; 17,65; 18,12; 18,50; 18,80; 19,04; 19,23; 19,38; 19,51; 19,61; 19,68; 19,75; 19,80; 19,84; ...)



2) Nach 9 Minuten hat das Getränk über 18 °C.

3) Die Raumtemperatur wird vermutlich 20 °C betragen, da sich die Folge immer mehr diesem Wert nähert.

502 1) (84; 83,75; 83,02; 81,85; 80,27; 78,36; 76,20; 73,84; 71,36; 68,83; 66,29; 63,78; 61,34; 58,99; 56,75; 54,63; 52,63; 50,76; 49,00; 47,37; 45,85; ...)



2) Nach 18 Minuten ist der Braten kälter als 50 °C.

503 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

504 Jede Stunde verbraucht die Rotbuche 2,4 kg CO_2.

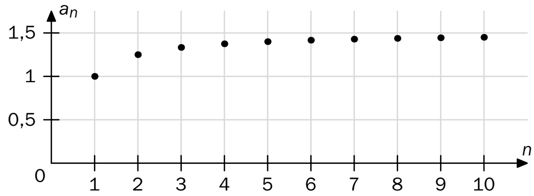
505 Die Bevölkerungszahl im Jahr 2001 betrug 88 472. Jedes Jahr wächst die Zahl auf das 1,026-fache, also um 2,6 %.

506 Im Buch ausgeführt.

507 Im Buch ausgeführt.

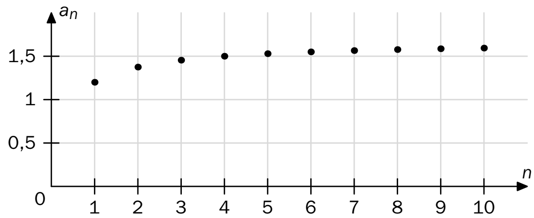
508 a)

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \tfrac{3n-1}{2n} &< \tfrac{3(n+1)-1}{2(n+1)} \\ (3n-1)\cdot(2n+2) &< (3n+2)\cdot 2n \\ 6n^2+4n-2 &< 6n^2+4n \\ -2 &< 0 \qquad \text{w. A.} \end{aligned}$$



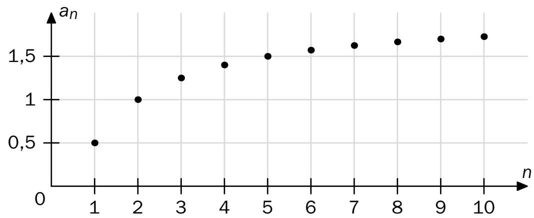
b)

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \tfrac{5n+1}{3n+2} &< \tfrac{5(n+1)+1}{3(n+1)+2} \\ (5n+1)\cdot(3n+5) &< (5n+6)\cdot(3n+2) \\ 15n^2+28n+5 &< 15n^2+28n+12 \\ 5 &< 12 \qquad \text{w. A.} \end{aligned}$$



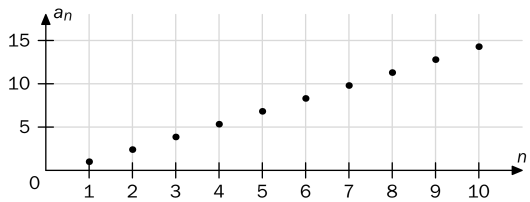
c)

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \tfrac{-1+2n}{1+n} &< \tfrac{-1+2(n+1)}{1+(n+1)} \\ (-1+2n)\cdot(2+n) &< (2n+1)\cdot(1+n) \\ -2+3n+2n^2 &< 3n+1+2n^2 \\ -2 &< 1 \qquad \text{w. A.} \end{aligned}$$



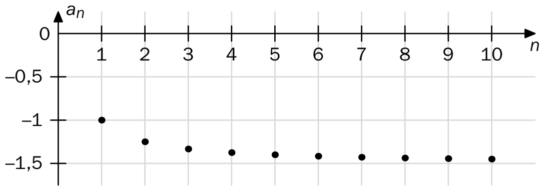
d)

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \tfrac{3n^2}{1+2n} &< \tfrac{3(n+1)^2}{1+2(n+1)} \\ 3n^2\cdot(3+2n) &< 3(n+1)^2\cdot(1+2n) \\ 9n^2+6n^3 &< 6n^3+15n^2+12n+3 \\ 0 &< 2n^2+4n+1 \qquad \text{w. A. } \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



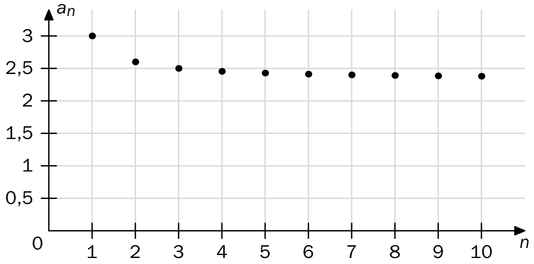
509 **a)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{-3n+1}{2n} > \frac{-3(n+1)+1}{2(n+1)}$$
$$(-3n+1)\cdot(2n+2) > (-3n-2)\cdot 2n$$
$$-6n^2-4n+2 > -6n^2-4n$$
$$2 > 0 \qquad \text{w. A.}$$



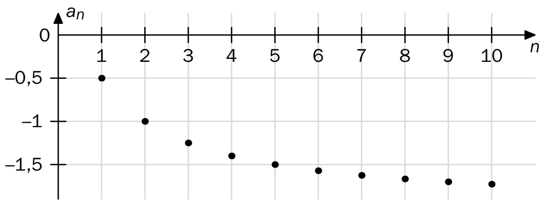
b)

$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{-7n+1}{-3n+1} > \frac{-7(n+1)+1}{-3(n+1)+1}$$
$$\frac{-7n+1}{-3n+1} > \frac{-7n-6}{-3n-2}$$
$$(-7n+1)\cdot(-3n-2) > (-7n-6)\cdot(-3n+1)$$
$$21n^2+11n-2 > 21n^2+11n-6$$
$$-2 > -6 \qquad \text{w. A.}$$



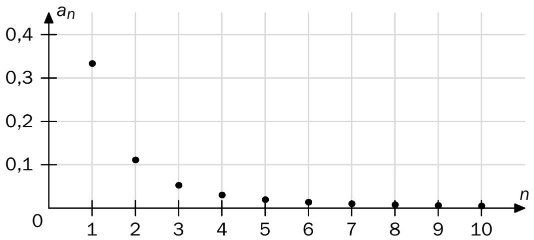
c)

$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{1-2n}{1+n} > \frac{1-2(n+1)}{1+(n+1)}$$
$$(1-2n)\cdot(2+n) > (-1-2n)\cdot(1+n)$$
$$2-3n-2n^2 > -1-3n-2n^2$$
$$2 > -1 \qquad \text{w. A.}$$



d)

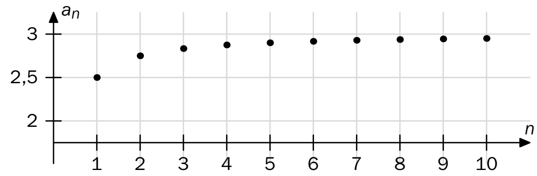
$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{1}{1+2n^2} > \frac{1}{1+2(n+1)^2}$$
$$1+2(n^2+2n+1) > 1+2n^2$$
$$2n^2+4n+3 > 1+2n^2$$
$$2n > -1 \qquad \text{w. A. } \forall n \in \mathbb{N}$$



510 **a)** $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{17}{6}, \frac{23}{8}, \frac{29}{10}, \ldots\right)$;

streng monoton wachsend:

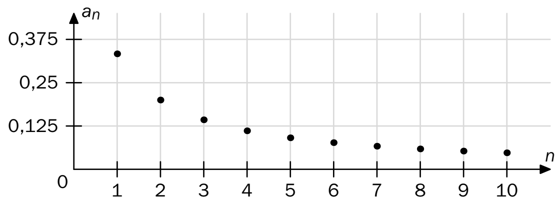
$$a_n < a_{n+1}$$
$$\frac{6n-1}{2n} < \frac{6(n+1)-1}{2(n+1)}$$
$$(6n-1)\cdot(2n+2) < (6n+5)\cdot 2n$$
$$12n^2+10n-2 < 12n^2+10n$$
$$-2 < 0 \qquad \text{w. A.}$$



b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right)$;

streng monoton fallend:

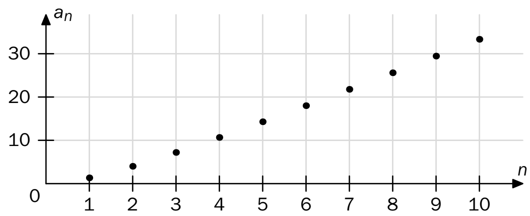
$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2(n+1)+1}$$
$$2n+3 > 2n+1$$
$$3 > 1 \qquad \text{w. A.}$$



c) $\left(\frac{4}{3}, 4, \frac{36}{5}, \frac{32}{3}, \frac{100}{7}, \ldots\right)$;

streng monoton wachsend:

$$a_n < a_{n+1}$$
$$\frac{4n^2}{n+2} < \frac{4(n+1)^2}{(n+1)+2}$$
$$4n^2\cdot(n+3) < 4(n+1)^2\cdot(n+2)$$
$$4n^3+12n^2 < 4n^3+16n^2+20n+8$$
$$0 < 4n^2+20n+8 \qquad \text{w. A. } \forall n \in \mathbb{N}$$



511 **a)** streng monoton fallend:

$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2(n+1)}$$
$$2n+2 > 2n$$
$$2 > 0 \quad \text{w. A.}$$

b) streng monoton fallend:

$$a_n > a_{n+1}$$
$$\frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2^{(n+1)+1}}$$
$$2^{n+2} > 2^{n+1}$$
$$4 > 2 \quad \text{w. A.}$$

c) streng monoton wachsend:

$$a_n < a_{n+1}$$
$$-\frac{1}{2n} < -\frac{1}{2(n+1)}$$
$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2(n+1)}$$
$$2n+2 > 2n$$
$$2 > 0 \quad \text{w. A.}$$

d) keines von beiden, da z. B. $a_1 < a_2$, aber $a_2 > a_3$

512 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

513 **a)** nicht monoton, da z. B. $a_1 > a_2$, aber $a_5 < a_6$

b) nicht monoton, da z. B. $a_1 > a_2$, aber $a_3 < a_4$

c) nicht monoton, da z. B. $a_1 < a_2$, aber $a_2 > a_3$

d) nicht monoton, da z. B. $a_1 < a_2$, aber $a_{12} > a_{13}$

514 **a)** z. B.: $a_n = 2n+3$ **b)** z. B.: $a_n = 1-2n$

c) z. B.: $a_n = (-1)^n$

515 **a)** 2 ist obere Schranke, $\frac{5}{4}$ ist keine obere Schranke

b) $\frac{3}{2}$ ist obere Schranke, $\frac{5}{4}$ ist keine obere Schranke

516 **a)** 1 ist untere Schranke, $\frac{3}{2}$ ist keine untere Schranke

b) -1 und $-\frac{1}{2}$ sind untere Schranken

517 **a)** *untere Schranken*: z. B.: 0, 1

obere Schranken: z. B.: 4, 12

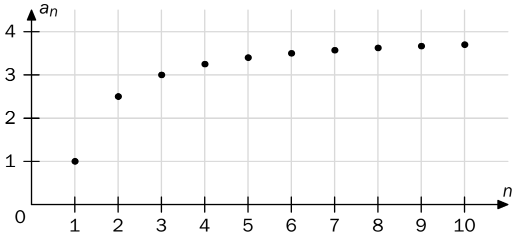
Beweis für $1 \leq a_n$:

$$1 \leq \frac{4n-3}{n}$$
$$n \leq 4n-3$$
$$3 \leq 3n$$
$$1 \leq n \quad \text{w. A.}$$

Beweis für $a_n \leq 4$:

$$\frac{4n-3}{n} \leq 4$$
$$4n-3 \leq 4n$$
$$-3 \leq 0 \quad \text{w. A.}$$

Beweis der anderen Schranken analog.



b) *untere Schranken*: z. B.: -2, 0

obere Schranken: z. B.: $\frac{1}{5}$, 3

z. B. $0 \leq a_n \leq \frac{1}{5}$

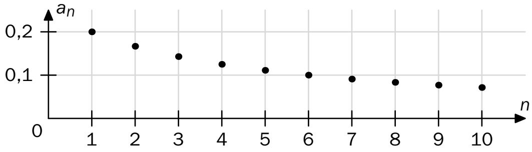
Beweis für $0 \leq a_n$:

$$0 \leq \frac{1}{n+4}$$
$$0 \leq 1 \quad \text{w. A.}$$

Beweis für $a_n \leq \frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{5}$$
$$5 \leq n+4$$
$$1 \leq n \quad \text{w. A.} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Beweis der anderen Schranken analog.



c) *untere Schranken*: z. B.: -5, -4

obere Schranken: z. B.: -2, 0

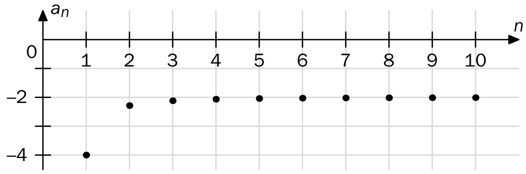
Beweis für $-4 \leq a_n$:

$$-4 \leq \frac{4n^2}{1-2n^2}$$
$$-4 \cdot (1-2n^2) \geq 4n^2$$
$$-4+8n^2 \geq 4n^2$$
$$4n^2 \geq 4$$
$$n^2 \geq 1 \quad \text{w. A.}$$

Beweis für $a_n \leq -2$:

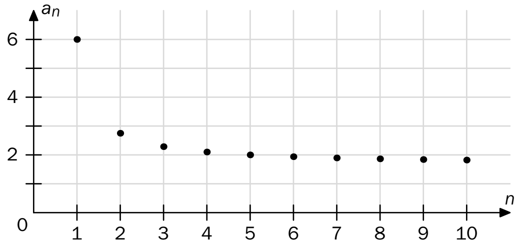
$$\frac{4n^2}{1-2n^2} \leq -2$$
$$4n^2 \geq -2(1-2n^2)$$
$$4n^2 \geq 4n^2 - 2$$
$$0 \geq -2 \quad \text{w. A.}$$

Beweis der anderen Schranken analog.



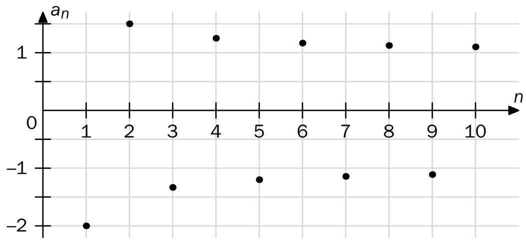
518 **a)** *untere Schranken*: z. B.: -2, $\frac{5}{3}$

obere Schranken: z. B.: 6, 28

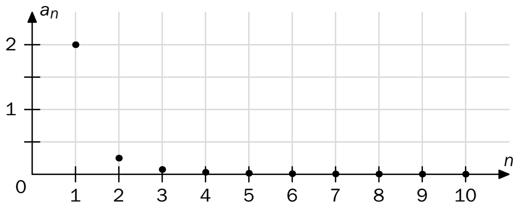


b) *untere Schranken*: z. B.: -4, -2

obere Schranken: z. B.: $\frac{3}{2}$, 2



c) *untere Schranken*: z. B.: -2, 0
obere Schranken: z. B.: 2, 5



519 **a)** $a_n \leq \frac{3}{2}$ **b)** $a_n \leq \frac{5}{3}$ **c)** $a_n \leq 2$
d) $a_n \leq 3$

520 **a)** $-\frac{3}{2} \leq a_n$ **b)** $-\frac{7}{3} \leq a_n$ **c)** $-2 \leq a_n$
d) $0 \leq a_n$

521 **a)** beschränkt; $0 \leq a_n \leq 1$
b) beschränkt; $-1 \leq a_n \leq -\frac{3}{4}$

522 **a)** z. B.: $a_n = 4 - 2n$
oder $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_1 = 2$
b) z. B.: $a_n = n$ oder $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 15$
c) z. B.: $a_n = (-1)^n \cdot n^2$ oder $a_{n+1} = -2a_n$ mit $a_1 = 3$

523 **a)** $(a_n) = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{17}{6}, \frac{23}{8}, \frac{29}{10}, \ldots\right)$;
streng monoton wachsend; $\frac{5}{2} \leq a_n \leq 3$
b) $(a_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right)$;
streng monoton fallend; $0 \leq a_n \leq \frac{1}{3}$
c) $(a_n) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{4}{14}, \frac{5}{17}, \ldots\right)$;
streng monoton wachsend; $\frac{1}{5} \leq a_n \leq \frac{1}{3}$
d) $(a_n) = \left(-1, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{11}, -\frac{2}{5}, -\frac{7}{19}, \ldots\right)$;
streng monoton steigend; $-1 \leq a_n \leq -\frac{1}{4}$

524 **a)** z. B.: $a_n = 3 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$
b) z. B.: $a_n = \frac{10n-3}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
c) z. B.: $a_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

525 **a)** Die Folge nimmt abwechselnd die Werte 0 und 2 an. Größere oder kleinere Werte treten nicht auf, daher ist die Folge nach unten und nach oben beschränkt. 0 bzw. 2 ist größte untere bzw. kleinste obere Schranke.
b) Die Folge fällt monoton. Das erste Folgenglied $\left(a_1 = \frac{9}{10}\right)$ ist somit auch das größte und somit auch die kleinste obere Schranke der Folge. Alle Folgenglieder sind positiv, weil im Bildungsgesetz nur Produkte positiver Zahlen vorkommen. Null ist daher sicher eine untere Schranke. Null ist zugleich die größte untere Schranke, weil die Folgenglieder (wegen fortgesetzter Multiplikation mit 0,9) für genügend große n jede noch so kleine positive Schranke unterlaufen.

526 **a)** Es gilt $a_n \leq a_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_1$ ist eine obere Schranke. Keine andere obere Schranke kann kleiner als a_1 sein. $\Rightarrow a_1$ ist die kleinste obere Schranke.
b) Es gilt $a_1 \leq a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_1$ ist eine untere Schranke. Keine andere untere Schranke kann größer als a_1 sein. $\Rightarrow a_1$ ist die größte untere Schranke.

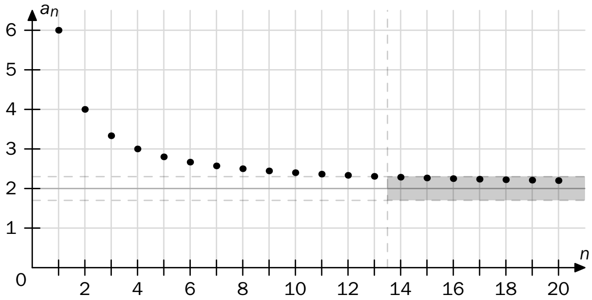
527 Im Buch ausgeführt.

528 Im Buch ausgeführt.

529 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$
c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

530 **a)** $\left|\frac{12n}{4n+5} - 3\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{15}{4n+5} < \varepsilon \Rightarrow \frac{15}{4\varepsilon} - \frac{5}{4} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{15}{4\varepsilon} - \frac{5}{4}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 3. Damit konvergiert die Folge gegen 3.
b) $\left|\frac{3n-2}{3n+5} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{7}{3n+5} < \varepsilon \Rightarrow \frac{7}{3\varepsilon} - \frac{5}{3} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{7}{3\varepsilon} - \frac{5}{3}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 1. Damit konvergiert die Folge gegen 1.
c) $\left|\frac{3n}{4n-3} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{9}{(4n-3)\cdot 4} < \varepsilon \Rightarrow \frac{9}{16\varepsilon} + \frac{3}{4} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{9}{16\varepsilon} + \frac{3}{4}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von $\frac{3}{4}$. Damit konvergiert die Folge gegen $\frac{3}{4}$.
d) $\left|\frac{2+3n}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{4n+6} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{6}{4} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{6}{4}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von $\frac{3}{2}$. Damit konvergiert die Folge gegen $\frac{3}{2}$.

531 **1)** $\left(6, 4, \frac{10}{3}, 3, \frac{14}{5}, \frac{8}{3}, \frac{18}{7}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{12}{5}, \ldots\right)$

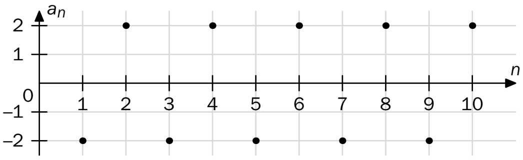


2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$
3) ab dem 14. Folgenglied
4) $\left|2 + \frac{4}{n} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{4}{\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 2. Damit konvergiert die Folge gegen 2.
Für $\varepsilon = 0{,}3$ erhält man $n > \frac{4}{0{,}3} \approx 13{,}33$, d. h. ab dem 14. Folgenglied liegen alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung vom Grenzwert 2.

532 **a)** ab $N = 9$ **b)** ab $N = 5$ **c)** ab $N = 5$
d) ab $N = 82$

533 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$;
$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

534 Die Folge nimmt abwechselnd die Werte 2 und -2 an. Wählt man $\varepsilon < 1$, so liegen zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder sicher nicht in derselben ε-Umgebung eines Wertes $a \in \mathbb{R}$. Es gibt daher keinen Grenzwert.



535 **a)** $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

b) $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

c) $\left|\frac{10}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{10}{\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{10}{\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

d) $\left|-\frac{1}{3n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{3\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

e) $\left|\frac{1}{3n+3} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon} - 1 < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{3\varepsilon} - 1$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

f) $\left|\frac{1}{2} \cdot \frac{3n}{3n^2+3} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2n^2+2} < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n < \varepsilon(2n^2+2) \Leftrightarrow 0 < 2\varepsilon n^2 - n + 2\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-16\varepsilon^2}}{4\varepsilon} < n$ (quadratische Lösungsformel)
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1+\sqrt{1-16\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.

536 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\frac{3}{4}$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{2}$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$

537 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{29}{6}$

538 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
$\left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 0. Damit ist a_n eine Nullfolge.
Ab $N = 500$ ist der Abstand zum Grenzwert kleiner als $\frac{1}{1\,000}$.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$
$\left|\frac{2n-13}{2n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{14}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{14}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{14}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 1. Damit konvergiert die Folge gegen 1.
Ab $N = 7\,000$ ist der Abstand zum Grenzwert kleiner als $\frac{1}{1\,000}$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}$
$\left|\frac{n}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{9n+6}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{9n+6} < \varepsilon$
$\Rightarrow \frac{2-6\varepsilon}{9\varepsilon} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \frac{2-6\varepsilon}{9\varepsilon}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von $\frac{1}{3}$. Damit konvergiert die Folge gegen $\frac{1}{3}$.
Ab $N = 222$ ist der Abstand zum Grenzwert kleiner als $\frac{1}{1\,000}$.

d) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$
$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n$
Für jedes noch so kleine positive ε liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ in der entsprechenden ε-Umgebung von 1. Damit konvergiert die Folge gegen 1.
Ab $N = 32$ ist der Abstand zum Grenzwert kleiner als $\frac{1}{1\,000}$.

539 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

540 (a_n) ist die Folge der Zweierpotenzen, also 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
Weil die Folgenglieder immer größer werden, ist (a_n) sicher nicht konvergent.

541 **a)** z. B.: $a_n = \frac{n+3}{n}$ **b)** z. B.: $a_n = \frac{4n}{n^2+3n}$
c) z. B.: $a_n = \frac{3n}{n+1}$ **d)** z. B.: $a_n = 5n$
e) z. B.: $a_n = \frac{7n^2-3n}{n^2+4}$

542 **a)** **1)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > a_n \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$a_n > 0$$

Alle Folgenglieder sind positiv, damit stimmt die Aussage $\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt damit auch die untere Schranke 0.

2) $a = a \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0$; Der Grenzwert ist daher 0.

b) **1)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > \tfrac{a_n}{3}$$
$$2\,a_n > 0$$
$$a_n > 0$$

Alle Folgenglieder sind positiv, damit stimmt die Aussage $\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt damit auch die untere Schranke 0.

2) $a = \frac{a}{3} \Leftrightarrow 2\,a = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
Der Grenzwert ist daher 0.

c) **1)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > \tfrac{1}{2} + \tfrac{a_n}{3}$$
$$6\,a_n > 3 + 2\,a_n$$
$$a_n > \tfrac{3}{4}$$

Es gilt $a_1 = 2 > \frac{3}{4}$, und ist $a_n > \frac{3}{4}$, so ist auch $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} > \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{3}{4}$. Damit sind alle Folgenglieder größer als $\frac{3}{4}$. $\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt die untere Schranke $\frac{3}{4}$.

2) $a = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} \Leftrightarrow 6\,a = 3 + 2\,a \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$
Der Grenzwert ist daher $\frac{3}{4}$.

d) **1)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > \tfrac{a_n}{5} + \tfrac{1}{2}$$
$$10\,a_n > 2\,a_n + 5$$
$$a_n > \tfrac{5}{8}$$

Es gilt $a_1 = 2 > \frac{5}{8}$, und ist $a_n > \frac{5}{8}$, so ist auch $a_{n+1} = \frac{a_n}{5} + \frac{1}{2} > \frac{\frac{5}{8}}{5} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. Damit sind alle Folgenglieder größer als $\frac{5}{8}$. $\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt die untere Schranke $\frac{5}{8}$.

2) $a = \frac{a}{5} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10\,a = 2\,a + 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{8}$
Der Grenzwert ist daher $\frac{5}{8}$.

543 **a)**

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > a_n \cdot \tfrac{1}{3}$$
$$\tfrac{2}{3} \cdot a_n > 0$$
$$a_n > 0$$

Alle Folgenglieder sind positiv, damit stimmt die Aussage. $\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt die untere Schranke 0.
$a = a \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 0$; Der Grenzwert ist daher 0.

b) Aus dem Bildungsgesetz erkennt man, dass die Folge mit jedem Schritt um 2 kleiner wird. Sie ist daher streng monoton fallend, aber es gibt keine untere Schranke und daher auch keinen Grenzwert.

544 **a)** Einsetzen von 4 in die rekursive Definition liefert immer den Wert 4. Die Folge ist daher konstant und hat den Grenzwert 4 ($a = \frac{1}{2} \cdot a + 2 \Leftrightarrow a = 4$).

b)

$$a_n > a_{n+1}$$
$$a_n > a_n - \tfrac{1}{2} \cdot a_n$$
$$\tfrac{1}{2} a_n > 0$$
$$a_n > 0$$

Alle Folgenglieder sind positiv, da $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot a_n$ und $a_1 > 0$. Damit stimmt die Aussage.
$\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend und a_n besitzt die untere Schranke 0.
$a = a - \frac{1}{2} a \Leftrightarrow \frac{1}{2} a = 0 \Leftrightarrow a = 0$; Der Grenzwert ist daher 0.

545 Im Buch ausgeführt.

546 $\sqrt{2}$: $f(1) < 0$ und $f(2) > 0 \Rightarrow a \in (1; 2)$
$f(1{,}4) < 0$ und $f(1{,}5) > 0 \Rightarrow a \in (1{,}4; 1{,}5)$
$f(1{,}41) < 0$ und $f(1{,}42) > 0 \Rightarrow a \in (1{,}41; 1{,}42)$

$\sqrt{7}$: $f(2) < 0$ und $f(3) > 0 \Rightarrow a \in (2; 3)$
$f(2{,}6) < 0$ und $f(2{,}7) > 0 \Rightarrow a \in (2{,}6; 2{,}7)$
$f(2{,}64) < 0$ und $f(2{,}65) > 0 \Rightarrow a \in (2{,}64; 2{,}65)$

547 $f(x) = x^2 - 5$, da diese Funktion die positive Nullstelle $\sqrt{5}$ hat.

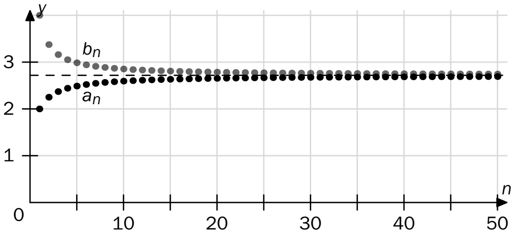
548 **a)** $(a_n) = (2; 2{,}25; 2{,}370; 2{,}441; 2{,}488; 2{,}522; 2{,}546; 2{,}566; 2{,}581; 2{,}594; \ldots)$; $a_{100} \approx 2{,}705$; $a_{101} \approx 2{,}705$; $a_{1\,000} \approx 2{,}717$; $a_{1\,001} \approx 2{,}717$;
streng monoton steigend; Schranken: $S_u = 2$; $S_o = e$

b) $(a_n) = (4; 3{,}375; 3{,}160; 3{,}052; 2{,}986; 2{,}942; 2{,}910; 2{,}887; 2{,}868; 2{,}853; \ldots)$; $a_{100} \approx 2{,}732$; $a_{101} \approx 2{,}732$; $a_{1\,000} \approx 2{,}720$; $a_{1\,001} \approx 2{,}720$;
streng monoton fallend; Schranken: $S_u = e$, $S_o = 4$

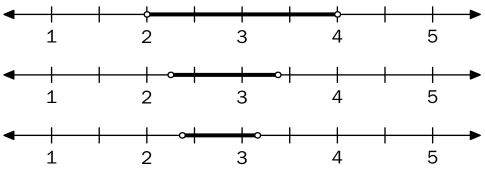
c) $(a_n) = (2; 1{,}125; 0{,}790; 0{,}610; 0{,}498; 0{,}420; 0{,}364; 0{,}321; 0{,}287; 0{,}259; \ldots)$; $a_{100} \approx 0{,}027$; $a_{101} \approx 0{,}027$; $a_{1\,000} \approx 0{,}003$; $a_{1\,001} \approx 0{,}003$;
streng monoton fallend; Schranken: $S_u = 0$, $S_o = 2$

549 **1)** Tabellenkalkulation

2) (a_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent (vgl. Aufg. **616**)
(b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow$ (b_n) ist konvergent
Die Differenz $b_n - a_n$ geht gegen 0, daher haben a_n und b_n denselben Grenzwert. Laut Angabe konvergieren die Folgen gegen die Eulersche Zahl e.



3) Die reelle Zahl e kann als Ergebnis einer Intervallschachtelung $(a_n; b_n)$ definiert werden. Die Intervalle werden beliebig klein; sie „ziehen" sich gewissermaßen auf einen Punkt der Zahlengeraden zusammen:



550 **a)** 2 **b)** 5 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** -2 **e)** 0 **f)** -1

551 **a)** $\approx 0{,}69$ **b)** $\approx -0{,}69$ **c)** $\approx 1{,}15$ **d)** ≈ 1 **e)** ≈ 3 **f)** ≈ -1

552 Die rationalen Zahlen füllen die Zahlengerade nicht zur Gänze aus. Es gibt „Lücken" in der Zahlengeraden, die mit den irrationalen Zahlen geschlossen werden können.

553 Weder $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{Z}$ sind dicht (wähle z. B. $a = 1$ und $b = 2$).
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind dicht, da für zwei Zahlen a und b auch $\frac{a+b}{2}$ in dem Zahlbereich liegt.

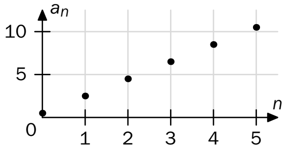
554 **a)** Leonhard Euler, 1737
b) Charles Hermite, 1873

555 Im Buch ausgeführt.

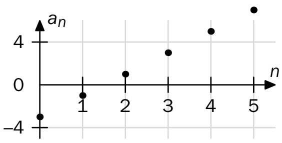
556 **1)** $G_n = 30 + 90\,n$
2) Das Modell ist nur begrenzt gültig, denn ab einer bestimmten Woche wären mehr Personen erkrankt als es Einwohner in der Kleinstadt gibt.

557 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

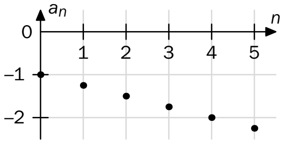
558 **a)**
$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \ldots\right)$



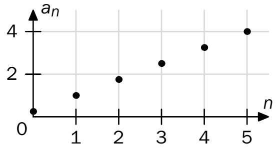
b)
$(-3, -1, 1, 3, 5, \ldots)$



c)
$\left(-1, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, -2, \ldots\right)$



d)
$\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \ldots\right)$



559 $\boxed{B}$ $\boxed{A}$ $\boxed{D}$ $\boxed{C}$

560 **a)** $a_0 = 10$; $k = -1$; *explizit*: $a_n = 10 - n$;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n - 1$; $a_0 = 10$
b) $a_0 = \frac{17}{2}$; $k = -\frac{7}{4}$; *explizit*: $a_n = \frac{17}{2} - \frac{7}{4}n$;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n - \frac{7}{4}$; $a_0 = \frac{17}{2}$
c) $a_0 = \frac{2}{5}$; $k = -\frac{1}{5}$; *explizit*: $a_n = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}n$;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{5}$; $a_0 = \frac{2}{5}$
d) $a_0 = -5$; $k = \frac{20}{3}$; *explizit*: $a_n = -5 + \frac{20}{3}n$;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n + \frac{20}{3}$; $a_0 = -5$

561 **a)** *rekursiv*: $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{5}$; $a_0 = 1$;
explizit: $a_n = 1 + \frac{2}{5}\,n$
b) *rekursiv*: $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}$; $a_0 = 2$;
explizit: $a_n = 2 - \frac{1}{4}\,n$
c) *rekursiv*: $a_{n+1} = a_n - \frac{9}{10}$; $a_0 = 8$;
explizit: $a_n = 8 - \frac{9}{10}\,n$
d) *rekursiv*: $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{5}$; $a_0 = 2$;
explizit: $a_n = 2 + \frac{2}{5}\,n$

562 **a)** $a_8 = 16$; $a_{100} = -168$
b) $a_8 = 32$; $a_{100} = 308$
c) $a_8 = 1{,}9$; $a_{100} = -16{,}5$
d) $a_8 = \frac{34}{3}$; $a_{100} = \frac{218}{3}$

563 **a)** $u = 84\,\text{cm}$ **b)** $u = 96\,\text{cm}$ **c)** $u = 108\,\text{cm}$

564 **1)** $a_n = 135 + 15\,n$ oder
$a_{n+1} = a_n + 15$, $a_0 = 135$;
nach 1 Monat: 150 €; nach 2 Monaten: 165 €;
nach 5 Monaten: 210 €; nach 18 Monaten: 405 €
2) mindestens 15 Monate
3) 9 Monate

565 **a)** $a_n = 1{,}8 - \frac{11}{3\,000}\,n$

oder $a_{n+1} = a_n - \frac{11}{3\,000}$; $a_0 = 1{,}8$;

Die Wasserhöhe nimmt linear ab, da in jeder Minute der Wasserstand um den gleichen Betrag sinkt.

b) nach 10 Minuten: 105 800 l;

nach 120 Minuten: 81 600 l; nach 1 Tag: 42 000 l

c) 491 Minuten bzw. über 8 Stunden

566 **a)** nein, da von a_1 auf a_3 zweimal k addiert wurde $\Rightarrow k = \frac{1}{2}$, aber $a_4 \neq a_3 + \frac{1}{2}$

b) ja, $a_n = -10 + 2\,n$

c) ja, $a_n = -3 + \frac{2}{3}\,n$

567 **a)** wenn $k \geq 0$ **b)** wenn $k \leq 0$

c) wenn $k \geq 0$ **d)** wenn $k \leq 0$ **e)** wenn $k = 0$

f) wenn $k \neq 0$ **g)** wenn $k = 0$

568 **a)** (a_n) und (b_n) sind arithmetische Folgen, also $a_{n+1} = a_n + k$ und $b_{n+1} = b_n + l \Rightarrow s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + k) + (b_n + l) = a_n + b_n + k + l = s_n + m$ mit $m = k + l$;

Damit ist (s_n) eine arithmetische Folge.

b) (a_n) ist eine arithmetische Folge, also $a_{n+1} = a_n + k$ und $a_n = a_{n-1} + k \Rightarrow a_{n-1} = a_n - k$

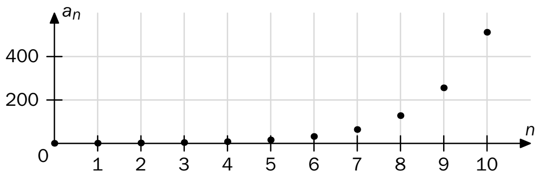
$\Rightarrow \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - k + a_n + k}{2} = \frac{2\,a_n}{2} = a_n$

Ab dem zweiten Folgenglied ist jedes Glied einer arithmetischen Folge immer das arithmetische Mittel der Nachbarglieder.

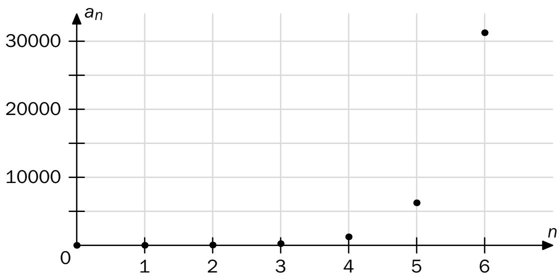
569 Im Buch ausgeführt.

570 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

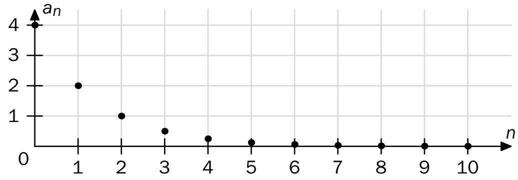
571 **a)** $(0{,}5; 1; 2; 4; 8; \ldots)$



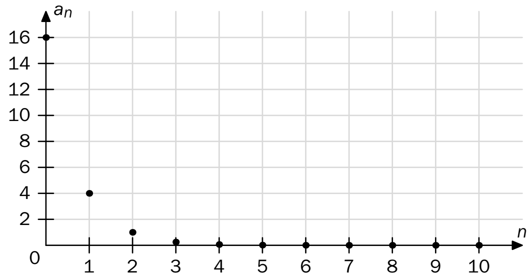
b) $(2, 10, 50, 250, 1250, \ldots)$



c) $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$



d) $(16; 4; 1; 0{,}25; 0{,}0625; \ldots)$



572 Wähle z. B.

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 & &\\ & & &\cdot(-1)\\ b_1 &= -3 \cdot 1 + 2 = -1 & &\\ & & &\cdot(-5)\\ b_2 &= -3 \cdot (-1) + 2 = 5 & &\\ & & &\cdot(-2{,}6)\\ b_3 &= -3 \cdot 5 + 2 = -13 & & \end{aligned}$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ist nicht konstant $\Rightarrow (b_n)$ ist keine geometrische Folge

573 $\boxed{B}$ $\boxed{D}$ $\boxed{F}$ $\boxed{E}$

574 **a)** $b_0 = \frac{1}{4}$ (oder $b_0 = -\frac{1}{4}$); $q = 2$ (oder $q = -2$);

explizit: $b_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n$ (oder $b_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^n$);

rekursiv: $b_0 = \frac{1}{4}$; $b_{n+1} = 2b_n$

(oder $b_0 = -\frac{1}{4}$; $b_{n+1} = -2\,b_n$)

b) $b_0 = 8$ (oder $b_0 = -8$); $q = 2$ (oder $q = -2$);

explizit: $b_n = 8 \cdot 2^n$ (oder $b_n = -8 \cdot (-2)^n$);

rekursiv: $b_0 = 8$; $b_{n+1} = 2\,b_n$

(oder $b_0 = -8$; $b_{n+1} = -2\,b_n$)

c) $b_0 = 16$; $q = \frac{1}{4}$ (oder $q = -\frac{1}{4}$);

explizit: $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (oder $b_n = 16 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$);

rekursiv: $b_0 = 16$; $b_{n+1} = \frac{b_n}{4}$ (oder $b_{n+1} = -\frac{b_n}{4}$)

d) $b_0 = 16$; $q = \frac{1}{4}$; *explizit*: $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$;

rekursiv: $b_0 = 16$; $b_{n+1} = \frac{b_n}{4}$

575 **a)** *rekursiv*: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{3}{2}$; $b_0 = 2$;

explizit: $b_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

b) *rekursiv*: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{4}{5}$; $b_0 = 10$;

explizit: $b_n = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) *rekursiv*: $b_{n+1} = b_n \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; $b_0 = 40$;

explizit: $b_n = 40 \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^n$

d) *rekursiv*: $b_{n+1} = b_n \cdot \sqrt{2}$; $b_0 = 5$;

explizit: $b_n = 5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$

576 **a)** ja, $b_n = \frac{1}{1\,024} \cdot 2^n$
b) ja, $b_n = 81 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$
c) ja, $b_n = 256 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n$
d) nein, da von b_{12} auf b_{17} fünfmal mit q multipliziert wurde $\Rightarrow q = -1$, aber $b_{33} \neq b_{17} \cdot (-1)^{16}$

577 **a)** $b_{10} = 3\,072$; $b_{20} = 3\,145\,728$
b) $b_{10} \approx -0{,}23$; $b_{20} \approx -0{,}01$
c) $b_{10} \approx 527{,}07$; $b_{20} \approx 15\,245{,}67$;
($q = 1{,}4$; $b_0 = \frac{6\,250}{343}$)
d) $b_{10} \approx 9{,}4 \cdot 10^{-3}$; $b_{20} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-6}$;
($q = 0{,}5$; $b_0 = 9{,}6$)

578 $u \approx 269{,}27$ mm
(Seitenlängen: 69,22 mm und 88,05 mm)

579 **1)** z. B.: $b_n = 500 \cdot 1{,}025^n$

Jahre	1	2	5	10	15
Guthaben (in €)	512,5	525,3	565,7	640,0	724,2

2) 8 Jahre

580 **1)** $b_n = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{9}{5}}\right)^n$
2) 10 Tage
3) Die Lösung hängt nicht vom Anfangswert ab:
$4 \cdot b_0 = b_0 \cdot q^n \Leftrightarrow 4 = q^n \Leftrightarrow n = \log_q 4$
$\Rightarrow n$ hängt nicht von b_0 ab.
4) Das Modell ist nur anfangs realistisch, da das Wasserbecken begrenzt ist und die Wasserlinsen daher nur bis zu einer bestimmten Grenze wachsen können.

581 **a)** Zu Beginn gibt es 1 418 Einwohner; die Zahl steigt mit der Zeit um 2,5 %.
b) anfangs 646 Einwohner; die Zahl steigt mit der Zeit um 7 %
c) anfangs 349 Einwohner; die Zahl fällt mit der Zeit um 5 %
d) anfangs 895 Einwohner; die Zahl fällt mit der Zeit um 21 %

582 ja, eine konstante Folge, wie z. B. $a_n = 5$
($a_n = 5 + 0 \cdot n$ bzw. $a_n = 5 \cdot 1^n$)

583 **1)**
$$\begin{aligned} b_n &< b_{n+1} & \\ b_0 \cdot q^n &< b_0 \cdot q^{n+1} & &|: b_0 \\ q^n &< q^{n+1} & &|: q^n \\ 1 &< q & \end{aligned}$$
Damit ist die geometrische Folge streng monoton steigend für $q > 1$. Die Voraussetzung $b_0 > 0$ ist notwendig, weil sich sonst das Relationszeichen im zweiten Schritt umkehren würde.

2)
$$\begin{aligned} b_n &> b_{n+1} & \\ b_0 \cdot q^n &> b_0 \cdot q^{n+1} & &|: b_0 \\ q^n &> q^{n+1} & &|: q^n \\ 1 &> q & \end{aligned}$$
Damit ist die geometrische Folge streng monoton fallend für $q < 1$ und $q > 0$. Wäre $q < 0$, so würde sich das Relationszeichen im letzten Schritt umkehren.
3) $q = 1 \Rightarrow b_n = b_0 \cdot 1^n = b_0 \Rightarrow$ Die Folge ist konstant.
4) $q < 0 \Rightarrow q = -|q|$ und $q^n = (-|q|)^n = (-1)^n \cdot |q|^n$ und somit $b_n = b_0 \cdot (-1)^n \cdot |q|^n$
Der Term $(-1)^n$ bewirkt, dass sich positive und negative Folgenglieder abwechseln.

584 (b_n) ist eine geometrische Folge, also $b_{n+1} = b_n \cdot q$ und $b_n = b_{n-1} \cdot q \Rightarrow b_{n-1} = b_n \cdot \frac{1}{q}$
$\Rightarrow GM(b_{n-1}, b_{n+1}) = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{b_n \cdot \frac{1}{q} \cdot b_n \cdot q} =$
$= \sqrt{b_n^2} = b_n$
Ab dem zweiten Folgenglied ist jedes Glied einer geometrischen Folge immer das geometrische Mittel der Nachbarglieder.

585 ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

586 ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

587 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

588 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

589 **a)** exponentielle Abnahme;
konstante relative Änderung: $-1{,}2 \cdot 10^{-4}$
b) lineares Wachstum;
konstante mittlere Änderung: $k = 1{,}25$
c) lineare Abnahme;
konstante mittlere Änderung: $k = -54\,000$

590 **a)** **1)** lineare Abnahme, diskretes Modell;
Der Bestand wird in gleichen diskreten Zeitschritten immer um denselben Wert kleiner.
2) $y_0 = 100$; absolute Änderung: $k = -5$
b) **1)** lineare Zunahme, kontinuierliches Modell;
Der Bestand wird in gleichen Zeitschritten immer um denselben Wert größer.
2) $y_0 = 10$; mittlere Änderungsrate: $k = 2$
c) **1)** exponentielle Zunahme, diskretes Modell;
Der Bestand wird in gleichen diskreten Zeitschritten immer um denselben Faktor größer.
2) $y_0 = 20$; relative Änderung: $q - 1 = \sqrt[3]{2} - 1 \approx 0{,}26$
$\Rightarrow$ Zunahme um 26 %

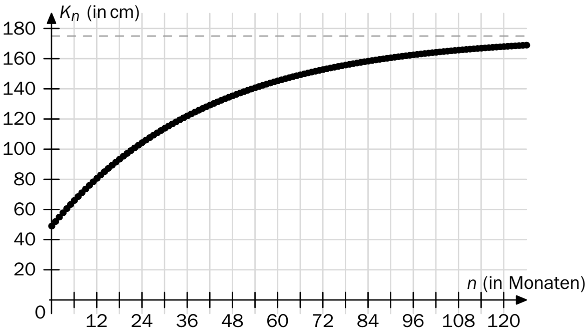
d) 1) exponentielle Abnahme, kontinuierliches Modell;
Der Bestand wird in gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor kleiner.
2) $y_0 = 800$; relative Änderung: $q - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -0{,}25$
⇒ Abnahme um 25 %

591 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

592 Im Buch ausgeführt.

593 Im Buch ausgeführt.

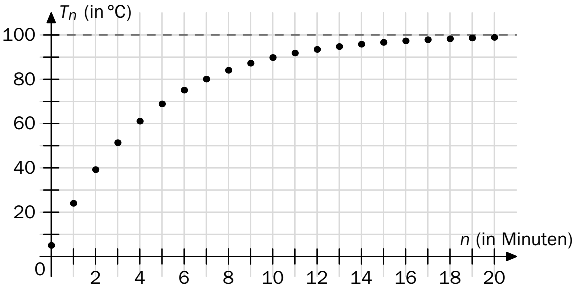
594 **1)** $K_{n+1} = K_n + \frac{1}{42} \cdot (175 - K_n)$; $K_0 = 49$



2) Die Körpergröße jedes Menschen ist nach oben beschränkt. Diese Tatsache wird auch im Modell abgebildet. Vergleicht man die errechneten Werte mit empirischen Daten, lässt sich feststellen, dass die errechneten Werte tendenziell ein wenig zu hoch sind.

595 ☐ ☒ ☒ ☒ ☐

596 **1)** $T_{n+1} = T_n + 0{,}2 \cdot (100 - T_n)$; $T_0 = 5$



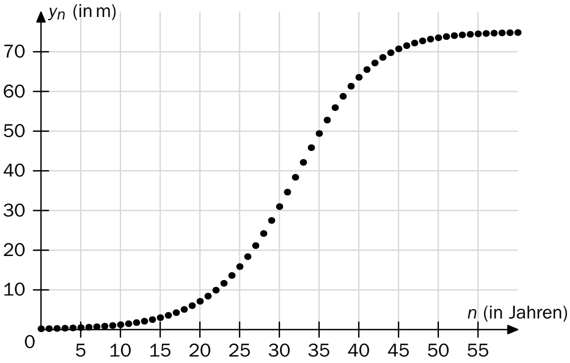
2) ca. 5 Minuten **3)** ca. 9 Minuten

597 **1)** $I_{n+1} = I_n + \frac{1}{3} \cdot (2\,570 - I_n)$; $I_0 = 10$
2) nach rund 5 Wochen
3) Bei der Anzahl der Gesunden liegt eine diskrete exponentielle Abnahme vor, da die relative Änderung pro Schritt konstant ist.

Woche	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gesunde	2 560	1 707	1 138	759	506	337	225	150	100	67	44

4) Im Modell ändert sich I_0 auf 1 bzw. 100. Die Kurve ist anfangs etwas steiler, je je nachdem, ob zu Beginn 1 oder 100 Personen infiziert waren. Im weiteren Verlauf macht dies aber nur einen sehr geringen Unterschied.

598 **1)** $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{374} \cdot y_n\,(75 - y_n)$; $y_0 = 0{,}2\,\text{m}$



2)

Jahre	10	20	30	40	50
Größe (in m)	1,2	7,1	31,0	63,6	73,5

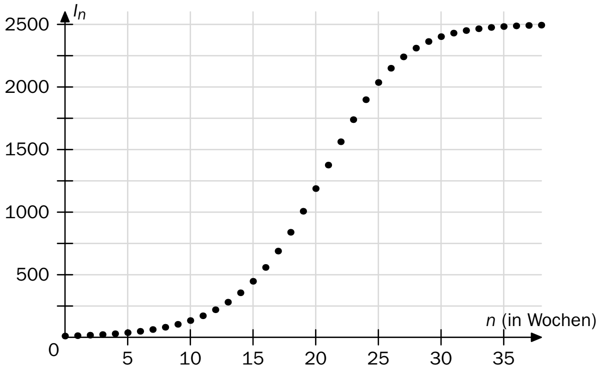
3) Der Baum wächst im Alter von etwa 30–35 Jahren am schnellsten.

599 **1)** $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{90\,000} \cdot y_n \cdot (10\,000 - y_n)$; $y_0 = 1\,000$
2)

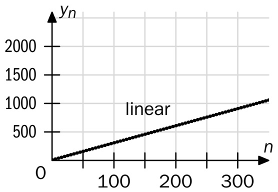
Jahre	10	20	30
Anzahl der Blauwale	2 449	4 920	7 492

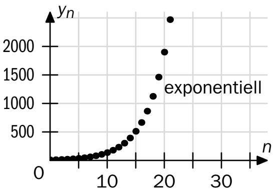
3) nach 61 Jahren

600 **1)** $I_{n+1} = I_n + \frac{1}{8300} \cdot I_n \cdot (2\,500 - I_n)$;
nach 19 Tagen

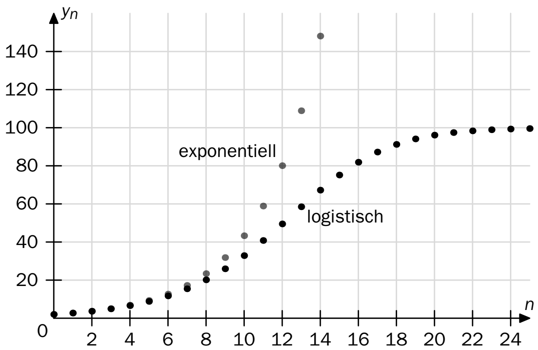


2) *linear*: $y_{n+1} = y_n + 3$; $y_0 = 10$
oder $y_n = 10 + 3\,n$; nach 330 Tagen
exponentiell: $y_{n+1} = y_n \cdot 1{,}3$; $y_0 = 10$
oder $y_n = 10 \cdot 1{,}3^n$; nach 18 Tagen

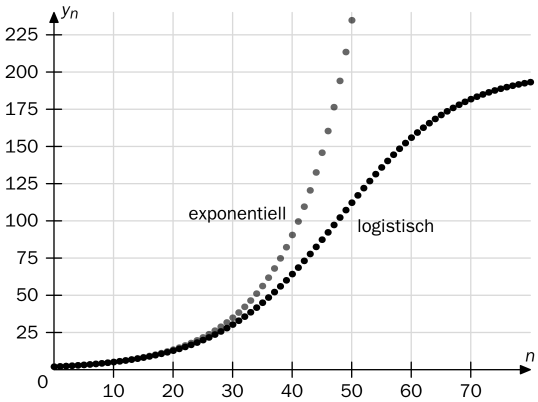




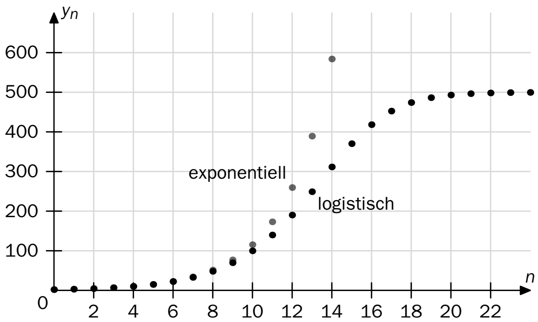
601 **a)** *exponentiell*: $y_{n+1} = y_n \cdot 1{,}36$; $y_0 = 2$
oder $y_n = 2 \cdot 1{,}36^n$
logistisch: $y_{n+1} = y_n + 0{,}0036 \cdot y_n \cdot (100 - y_n)$
In den ersten 8 Tagen stimmen beide Modelle gut überein. Ab dann wächst das exponentielle Modell über alle Grenzen und nach 13 Tagen wird die Sättigungsgrenze bereits überschritten. Das logistische Modell flaut immer stärker ab und nähert sich immer mehr der Sättigungsgrenze. Diese wird aber mathematisch gesehen nie ganz erreicht. Da die Anzahl an Individuen eine natürliche Zahl sein muss, wird sie wahrscheinlich nach 22 Tagen erreicht werden.



b) *exponentiell*: $y_{n+1} = y_n \cdot 1{,}1$; $y_0 = 2$
oder $y_n = 2 \cdot 1{,}1^n$
logistisch: $y_{n+1} = y_n + 0{,}0005 \cdot y_n \cdot (200 - y_n)$
In den ersten 25 Tagen stimmen beide Modelle gut überein. Ab dann wächst das exponentielle Modell über alle Grenzen und nach ca. 50 Tagen wird die Sättigungsgrenze bereits überschritten. Das logistische Modell flaut immer stärker ab und nähert sich immer mehr der Sättigungsgrenze. Diese wird aber mathematisch gesehen nie ganz erreicht. Da aber die Anzahl an Individuen eine natürliche Zahl sein muss, wird sie wahrscheinlich nach ca. 80 Tagen erreicht werden.



c) *exponentiell*: $y_{n+1} = y_n \cdot 1{,}5$; $y_0 = 2$
oder $y_n = 2 \cdot 1{,}5^n$
logistisch: $y_{n+1} = y_n + 0{,}001 \cdot y_n \cdot (500 - y_n)$
In den ersten 10 Tagen stimmen beide Modelle gut überein. Ab dann wächst das exponentielle Modell über alle Grenzen und nach 14 Tagen wird die Sättigungsgrenze bereits überschritten. Das logistische Modell flaut immer stärker ab und nähert sich immer mehr der Sättigungsgrenze. Diese wird aber mathematisch gesehen nie ganz erreicht. Da aber die Anzahl an Individuen eine natürliche Zahl sein muss, wird sie wahrscheinlich nach 20 Tagen erreicht werden.



602 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

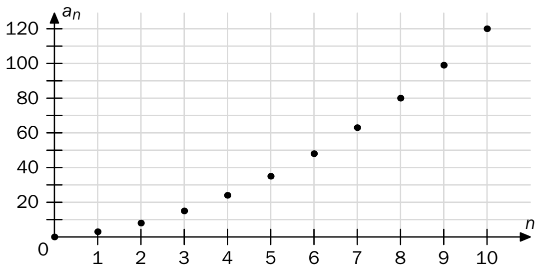
603 Im Buch ausgeführt.

604 Im Buch ausgeführt.

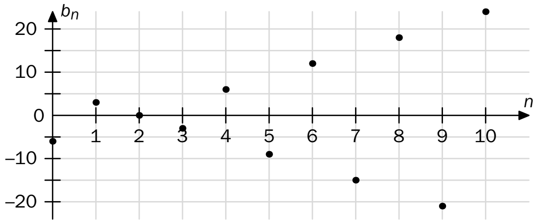
605 Im Buch ausgeführt.

606 Im Buch ausgeführt.

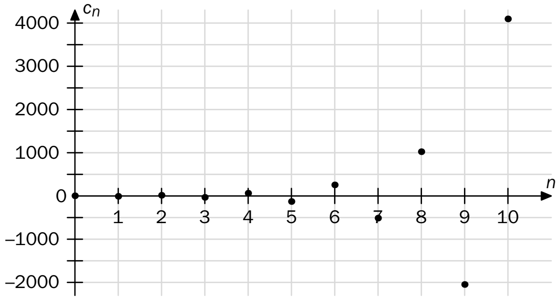
607 **a)** $(a_n) = (0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, \dots)$



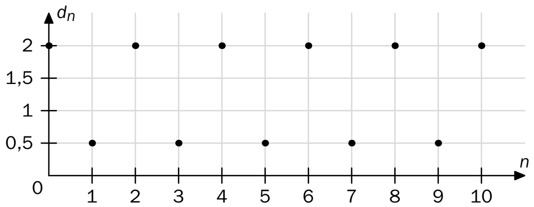
b) $(b_n) = (-6, 3, 0, -3, 6, -9, 12, -15, 18, -21, \dots)$



c) $(c_n) = (4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512, 1\,024, -2\,048, \dots)$



d) $(d_n) = \left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots\right)$



608 $\boxed{C}$ $\boxed{F}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$

609 $K_n = 50 + 35 \cdot n$

610 ☒ ☒ ☒ ☐ ☒

611 konvergent; ist 0

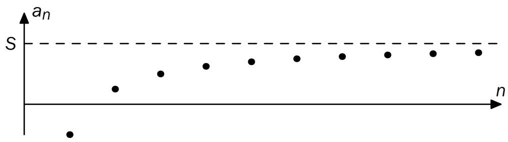
612 $\boxed{C}$ $\boxed{E}$ $\boxed{D}$ $\boxed{A}$

613 ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

614 Beachte die Ausführungen auf den Theorie- und Trainingsseiten im Schulbuch: S. 94, 102, 104, 106

615 Der Grenzwert kann sowohl von konstanten Folgen sowie von schließlich konstanten Folgen erreicht werden, z. B.:
$a_n = 3$; $(a_n) = (3, 3, 3, \dots)$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$;
$b_{n+1} = b_n$; $b_0 = -5$; $(b_n) = (-5, -5, -5, \dots)$; $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -5$;
$c_n = \min(n, 4)$; $(c_n) = (0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, \dots)$; $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 4$

616 S … kleinste obere Schranke



Wenn (a_n) monoton wachsend ist, dann wird der Abstand $S - a_n$ immer kleiner oder bleibt gleich. Wählt man n ausreichend groß, so liegen die Folgenglieder fortan in derselben ε-Umgebung von S.

617 **a)** richtig: Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a + b$ und somit ist die Summe ebenfalls eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $a + b$.
b) falsch: Z. B. sind $a_n = 3n$ und $b_n = 3n$ divergente Folgen, aber $(a_n) - (b_n) = 3n - 3n = 0$ ist eine Nullfolge.
c) richtig: Sei (a_n) eine beschränkte Folge mit $|a_n| < S$ und (b_n) eine Nullfolge mit $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Da b_n eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{S}$ $\forall n \geq N$. Damit ist $|a_n \cdot b_n - 0| < S \cdot \frac{\varepsilon}{S} = \varepsilon$ und damit ist das Produkt eine Nullfolge.
d) falsch: z. B.: $a_n = (-1)^n$ und $b_n = 5$ sind beide beschränkt, aber der Quotient $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{5}$ ist nicht konvergent.

618 **a)** richtig: Bei der arithmetischen Folge handelt es sich um ein diskretes Modell. Die lineare Funktion ist das kontinuierliche Modell dazu, wo auch alle Werte dazwischen definiert sind.
b) falsch: Die absolute Änderung ist konstant.
c) falsch: Die relative Änderung ist konstant.
d) richtig: $a_{n+1} = a_n \cdot q \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

619 $(a_n) = (3, 8, 13, 18, \ldots)$; Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ist konstant:
$a_{n+1} - a_n = 5 \Rightarrow (a_n)$ ist eine arithmetische Folge.
$(b_n) = (-1, 0, 3, 8, \ldots)$; Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ist nicht konstant. $\Rightarrow (b_n)$ ist keine geometrische Folge.

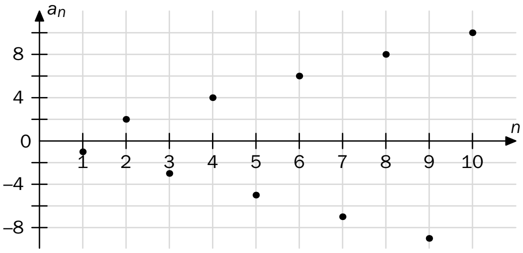
620 *1. Schritt*: der Startwert a_0 ist gegeben;
2. Schritt: es wurde $n = 0$ in die Definition $a_{n+1} = a_n + k$ eingesetzt, um a_1 zu berechnen;
3. Schritt: es wurde $n = 1$ in die Definition eingesetzt, um a_2 zu berechnen und statt a_1 wurde das Resultat der vorigen Zeile eingesetzt und man erhält $a_2 = a_0 + 2\,k$;
4. Schritt: das Verfahren vom vorigen Schritt wurde wiederholt und man erhält $a_3 = a_0 + 3\,k$;
5. Schritt: Man schließt aus den vorherigen Schritten und auch aus der Grafik: $a_n = a_0 + n \cdot k$

621 *1. Schritt*: der Startwert b_0 ist gegeben;
2. Schritt: es wurde $n = 0$ in die Definition $b_{n+1} = b_n \cdot q$ eingesetzt, um b_1 zu berechnen;
3. Schritt: es wurde $n = 1$ in die Definition eingesetzt, um b_2 zu berechnen und statt b_1 wurde das Resultat der vorigen Zeile eingesetzt und man erhält $b_2 = b_0 \cdot q^2$;
4. Schritt: das Verfahren vom vorigen Schritt wurde wiederholt und man erhält $b_3 = b_0 \cdot q^3$;
5. Schritt: Man schließt aus den vorherigen Schritten und auch aus der Grafik: $b_n = b_0 \cdot q^n$

622 **a)** $d_n = 2\,n + 7$; $q_n = \frac{n^2+8\,n+7}{n^2+6\,n}$;
a_n ist streng monoton wachsend. Die Folge der Differenzen ist immer positiv, hat also 0 als untere Schranke. Sie ist für alle n streng monoton steigend. Die Folge der Quotienten ist immer größer als 1, hat also 1 als untere Schranke. Sie ist streng monoton fallend und konvergiert gegen 1.
b) $d_n = \frac{2\,n+2}{3\,n+4} - \frac{2\,n}{3\,n+1} = \frac{2}{9\,n^2+15\,n+4}$;
$q_n = \frac{6\,n^2+8\,n+2}{6\,n^2+8\,n}$;
a_n ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{2}{3}$. Die Folge der Differenzen d_n ist immer positiv, hat also 0 als untere Schranke. Sie ist streng monoton fallend und konvergiert gegen 0. Die Folge der Quotienten q_n ist immer größer als 1, hat also 1 als untere Schranke. Sie ist streng monoton fallend und konvergiert gegen 1.

623 **a)** $a_n = a_0 + n \cdot k$; $a_{n+1} - a_n =$
$= a_0 + (n+1) \cdot k - (a_0 + n \cdot k) = a_0 + n \cdot k + k - a_0 - n \cdot k = k$
b) $b_n = b_0 \cdot q^n$; $\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} = \frac{b_0 \cdot q^{n+1} - b_0 \cdot q^n}{b_0 \cdot q^n} =$
$= \frac{b_0 \cdot q^n \cdot q - b_0 \cdot q^n}{b_0 \cdot q^n} = \frac{b_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{b_0 \cdot q^n} = q - 1$

624



625 $c_5 = 2$

626 Jeden Monat wird ein Haar um 1,2 cm länger.

627 Die Folge ist nicht monoton. Es gilt $a_0 = 0$, $a_1 = 36$, $a_5 = 0$, also $a_0 < a_1$, aber $a_1 > a_5$.

628 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

629 nach oben beschränkt; $\frac{8\,n-6}{2\,n-1} < 4$

630 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{2}$

631 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

632 Es handelt sich nicht um eine arithmetische Folge, weil die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder nicht konstant ist.

633 $a_{n+1} = a_n - 3$; $a_0 = 2$

634 *explizit*: $a_n = \frac{n}{6}$; *rekursiv*: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{6}$; $a_0 = 0$

635 ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

636 Das Gehalt steigt jedes Jahr um 2,5 %.

637 $(c_n) = (3, 7, 11, 15, 19, \ldots)$;
Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ist nicht konstant $\Rightarrow (c_n)$ ist keine geometrische Folge.

638 *explizit*: $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$;
rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$; $a_0 = 3$

639 $l_n = l_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ oder $l_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot l_n$

640 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

641 **a)** $b_1 = 1$; $l_2 = 2$; $b_2 = 1{,}5$; $l_3 = 1{,}75$;
$l_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (l_n + b_n)$ und $b_n = \frac{A}{l_n} = \frac{3}{l_n}$
$\Rightarrow l_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(l_n + \frac{3}{l_n}\right) \Rightarrow l_{n+1} = \frac{l_n + \frac{3}{l_n}}{2}$

b) Wegen $l_n \geq b_n$, ist $l_n \geq \frac{A}{l_n}$, d. h. $l_n^2 \geq A$, also $l_n \geq \sqrt{A}$, da alle Werte positiv sind.

$l_{n+1} = \frac{1}{2}\left(l_n + \frac{A}{l_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(l_n + \frac{l_n^2}{l_n}\right) = l_n$, damit ist die Folge der Längen streng monoton fallend.

c) $x_2 = 1{,}33$; $x_3 = 1{,}2639$; $x_4 = 1{,}2599$

Für $k = 2$ ist $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \cdot \left(2 - 1 + \frac{a}{x_n^2}\right) = \frac{x_n}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) =$

$= \frac{x_n\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)}{2} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$. Dies ist genau die Iterationsgleichung für die Wurzel aus a.

642 a) $2 = 1{,}2^T$; $t = \frac{\log 6{,}25}{\log 1{,}2} \approx 10{,}05$

Nach drei Tagen sind schon mehr als 5 m² befallen.

b) $S_t = S_0 \cdot 1{,}2^t$; $S_1 = S_0 \cdot 1{,}2$;

$S_2 = S_0 \cdot 1{,}2^2 = S_0 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}2 \cdot S_1$;

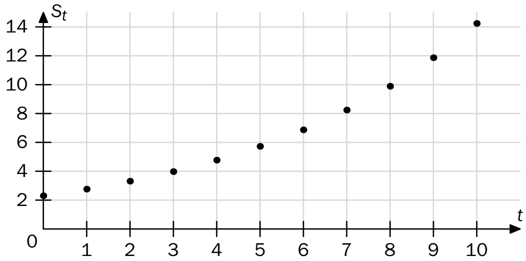
$S_3 = S_0 \cdot 1{,}2^3 = S_0 \cdot 1{,}2^2 \cdot 1{,}2 = 1{,}2 \cdot S_2$; ...

$\Rightarrow S_{t+1} = 1{,}2 \cdot S_t$

$\frac{S_{t+1}}{S_t} = \frac{A \cdot 1{,}2^{t+1}}{A \cdot 1{,}2^t} = \frac{A \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2}{A \cdot 1{,}2^t} = 1{,}2$

Der Änderungsfaktor der Folge ist konstant. Die Fläche, die von Schimmel befallen ist, wird jeden Tag um 20 % größer.

c) Die Folge weist ein exponentielles Wachstum auf; sie ist also streng monoton wachsend. Die Fläche, die von Schimmel befallen ist, wird immer größer. In diesem Modell gibt es keine Schranken nach oben. Die untere Schranke ist die anfangs befallene Fläche von 2,3 m².



643 a) Die Folge ist streng monoton steigend und beschränkt. $S_u = 1{,}2$; $S_o = 2$;

Zu Beginn war der Nikotingehalt im Blut 1,2 mg/100 ml. Je länger die Person regelmäßig raucht, desto mehr nähert sich dieser Wert 2 mg/100 ml.

b) $g_{10} \approx 1{,}28$ mg/100 ml;

Jeden Tag verbleiben 99 % des Nikotingehaltes im Blut des Rauchers, d. h. es wird nur 1 % davon täglich abgebaut. Bei diesem Raucher kommt jeden Tag zum Nikotinspiegel noch 0,02 mg/100 ml neu hinzu.

c) Durch Einsetzen in die rekursive Darstellung erhält man für die *linke Seite*: $g_{n+1} = -0{,}8 \cdot 0{,}99^{n+1} + 2 =$

$= -0{,}8 \cdot 0{,}99^n \cdot 0{,}99 + 2 = -0{,}792 \cdot 0{,}99^n + 2$

und für die *rechte Seite*: $0{,}99 \cdot (-0{,}8 \cdot 0{,}99^n + 2) + 0{,}02 =$

$= -0{,}792 \cdot 0{,}99^n + 0{,}99 \cdot 2 + 0{,}02 = -0{,}792 \cdot 0{,}99^n + 2$

Die beiden Seiten liefern das gleiche Ergebnis und damit ist die explizite Darstellung richtig.

Nach 47 Tagen beträgt die Nikotinmenge im Blut mindestens 1,5 mg/100 ml.

Thema: Biomathematik

T1 Beachte die Ausführungen auf den Theorieseiten des Schulbuchs: Aufg. **555**, **569**, **592** und **593**.

T2 Im Buch ausgeführt.

T3 Mithilfe des SI-Modells kann man die Ausbreitung einer Infektionskrankheit einfach beschreiben. In der Praxis lässt sich der Parameter p aber schwer schätzen. Da im SI-Modell davon ausgegangen wird, dass infizierte Personen nicht mehr gesund werden, eignet es sich für unheilbare Krankheiten wie z. B. HIV, nicht aber für Grippe.

5. Reihen

644 Im Buch ausgeführt.

645 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

646 **a)** $s_{50} = 2\,500$ **b)** $s_{21} = 903$
c) $s_{20} = -990$ **d)** $s_{11} = \frac{154}{3}$ **e)** $s_{\frac{u+1}{2}} = \frac{(u+1)^2}{4}$
f) $s_{\frac{v}{2}} = \frac{v\cdot(v+2)}{4}$ **g)** $s_{\frac{r+1}{4}} = \frac{(r+3)\cdot(r+1)}{8}$
h) $s_{\frac{s+3}{5}} = -\frac{(s+2)\cdot(s+3)}{10}$

647 $(a_n) = (18, 30, 42, 54, 66, 78, 90, 102, 114)$;
$s_9 = 594$

648 **a)** $s_{30} = 2\,145$; $s_{100} = 24\,650$; $s_n = \frac{5n^2-7n}{2}$
b) $s_{30} = 2\,070$; $s_{100} = -100$; $s_n = 99n - n^2$
c) $s_{30} = -11\,010$; $s_{100} = 12\,300$; $s_n = 7n^2 - 577n$
d) $s_{30} = -483{,}75$; $s_{100} = -737{,}5$; $s_n = \frac{n^2}{8} - \frac{159n}{8}$

649 Die Bohrung für den Brunnen kostet 97 500 €.

650 **1)** $a_n = 10(n-1)+5$ **2)** $s_n = 5n^2$

651 **a)** $s_9 = 511$ **b)** $s_9 = \frac{511}{256}$ **c)** $s_9 = 488\,281$
d) $s_7 = \frac{1\,093}{243}$ **e)** $s_{11} = \frac{1-x^{11}}{1-x}$ **f)** $s_{21} = \frac{1-y^{21}}{1-y}$
g) $s_{13} = 3\cdot\frac{1-u^{13}}{1-u}$ **h)** $s_{16} = a\cdot\frac{1-v^{16}}{1-v}$

652 **a)** $s_5 = \frac{211}{4}$; $s_{10} = \frac{58\,025}{128}$
b) $s_7 = \frac{2\,653}{144}$; $s_{12} = -\frac{2\,320\,828}{34\,992}$
c) $s_3 = \frac{61}{20}$; $s_5 = \frac{2\,101}{320}$
d) $s_{10} = \frac{8\,717\,049}{12\,500}$;
$s_{25} = \frac{3\,125}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{25}\right) \approx 778{,}30$

653 **a)** arithmetische Reihe; $s_7 = 56$
b) geometrische Reihe; $s_5 = 39{,}05$
c) geometrische Reihe; $s_7 = 21{,}5$
d) arithmetische Reihe; $s_{157} = 2\,457{,}05$

654 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

655 **1)** eigene Schätzungen
2) $s_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8\cdot 10^{19}$

656 $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

657 **a)** $s_{100} = 5\,050$ **b)** $s_{100} = 10\,100$
c) $s_{100} = 10\,000$ **d)** $s_{50} = 2 - \frac{1}{2^{50}} \approx 2$
e) $s_{10} = \frac{683}{1024} \approx 0{,}67$ **f)** $s_{30} = \frac{1}{9}\cdot(1-10^{-30}) \approx 0{,}11$

658 Im Buch ausgeführt.

659 Im Buch ausgeführt.

660 Im Buch ausgeführt.

661 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

662 **a)** $s = 2$ **b)** $s = 4 + 2\sqrt{2}$ **c)** $s = \frac{4}{45}$
d) $s = \frac{128}{225}$

663 **a)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{3}$
b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3\cdot 4^{k-1}$; Die Summe divergiert, weil $q = 4\ (> 1)$
c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 80\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = 400$

664 **a)** $|u| < 1$; $s = 2\cdot\frac{1}{1-u}$
b) $|y| < 1$; $s = -y\cdot\frac{1}{1-y}$
c) $|x| < \frac{1}{2}$; $s = -x\cdot\frac{1}{1-2x}$
d) $|x| > 2$; $s = \frac{1}{1-\frac{2}{x}}$

665 **1)** ☐ ☐ ☒ ☐ ☐
2) $s_5 = \frac{31r\pi}{16}$; $s_{10} = \frac{1\,023r\pi}{512}$; $s_n = 2r\pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
3) $2r\pi$

666 **1)** *rekursiv*: $a_{n+1} = \frac{3a_n}{4}$; $a_1 = 3$;
explizit: $a_n = 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
2) 18,30 m ($s_5 \approx 9{,}15$ m);
22,65 m ($s_{10} \approx 11{,}32$ m);
$24\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ $\left(s_n = 12\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)$
3) $s = 24$ m

667 **a)** $u = 4s(2+\sqrt{2})\,\mathrm{E}$; $\left(u_n = 4s\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$
b) $A = 2s^2\,\mathrm{E}^2$; $\left(A_n = s^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

668 **a)** $u = 20\pi(2+\sqrt{2})$ cm $\approx 214{,}52$ cm;
$\left(u_n = 20\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$
b) $u = 80(\sqrt{2}+1)$ cm $\approx 193{,}14$ cm;
$\left(u_n = 40\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$
c) $A = 200\pi\,\mathrm{cm}^2$; $\left(A_n = 100\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$
d) $A = 400\,\mathrm{cm}^2$; $\left(A_n = 200\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

669 **1)** *explizit*: $s_n = 20\pi\cdot 0{,}9^{n-1}$;
rekursiv: $s_{n+1} = 0{,}9\cdot s_n$; $s_1 = 20\pi$
2) $s_{10} \approx 409{,}24$ cm; $s_{20} \approx 551{,}93$ cm;
$s_n = 200\pi\cdot(1-0{,}9^n)$
3) $s = (200\pi)$ cm $\approx 628{,}32$ cm

670 **a)** $b_1 = 2;\quad q = x;$
$f(x) = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots,\quad$ für $|x| < 1$
b) $b_1 = 2x;\quad q = 2x;$
$f(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots,\quad$ für $|2x| < 1$
c) $b_1 = x;\quad q = 2x;$
$f(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots,\quad$ für $|2x| < 1$
d) $b_1 = -3x;\quad q = x^2;$
$f(x) = -3x - 3x^3 - 3x^5 - 3x^7 + \ldots,\quad$ für $|x^2| < 1$

671 **a)** $b_1 = \frac{3}{10};\quad q = \frac{1}{10};\quad s = \frac{1}{3}$
b) $b_1 = \frac{7}{10};\quad q = \frac{1}{10};\quad s = \frac{7}{9}$
c) $b_1 = \frac{1}{2};\quad q = \frac{1}{10};\quad s = \frac{5}{9};\quad 1{,}\dot{5} = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$
d) $b_1 = \frac{1}{4};\quad q = \frac{1}{100};\quad s = \frac{25}{99};\quad 4{,}\overline{25} = 4 + \frac{25}{99} = \frac{421}{99}$
e) $b_1 = \frac{9}{10};\quad q = \frac{1}{100};\quad s = \frac{10}{11};\quad 17{,}\overline{90} = 17 + \frac{10}{11} = \frac{197}{11}$
f) $b_1 = \frac{909}{1\,000};\quad q = \frac{1}{1\,000};\quad s = \frac{101}{111}$

672 Im Buch ausgeführt.

673 Im Buch ausgeführt.

674 Im Buch ausgeführt.

675 **a)** Guthaben nach 4 Jahren
b) Zinsen im ersten Jahr
c) Wert des Guthabens vor 3 Jahren
d) Wert des Guthabens vor 4 Jahren

676 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

677 **a)** Es fehlen ihr 357,60 €.
b) Sie hätte 352,32 € einzahlen müssen.
c) Die Anfangseinlage hätte 1 831,95 € betragen müssen.

678 $\frac{10\,000}{1{,}02^{10}}$; 8 200 €

679 Barwert von Angebot A: 78 945,41 €. Damit ist Angebot A aus heutiger Sicht besser als Angebot B.

680 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

681 **1)** Barwert von A: 253 482,09 €;
Barwert von B: 264 474,38 €; Differenz: 10 992,29 €
2) Barwert von A: 249 351,97 €;
Barwert von B: 261 037,71 €; Differenz: 11 685,74 €

682 **a)** Barwert von A: 49 409,85 €;
Barwert von B: 53 301,30 €;
Das Angebot B ist für den Verkäufer wirtschaftlicher.
b) Barwert von A: 49 122,00 €;
Barwert von B: 52 489,11 €;
Das Angebot B ist für den Verkäufer wirtschaftlicher.

683 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

684 Im Buch ausgeführt.

685 Im Buch ausgeführt.

686 Stefan kann nach 6 Jahren 7 587,59 € abheben.

687

Jahr	Guthaben am Beginn	Zinsen am Ende	Guthaben am Ende
1	5 000,00 €	100,00 €	5 100,00 €
2	10 100,00 €	202,00 €	10 302,00 €
3	15 302,00 €	306,04 €	15 608,04 €
4	20 608,04 €	412,16 €	21 020,20 €

688 Sie kann 5 101,56 € abheben.

689 Er kann 92 017,81 € ansparen.

690 **a)** 28 710,41 € **b)** 25 007,10 €

691 Sibille muss monatlich rund 57,75 € einzahlen.

692 Raten: 161,85 €; Zinsen: 231,03 €

693 Endwert: 79 299,59 €; Barwert: 72 532,40 €

694 jährliche Verzinsung: $E = K \cdot q$
a) halbjährliche Verzinsung: $E = K \cdot q_2^2 = k \cdot \sqrt{q}^2 = K \cdot q$
b) monatliche Verzinsung: $E = K \cdot q_{12}^{12} = k \cdot \sqrt[12]{q}^{12} = K \cdot q$

695 Barwert von A: 215 498,71 €;
Barwert von B: 216 619,50 €

696 Barwert von A: 7 952,57 €;
Barwert von B: 7 861,47 €

697 **1)** ☒ ☐ ☐ ☐ ☐
2) In der Berechnung wird ein Zeitrahmen von 40 Jahren genommen, in der Zeitschrift wird allerdings von wenigen Jahren gesprochen. Es müsste daher besser heißen, dass mit geringen Einzahlungsbeträgen in 40 Jahren fast 140 000 € angespart werden können.

698 B D E A

699 Im Buch ausgeführt.

700 Im Buch ausgeführt.

701 **a)** **1)** Rate: 6 926,20 €; Zinsen: 3 704,80 €

2)

Jahr	Schulden am Beginn	Zinsen	Rückzahlung	Schulden am Ende
1	24 000,00	1440,00	6926,20	18 513,80
2	18 513,80	1110,83	6926,20	12 698,43
3	12 698,43	761,91	6926,20	6534,14
4	6534,14	392,05	6926,19	0,00

b) **1)** Rate: 11 893,91 €; Zinsen: 5 681,73 €

2)

Jahr	Schulden am Beginn	Zinsen	Rückzahlung	Schulden am Ende
1	30 000,00	2760,00	11 893,91	20 866,09
2	20 866,09	1919,68	11 893,91	10 891,86
3	10 891,86	1002,05	11 893,91	0,00

c) **1)** Rate: 22 896,59 €; Zinsen: 16 586,36 €

2)

Jahr	Schulden am Beginn	Zinsen	Rückzahlung	Schulden am Ende
1	75 000,00	6375,00	22 896,59	58 478,41
2	58 478,41	4970,66	22 896,59	40 552,48
3	40 552,48	3446,96	22 896,59	21 102,85
4	21 102,85	1793,74	22 896,59	0,00

702 **1)** Annuität: 33 656,01 €; Zinsen: 20 624,02 €

Jahr	Schulden am Beginn	Zinsen	Rückzahlung	Schulden am Ende
1	114 000,00	7980,00	33 656,01	88 323,99
2	88 323,99	6182,68	33 656,01	60 850,66
3	60 850,66	4259,55	33 656,01	31 454,20
4	31 454,20	2201,79	33 655,99	0,00

2) Annuität: 2 718,51; Zinsen: 16 488,65
Die Zinsenbelastung ist niedriger, weil die erste Rückzahlung bereits nach einem Monat erfolgt.
3) Annuität: 10 760,79 €; Zinsen: 101 215,87
Die Zinsenbelastung ist viel höher, da die Rückzahlungen über einen viel längeren Zeitraum erfolgen.

703 Zinsen bei Jahresraten: 1 097,27 €;
Zinsen bei Monatsraten: 909,97 €

704 Familie Korber sollte sich für die monatliche Rückzahlung des Kredits entscheiden, da dort weniger Zinsen anfallen. *Formal*:
K … Höhe des Kredits;
$q > 1$ … jährlicher Aufzinsungsfaktor;
$q_{12} > 1$ … monatlicher Aufzinsungsfaktor;
x … Kreditrate bei jährlicher Rückzahlung;
y … Kreditrate bei monatlicher Rückzahlung;
Wir nehmen an, dass Familie Korber den Kredit schon nach einem Jahr zurückzahlt.
Bei *jährlicher Rückzahlung* gilt $x = K \cdot q$; die anfallenden Zinsen belaufen sich auf $x - K = K \cdot q - K = K \cdot (q - 1)$.
Bei *monatlicher Rückzahlung* gilt:
$K \cdot q = y + y \cdot q_{12} + y \cdot q_{12}^2 + \ldots + y \cdot q_{12}^{11} =$
$= y \cdot \sum\limits_{n=1}^{12} q_{12}^{n-1} = y \cdot \frac{1 - q_{12}^{12}}{1 - q_{12}}$, also $y = K \cdot q \cdot \frac{1 - q_{12}}{1 - q_{12}^{12}}$;
Die anfallenden Zinsen belaufen sich also auf:
$12y - K = K \cdot \left(12 \cdot q \cdot \frac{1 - q_{12}}{1 - q_{12}^{12}} - 1\right)$.
Die anfallenden Zinsen sind bei monatlicher Rückzahlung geringer, da gilt:
$x - K < 12y - K \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{1 - q_{12}}{1 - q_{12}^{12}} < 1 \Leftrightarrow 12 < \sum\limits_{n=1}^{12} q_{12}^{n-1}$,
und das ist eine wahre Aussage, da $q_{12} > 1$.

705 ☒ ☐ ☒ ☒ ☒

706 *Variante A*: Rate: 25 000 €; Zinsen: 10 500 €
Variante B: Rate: 2 754,71 €; Zinsen: 9 669,55 €
Empfehlung: Die Variante B kommt insgesamt billiger, da weniger Zinsen zu zahlen sind.

707 **1)** Rate: 514,66 €
2) 46 Monatsraten; Rate: 296,22 €

708 **1)** monatliche Rückzahlungsrate: 554,50 €
2) Zinsen: 86 349,19 €
3) Restschuld: 62 524,38 €

709 **1)** Restschuld: 18 539,40 €
2) Restschuld: 18 277,05 €
Der Endwert wird durch die Senkung des Jahreszinssatzes kleiner.

710 Restschuld: 9 558,48 €

711 **a)** ☒ ☐ ☒ ☒ ☐ **b)** ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

712 $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$

713 **a)** $\sum\limits_{n=1}^{10} 3^n$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{10} 3^{n-1}$ **c)** $\sum\limits_{n=1}^{10} 3 \cdot 2^{n-1}$

714 **a)** $\sum\limits_{j=3}^{k} b_j$ **b)** $\sum\limits_{i=10}^{n} 2^i$

715 unendliche arithmetische Reihe;
die Differenz benachbarter Summanden $0{,}\dot{1}$ beträgt.

716 **a)** ☒ ☐ ☒ ☒ ☐ **b)** ☒ ☒ ☐ ☐ ☐

717 Beachte die Ausführungen auf den Theorieseiten des Schulbuchs: S. 136 und 138

718 **a)** gehört zur geometrischen Folge mit Startwert $b_0 = 1$ und $q = 0{,}2$; $s = \frac{5}{4} \cdot (1 - 0{,}2^{11})$
b) gehört zur geometrischen Folge mit Startwert $b_1 = \frac{3}{4}$ und $q = \frac{3}{4}$; $s = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8\right)$
c) gehört zur geometrischen Folge mit Startwert $b_1 = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{3}$; $s = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}\right)$
d) gehört zur geometrischen Folge mit Startwert $b_5 = (\sqrt{2})^5$ und $q = \sqrt{2}$; $s = \sqrt{2}^5 \cdot \frac{1 - \sqrt{2}^{146}}{1 - \sqrt{2}}$

719 Die Summenformel darf nicht angewendet werden, da es sich nicht um eine geometrische, sondern um eine arithmetische Reihe handelt.

720 **a)** geometrische Reihe;
konvergiert, da $q = \frac{4}{5} < 1$
b) arithmetische Reihe; konvergiert nicht, da arithmetische Reihen nicht konvergieren
c) geometrische Reihe;
konvergiert nicht, da $q = 1{,}5 > 1$
d) geometrische Reihe;
konvergiert, da $q = -\frac{1}{2}$ und $|-\frac{1}{2}| < 1$

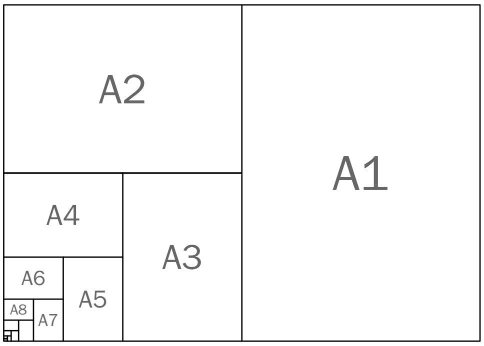
721 $b_1 = \frac{9}{10}$; $q = \frac{1}{10}$; damit: $0{,}\dot{9} =$
$= s = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$

722 Eine unendliche arithmetische Reihe ist stets divergent, weil immer wieder eine Konstante d zur jeweiligen Partialsumme hinzugezählt wird. Daher gibt es keine Summenformel.

723 Für $|q| \geq 1$ werden die Glieder der Folge (b_n) mit $b_n = b_1 \cdot q^n$ dem Betrag nach immer größer. Die Folge konvergiert nicht gegen 0. Daraus folgt, dass die Reihe divergiert.

724 **a)** falsch, denn die Summe ist $(a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$
b) richtig, da es sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2} < 1$ handelt
c) richtig, da die unendliche arithmetischen Reihe $0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ konvergiert
d) richtig, siehe Beweis des Satzes auf S. 134 im Schulbuch
e) richtig, siehe Satz auf S. 132 im Schulbuch

725 **1)** Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit Startwert $b_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$. Sie konvergiert, da $q < 1$.
2) Die Reihe ergibt die Summe der Flächeninhalte von je einem DIN A1-, A2-, A3-, …-Blatt. Sie sind zusammen genauso groß wie ein DIN A0-Blatt, also $1\,\text{m}^2$. Das ergibt sich, wenn man ein A1-Blatt auf die eine Hälfte des A0-Blattes legt, das A2-Blatt auf die eine Hälfte der noch freien Hälfte des A0-Blattes legt usw. bis das ganze A0-Blatt abgedeckt wird.



726 **a)** Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{10} < 1$ und daher ist sie konvergent.
b) $s = 111{,}\dot{1}$ Schritte **c)** $s = V \cdot \frac{k}{k-1}$

727 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

728 9, 11 und 13

729 ☐ ☐ ☐ ☒ ☒

730 $s = \frac{5}{4}$

731 ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

732 $s = 9\,\pi\,\text{cm} \approx 28{,}27\,\text{cm}$

733 $s_n = 400 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

734 $E = 51\,137{,}56$ €

735 ☒ ☐ ☒ ☐ ☐

736 $E = k \cdot \sqrt[12]{1{,}02} \cdot \frac{1 - \sqrt[12]{1{,}02}^{240}}{1 - \sqrt[12]{1{,}02}}$

737 Die Absage ist nicht gerechtfertigt, da der Barwert des Angebots (432 017,96 €) etwas höher als der Schätzwert ist.

738 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

739 a) 1,004 ist der monatliche Aufzinsungsfaktor. Das entspricht dabei einem jährlichen Zinssatz von rund 4,9 % (= $1{,}004^{12}$). Jedes Monat werden 40 € einbezahlt.

b) Es handelt sich um eine endliche geometrische Reihe mit $b_1 = 40$ und $q = q_{12}$ und $n = 24$. Da sie endlich ist, kann die Summenformel angewendet werden: $s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow$ Die linke Seite der gegebenen Gleichung ist damit äquivalent zu: $40 \cdot \frac{1-q_{12}^{24}}{1-q_{12}}$

$p_{\text{eff}} \approx 19{,}7\,\%$

c) Es dauert keine 2 Jahre, da nach 2 Jahren bereits das Ansparziel von 1 000 € erreicht wurde:

$E = 40 \cdot q_{12} \cdot \frac{1-q_{12}^{24}}{1-q_{12}} \approx 1\,009{,}50$ € mit $q_{12} = 1{,}004$

Zu Beginn werden 40 € eingezahlt. Zu Beginn des zweiten Monats beträgt das Kapital $40 \cdot 1{,}004 + 40$ Euro, zu Beginn des dritten Monats $40 \cdot 1{,}004^2 + 40 \cdot 1{,}004 + 40$, etc. und zu Beginn des n-ten Monats beträgt das Kapital $s_n = 40 \cdot 1{,}004^{n-1} + 40 \cdot 1{,}004^{n-2} + \ldots + 40 \cdot 1{,}004 + 40$

Auf der linken Seite steht der Endwert bei einer monatlichen Zahlung von 40 € nach 24 Monaten. Auf der rechten Seite steht der Endwert der noch fehlenden 800 €, die über die Raten bezahlt werden sollen.

740 a) $A_1 = 1$ und $A_{n+1} = \frac{1}{9} \cdot A_n \Rightarrow A_2 = \frac{1}{9}$. Da im 2. Schritt 4 von den kleinen Zacken dazugekommen sind, ist der Gesamtflächeninhalt im 2. Schritt also $1 + 4 \cdot \frac{1}{9}$. $A_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^2}$, im 3. Schritt sind $16 = 4^2$ kleine Zacken dazugekommen, also ist der Gesamtflächeninhalt im 3. Schritt $1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4^2 \cdot \frac{1}{9^2}$ und damit erhält man im Schritt n einen Flächeninhalt von

$A = 1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4^2 \cdot \frac{1}{9^2} + 4^{n-1} \cdot \frac{1}{9^{n-1}}$

Es handelt sich um eine endliche geometrische Reihe. Da sie konvergiert, kann man die Summenformel verwenden:

$A = \frac{9}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

b) Die Fläche ist endlich, da $\frac{4}{9} < 1$.

Der Wert der Reihe ergibt den Gesamtflächeninhalt der entstehenden Zacken. Jede Zackengröße kommt dabei nur einmal vor. Der Wert kann nicht mit der grünen Fläche übereinstimmen, da es von jeder Zackengröße (bis auf die erste) mehrere gibt.

6. Beschreibende Statistik

741 Im Buch ausgeführt.

742

Farbe	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
grün	7	$\frac{7}{30} \approx 23\,\%$
gelb	4	$\frac{2}{15} \approx 13\,\%$
orange	6	$\frac{3}{15} = 20\,\%$
rot	2	$\frac{1}{15} \approx 7\,\%$
blau	5	$\frac{1}{6} \approx 17\,\%$
schwarz	6	$\frac{3}{15} = 20\,\%$

743 ☒ ☐ ☒ ☒ ☒

744 a)

Blutgruppe	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
A	426	$\frac{213}{500} = 42{,}6\,\%$
B	140	$\frac{7}{50} = 14\,\%$
0	368	$\frac{46}{125} = 36{,}8\,\%$
AB	66	$\frac{33}{500} = 6{,}6\,\%$

b) qualitativ; Nominalskala;
Es handelt sich bei den Blutgruppen um Kategorien.

745

höchste abgeschlossene Bildung	relative Häufigkeit
1	$\frac{1}{10} = 10\,\%$
2	$\frac{11}{30} \approx 37\,\%$
3	$\frac{2}{5} = 40\,\%$
4	$\frac{2}{15} \approx 13\,\%$

746 a)

Unfallursache	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
erhöhte Geschwindigkeit	90	$\frac{3}{10} = 30\,\%$
falsches Abbiegen	75	$\frac{1}{4} = 25\,\%$
riskantes Überholen	60	$\frac{1}{5} = 20\,\%$
Vorrangverletzung	45	$\frac{3}{20} = 15\,\%$
Sonstiges	30	$\frac{1}{10} = 10\,\%$

b) Nominalskala, da es sich bei den Unfallursachen um Kategorien handelt

747 a) diskrete metrische Skala **b)** Ordinalskala
c) stetige metrische Skala **d)** Ordinalskala

748 ☒ ☐ ☒ ☐ ☒

749 $x_{min} = -7$; $x_{max} = 2$; $R = 9$;
Die Minimaltemperatur ist –7 °C, die Maximaltemperatur 2 °C. Der Temperaturunterschied beträgt 9 °C.

750 a) $x_{min} = 24$; $x_{max} = 34$; $R = 10$
b) $x_{min} = -13$; $x_{max} = -3$; $R = 10$
c) $x_{min} = 0{,}24$; $x_{max} = 0{,}4$; $R = 0{,}16$

751 a) z. B.: 12, 13, 14, 14, 17;
–4, –4, –3, 0, 1; 0,4; 2,7; 4,9; 5,0; 5,4
b) z. B.: 2, 2, 2, 2, 2; –1, –1, –1, –1, –1;
0,34; 0,34; 0,34; 0,34; 0,34

752 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

753 1) $x_{min} = 21{,}7\,\%$; $x_{max} = 45{,}5\,\%$;
Die wenigstens Schulabbrecher gibt es mit 21,7 % in der AHS, die meisten mit 45,5 % in der BMS.
2) AHS: ca. 4 905; BMS: ca. 7 046; BHS: ca. 9 634
3) Die Werte aus **2)** zeigen, dass es in der BHS fast doppelt so viele Schulabbrecher gibt. Richtig wäre: „In der BHS gibt es um 96 % mehr Schulabbrecher als in der AHS.“ bzw. „Der Anteil der Schulabbrecher ist in der BHS um 10 Prozentpunkte höher als in der AHS.“

754 Die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf das Jahr 2018.
a) Nordamerika: 375 Mio. (529 Mio.);
Südamerika: 625 Mio. (418 Mio.);
Europa: 750 Mio. (742 Mio.);
Afrika: 1,25 Mrd. (1,1 Mrd.),
Asien: 4,5 Mrd. (ca. 4 Mrd.)
b) In Australien und Ozeanien leben insgesamt weniger als 50 Mio. Menschen.

755 a) ☒ ☒ ☒ ☐ ☒
b) In den Klassen gibt es wahrscheinlich unterschiedliche Schülerzahlen. Mit Absolutwerten könnte man die Klassen nicht so gut vergleichen.

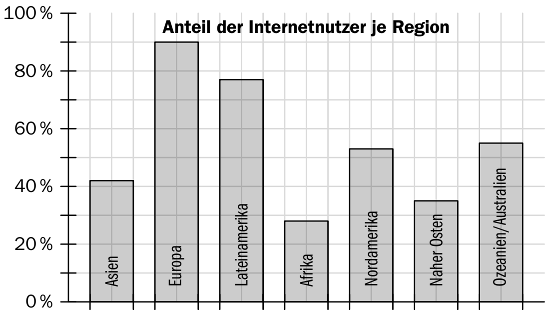
756 a) 1) Das Heiratsalter ist in den letzten vierzig Jahren immer weiter gestiegen.
2) Die Männer sind bei der Hochzeit etwa 2 bis 3 Jahre älter als die Frauen.
b) *absolute Änderung*: ca. 8 Jahre bei den Frauen, ca. 7 Jahre bei den Männern;
relative Änderung: Anstieg um rund 36 % bei den Frauen und rund 28 % bei den Männern;
Der Anstieg wirkt durch die Verkürzung stärker.

757 a) Es handelt sich um den Punkt ganz rechts unten. 1984 gab es mit einem Wirtschaftswachstum von über 7 % ein Absinken der Arbeitslosenrate um etwas mehr als 2 Prozentpunkte.
b) Je größer das Wirtschaftswachstum gewesen ist, desto stärker ist die Arbeitslosenrate gesunken.

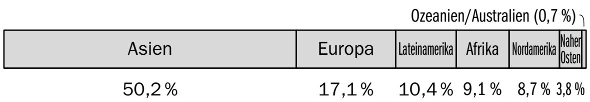
758 Die Wahl des Diagrammtyps hängt von mehreren Komponenten ab.
a) Absolute Häufigkeiten können z. B. in einem Säulendiagramm, einem Balkendiagramm oder einem Piktogramm dargestellt werden.
b) Relative Häufigkeiten werden oft in Kreisdiagrammen oder Prozentstreifen dargestellt, weil die Flächen der Segmente bzw. der Rechtecke die relative Häufigkeit repräsentieren.

759 1) *absolute Änderung*: 1,05 Mio.; *relative Änderung*: 37 %
2) Die Aussage stimmt; *absolute Änderung*: 685 590
3) 1986 gab es 781 140, 2016 gab es 1 466 730 Single-Haushalte. Die Aussage ist also ungefähr zutreffend.
4) 1986 gab es 1 065 960, 2016 gab es 1 052 640 Haushalte von Paaren mit Kindern. Das entspricht einer Abnahme von ca. 1,2 %. Bei dem Wert 10,6 handelt es sich eigentlich um Prozentpunkte.

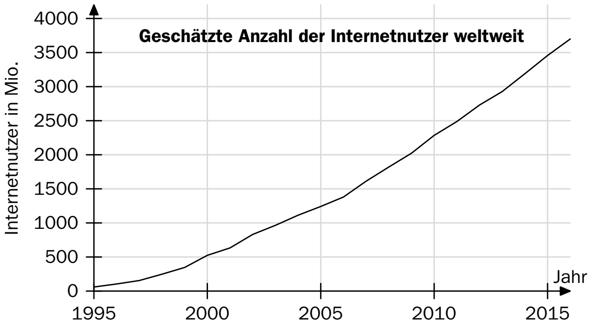
760 a) Asien: 42 %; Europa: 90 %; Lateinamerika: 77 %; Afrika: 28 %; Nordamerika: 53 %; Naher Osten: 35 %; Ozeanien/Australien: 55 %



b)



761 1) Im Jahr 1995 hat weniger als 1 % der Weltbevölkerung das Internet genutzt. Im Laufe der Jahre ist dieser Anteil kontinuierlich gestiegen. 2016 haben weltweit 47,1 % das Internet genutzt.
2) 1995 haben um 78,2 % mehr Personen das Internet genutzt als noch im Jahr davor.
2016 haben 47,1 % der Weltbevölkerung das Internet genutzt. Das sind um 7 % mehr als im Jahr 2015.
3) Die Aussage ist richtig. 2016 haben 47,1 % der Weltbevölkerung das Internet genutzt.
4) Die orange Linie beschreibt die relative Änderung der Internetnutzer im Vergleich zum Vorjahr. Da die Anzahl der Internetnutzer annähernd linear wächst, sinkt das relative Wachstum.
5) Mithilfe der Daten aus Aufgabe **760** sowie **761** lassen sich z. B. Absolutwerte berechnen. Eine mögliche Schlagzeile könnte lauten: „Knapp 4 Milliarden Menschen sind online – Tendenz steigend“.



762 Im Buch ausgeführt.

763 a)

0	4 9 9
1	1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8 8 9 9 9
2	0 0 1 1 1 1 2 2
3	0 4 9

b) Am häufigsten ist die zweite Gehaltsklasse (mindestens 1 000 €, aber weniger als 2 000 €) vertreten, am seltensten die erste und vierte (weniger als 1 000 € bzw. mindestens 3 000 €, aber weniger als 4 000 €).

764 1) a) 16 Personen **b)** 17 Personen
c) 14 Personen
2) a) Kleinste: 146 cm; Größte: 189 cm
b) Kleinste: 164 cm; Größte: 201 cm
c) Kleinste: 165 cm; Größte: 204 cm
3) a) Die meisten Personen sind in der zweiten Größenklasse, d. h. sie sind mindestens 150 cm, aber kleiner als 160 cm.
b) Die meisten Personen sind in der zweiten Größenklasse, d. h. sie sind mindestens 170 cm, aber kleiner als 180 cm.
c) Die meisten Personen sind in der vierten Größenklasse, d. h. sie sind mindestens 190 cm, aber kleiner als 200 cm.

765 Im Buch ausgeführt.

766 Im Buch ausgeführt.

767 **1)** diskretes Merkmal, da die Fehlstunden $\in \mathbb{N}$ sind

2) z. B.:

	sehr wenig	wenig	mittel	hoch	sehr hoch
Fehlstunden	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
absolute Häufigkeit	6	6	4	4	5

3) Durch das Zusammenfassen in Klassen werden die Daten viel übersichtlicher dargestellt. Die Fehlstunden können leichter überblickt werden.

768 z.B.:

	sehr kurz	kurz	mittel	lang	sehr lang
Akkulebensdauer	[500; 600)	[600; 700)	[700; 800)	[800; 900)	[900; 1000)
absolute Häufigkeit	9	9	8	17	7
relative Häufigkeit	$\frac{9}{50}$ = 18 %	$\frac{9}{50}$ = 18 %	$\frac{4}{25}$ = 16 %	$\frac{17}{50}$ = 34 %	$\frac{7}{50}$ = 14 %

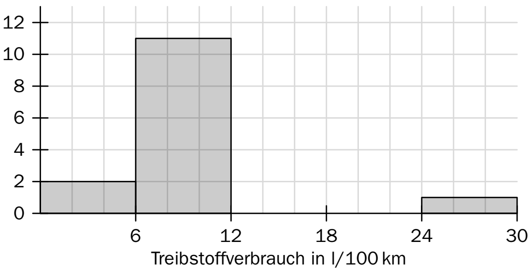
769 **1)** stetiges Merkmal, da der Treibstoffverbrauch $\in \mathbb{R}$ ist

2) z.B.:

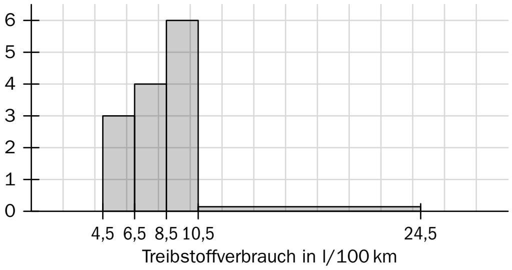
	gering	eher gering	eher hoch	hoch	sehr hoch
Treibstoffverbrauch	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)
absolute Häufigkeit	2	11	0	0	1

Die Einteilung in gleich breite Klassen ist hier nicht sinnvoll, da es einen Ausreißer nach oben gibt und damit die Klassen dazwischen alle leer bleiben.

3)



4)



5) Das Histogramm aus **3)** liefert kaum Informationen, da fast alle Daten in derselben Klasse liegen. Eine Klasseneinteilung ist daher sinnlos. Das Histogramm aus **4)** ist besser geeignet.

770 **1)** Wohneinheit *A* z.B.:

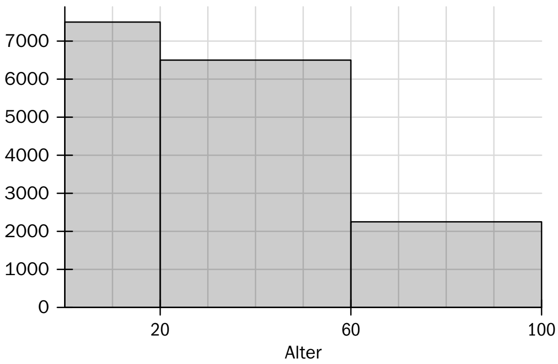
	jünger	mittel	älter
Alter	0 bis 19	20 bis 59	60 bis 99
absolute Häufigkeit	3	17	0
relative Häufigkeit	$\frac{3}{20}$ = 15 %	$\frac{17}{20}$ = 85 %	$\frac{0}{20}$ = 0 %

Wohneinheit *B* z.B.:

	jünger	mittel	älter
Alter	0 bis 19	20 bis 59	60 bis 99
absolute Häufigkeit	3	19	3
relative Häufigkeit	$\frac{3}{25}$ = 12 %	$\frac{19}{25}$ = 76 %	$\frac{3}{25}$ = 12 %

2) Die absoluten und relativen Häufigkeiten sind bei beiden sehr ähnlich. Wenn man aber die genauen Daten anschaut, so unterscheiden sich die beiden Wohneinheiten sehr deutlich voneinander. Durch die Klasseneinteilung gehen also Informationen verloren.

771 **1)**



2) Im Säulendiagramm hat man den Eindruck, dass es nur sehr wenige Kinder und Jugendliche gibt, während das im Histogramm ganz anders aussieht.

772 *Säulendiagramm*: auch für qualitative Merkmale; Einteilung der Daten in Klassen möglich; Längen als Repräsentant für die Häufigkeit;
Histogramm: ausschließlich für quantitative Merkmale; Einteilung der Daten in Klassen notwendig; Flächen als Repräsentant für die Häufigkeit; x-Achse als Skala; unmittelbar aneinandergrenzende Säulen; Berücksichtigung der Tatsache, dass größere Klassen mehr Werte enthalten

773 Im Buch ausgeführt.

774 a) 1) Modus: 2; $\bar{x} = 4{,}4$; $\tilde{x} = 2$
2) $R = 11$; $s \approx 4{,}0$
b) 1) Modus: 2 und 7; $\bar{x} = 4{,}5$; $\tilde{x} = 4{,}5$
2) $R = 5$; $s \approx 2{,}1$
c) 1) Modus: -1; $\bar{x} = -0{,}\dot{3}$; $\tilde{x} = -0{,}5$
2) $R = 9$; $s \approx 2{,}7$
d) 1) Modus: -1; $\bar{x} = 2{,}\dot{3}$; $\tilde{x} = -0{,}5$
2) $R = 25$; $s \approx 8{,}1$
e) 1) Modus: 5; $\bar{x} = 5$; $\tilde{x} = 5$
2) $R = 0$; $s = 0$
f) 1) Modus: 0 und 10; $\bar{x} = 5$; $\tilde{x} = 5$
2) $R = 10$; $s = 5$

775 a) Modus, da er der häufigste Wert ist, muss er ein Wert aus der Urliste sein. Median und arithmetisches Mittel können ein Wert der Urliste sein, müssen aber nicht.
b) Median und das arithmetische Mittel sind eindeutig bestimmt, beim Modus kann es auch mehrere Werte geben.
c) Das arithmetische Mittel wird durch einen Ausreißer stark beeinflusst, Modus und Median nicht.
d) Der Modus eignet sich zur Beschreibung qualitativer Merkmale, da er der häufigste Wert ist. Es kann es sich um Merkmale wie z. B. das Geschlecht handeln.

776 $\bar{x} = 2{,}2\,\text{mg/l}$; $s \approx 0{,}16\,\text{mg/l}$
Durchschnittlich hat der Fluss eine Phosphatbelastung von 2,2 mg/l. Die Werte streuen mit einer Standardabweichung von 0,16 um den Mittelwert.

777 Zu sagen, dass im Durchschnitt 3,2 gewürfelt wurde, ist nicht sinnvoll. Das arithmetische Mittel hat im gegebenen Kontext keine Aussagekraft.
Auch der Median eignet sich nicht, um die Würfelergebnisse zu beschreiben. Es ist sehr wahrscheinlich, dass der Median bei 30-maligem Würfeln bei 3 oder 4 liegt. Die Interpretation der Kennzahl ist somit wenig aussagekräftig.
Der Modus eignet sich als einziger Lageparameter, um die Ergebnisse zu beschreiben: Die Augenzahl 1 wurde am häufigsten gewürfelt.

778 Die durchschnittliche Fahrzeit ist bei Route 1 mit 30 min ein bisschen geringer als bei Route 2 ($\bar{x} = 31{,}2$ min). Die Zeit, die Oliver mit der Bahn bis zu Schule braucht, schwankt jedoch stark mit einer Standardabweichung von $s \approx 10{,}3$. Nimmt er den Bus, so kann er, wegen der Standardabweichung von $s \approx 1{,}2$, relativ gut planen, wann er in der Schule ist.

779 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

780 Modus: 3; $\bar{x} = 2{,}3$;
Am häufigsten waren 3 Zimmer belegt. Durchschnittlich waren 2,3 Zimmer belegt.

781 $\bar{x}_{ges} \approx 24{,}7$

782 Der arithmetische Mittel liegt nur bei 1 900 €, der Chef hat also großzügig gerundet. Abgesehen davon zeigt das Beispiel, dass das arithmetische Mittel durch Ausreißer stark beeinflusst wird. Der Median beschreibt die Einkommenssituation in dem Unternehmen besser als das arithmetische Mittel ($\tilde{x} = 1\,000$ €). Er ist wenig sensibel bzgl. einzelner Ausreißer und wird daher auch in offiziellen Statistiken verwendet.

783 a) um 200 € erhöht **b)** bleiben gleich

784 a) 89 **b)** 102,5

785 Median: 3 000 €; $\bar{x} \approx 3\,970$ €; $R = 4\,000$ €; $s \approx 1\,620$ €;
An mindestens der Hälfte aller Tage wurden 3 000 € verdient. Die durchschnittlichen Tagessätze betrugen 3 970 €, wobei die Werte mit 1 620 € um den Mittelwert streuen. Der Unterschied zwischen dem geringsten Tagesumsatz am Montag und dem höchsten Tagesumsatz am Samstag war 4 000 €.

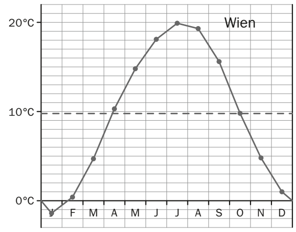
786 **1)** Sehr gut: 12,5 %; Gut: 23,8 %; Befriedigend: 35,8 %; Genügend: 18,1 %; Nicht genügend: 9,7 %

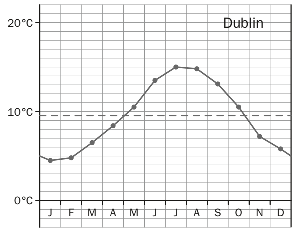
2) z. B.:

Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend
12,5 %	23,8 %	35,8 %	18,1 %	9,7 %

787 **a)** In Dublin liegen die monatlichen Durchschnittstemperaturen stets über 0 °C, in Wien gehen sie auch darunter. Dafür ist es in Dublin im Sommer nicht so warm wie in Wien. Die Temperaturkurve für Wien ist viel steiler.

b) Sowohl in Wien als auch in Dublin liegen die Jahresmitteltemperaturen bei ungefähr 10 °C (Wien rund 9,8 °C, Dublin rund 9,6 °C).



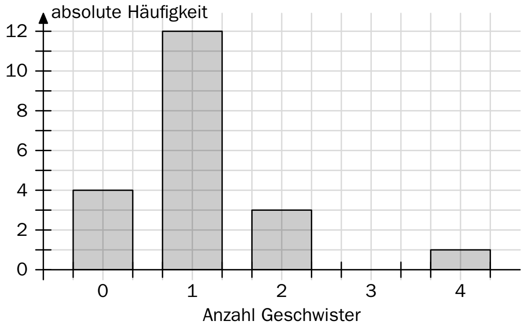


c) In Dublin schwanken die Monatsmitteltemperaturen weniger stark als in Wien. Die Abweichungen von der Jahresmitteltemperatur sind kleiner, daher ist auch die Standardabweichung geringer.

788 z. B.: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4

a) $\bar{x} = 1{,}1$; $s \approx 0{,}89$

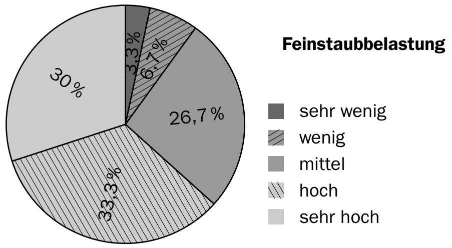
b)



789 **a)** $\bar{x} = 32{,}9\,\mu g/m^3$; $\tilde{x} = 33{,}5\,\mu g/m^3$; Modus: 21, 22, 24, 31, 34, 38, 46 und 49 (in $\mu g/m^3$)

b) z. B.:

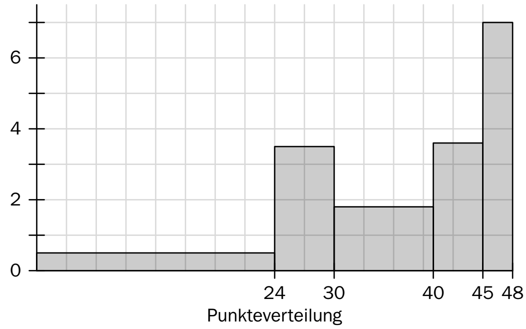
	sehr wenig	wenig	mittel	hoch	sehr hoch
Feinstaubbelastung	(0; 10]	(10; 20]	(20; 30]	(30; 40]	(40; 50]
absolute Häufigkeit	1	2	8	10	9
relative Häufigkeit	$\frac{1}{30} \approx 3{,}3\,\%$	$\frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$	$\frac{4}{15} \approx 26{,}7\,\%$	$\frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$	$\frac{3}{10} = 30\,\%$



790 **1)** z. B.:

	Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend
Punkte	45 bis 48	40 bis 44	30 bis 39	24 bis 29	0 bis 23
absolute Häufigkeit	7	6	6	7	4
relative Häufigkeit	$\frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$	$\frac{1}{5} = 20\,\%$	$\frac{1}{5} = 20\,\%$	$\frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$	$\frac{2}{15} \approx 13{,}3\,\%$

2)



791 Es müssten z. B. beide 35 Punkte erzielen oder 37 und 33 Punkte. Es gibt also mehrere Antworten. Wichtig ist, dass der Durchschnitt der Punktezahl der beiden Kinder 35 Punkte beträgt.

792 **a)** Hanna muss mindestens 9 Punkte erreichen.

b) z. B.: Vinzenz: 9, 6, 11, 8, 11; Philip: 7, 4, 13, 10, 11; Verena: 9, 9, 10, 9, 8

c) Das arithmetische Mittel wäre dann 10,7.

d) Vanessa braucht die volle Punktezahl, also 12 Punkte.

793 **1)** Modus: 11; $\tilde{x} = 9$; $\bar{x} = 8{,}76$;
Die meisten Schüler und Schülerinnen hatten 11 Punkte. Mindestens die Hälfte aller Kinder hatte zumindest 9 Punkte. Durchschnittlich wurden rund 8,8 Punkte erreicht.
2) ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

794 **a)** **1)** erhöhen sich um 2 **2)** bleiben gleich
b) **1)** & **2)** verdoppeln sich

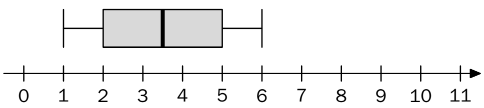
795 **a)** bleibt gleich **b)** bleibt gleich
c) wird um 2 größer **d)** wird größer

796 Im Buch ausgeführt.

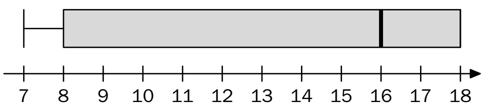
797 Im Buch ausgeführt.

798 **a)** Der Median ist mit 5 jener Wert, der genau in der Mitte liegt, da die Datenliste eine ungerade Anzahl von Daten enthält. Er teilt die Liste in eine untere und eine obere Hälfte. Der Median selbst zählt dabei nicht dazu. Das Quartil q_1 ist dann der Median der unteren Hälfte. Es ist jener Wert, der genau in der Mitte liegt, also $q_1 = 4$. Das Quartil q_3 ist der Median der oberen Hälfte, also $q_3 = 8$.
b) Der Median ist mit 5,5 der Mittelwert zwischen 4. und 5. Zahl, da die Datenliste eine gerade Anzahl von Daten enthält. Er teilt die Liste in eine untere und eine obere Hälfte. Das Quartil q_1 ist dann der Median der unteren Hälfte, er ergibt sich also als Mittelwert von der 2. und 3. Zahl, also $q_1 = 4{,}5$. Das Quartil q_3 ist der Median der oberen Hälfte, er ergibt sich also als Mittelwert der 6. und 7. Zahl, also $q_3 = 7$.

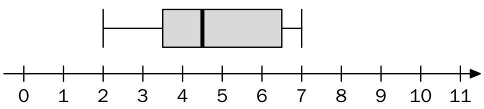
799 **a)** $\tilde{x} = 3{,}5$; $q_1 = 2$; $q_3 = 5$



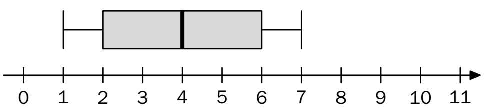
b) $\tilde{x} = 16$; $q_1 = 8$; $q_3 = 18$



c) $\tilde{x} = 4{,}5$; $q_1 = 3{,}5$; $q_3 = 6{,}5$



d) $\tilde{x} = 4$; $q_1 = 2$; $q_3 = 6$



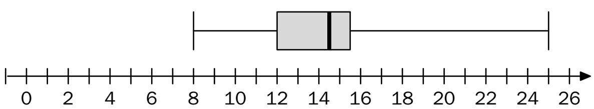
800 **a)** $x_{min} = 1$; $x_{max} = 10$; $R = 9$;
$\tilde{x} = 8$; $q_1 = 4$; $q_3 = 9$
b) $x_{min} = 1$; $x_{max} = 17$; $R = 16$;
$\tilde{x} = 8$; $q_1 = 4$; $q_3 = 9$
c) $x_{min} = 1$; $x_{max} = 10$; $R = 9$;
$\tilde{x} = 5$; $q_1 = 4$; $q_3 = 9$
d) $x_{min} = 2$; $x_{max} = 17$; $R = 15$;
$\tilde{x} = 5$; $q_1 = 4$; $q_3 = 7$

801 **a)** ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐
b) Die 6C hat die besten, die 6A die schlechtesten Ergebnisse erzielt. Bei der 6C ist das Maximum, das Minimum, der Median und die beiden Quartile jeweils höher als in den anderen Klassen. Bei der 6A sind die Kennzahlen fast gleich mit der 6B, aber das untere Quartil ist noch kleiner als in der 6B.
c) Der Schüler hat entweder 8, 9 oder 10 Punkte erreicht.

802 $q_1 = 127\,s$; $q_2 = 128{,}5\,s$; $q_3 = 133\,s$;
Z. B. war mindestens die Hälfte aller Schülerinnen schneller als $q_2 = 128{,}5\,s$. Mindestens 75 % aller Schülerinnen waren schneller als 133 s. Mindestens 25 % aller Schülerinnen waren schneller als 127 s.

803 **a)** $\tilde{x} = 1{,}5$; $q_1 = 1$; $q_3 = 3$;
Z. B. nutzt mindestens die Hälfte aller Jugendlichen mehr als 1 bis 2 soziale Netzwerke. Mindestens 25 % aller Jugendlichen nutzen zumindest 3 soziale Netzwerke. Mindestens 25 % aller Jugendlichen nutzen höchstens ein soziales Netzwerk.
b) Das Maximum und das 3. Quartil sind gleich groß: $x_{max} = q_3 = 3$. Das kann hier sinnvoll sein, weil keiner mehr als 3 soziale Netzwerke nutzt und mindestens 25 % der Jugendlichen 3 Netzwerke nutzen.

804 **1)**



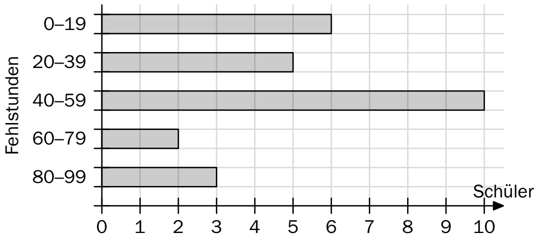
2) ☒ ☒ ☐ ☒ ☒

805 Im Buch ausgeführt.

806 Im Buch ausgeführt.

807 **a)** $\bar{x} \approx 40{,}5$; $\tilde{x} = 41{,}5$

b)

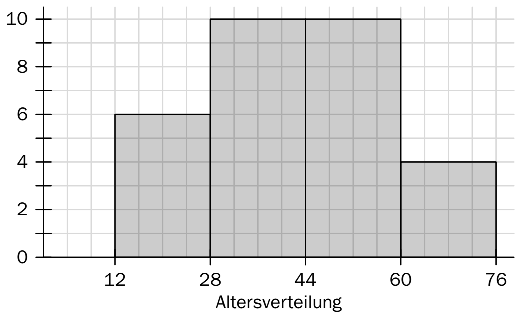


c)

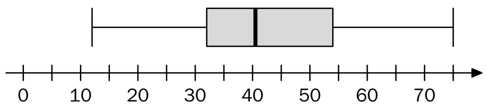
0	0 0 0
1	2 2 8
2	0 7
3	0 1 6
4	0 1 2 4 4 6
5	0 4 4 4
6	8
7	5
8	1 1
9	2

808 **a)** $\bar{x} = 41{,}7$; $s = 16{,}3$

b)



c)



809 *Nominalskala*: Automarke;
Ordinalskala: Prämienstufe;
metrische Skala: Geschwindigkeit, Reifenfülldruck, Anzahl der Beifahrer, Baujahr

810 relative Häufigkeit = $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Stichprobenumfang}}$

811 Rechercheaufgabe

812 ☒ ☐ ☐ ☒ ☒

813 Der Median ist besser geeignet, da es mit 3,67 GB einen Ausreißer gibt.

814 Der Modus ist nicht sinnvoll, da es keinen häufigsten Wert gibt, da alle Werte nur einmal vorkommen.

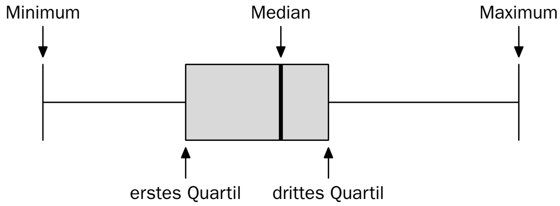
815 Julias Behauptung stimmt, denn bei ungerader Anzahl der Daten ist der Median genau der Wert, der in der Mitte steht; z. B.: 7, 11, 12, 15, 15 $\Rightarrow$ $\tilde{x} = 12$

816 **a)** Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Median, Quartile, Modalwert
b) Spannweite, Standardabweichung, Varianz, Quartilabstand

817 E C A D

818 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

819 Im Boxplot werden neben dem Median als Bezugspunkt auch der kleinste und der größte Wert sowie die Quartilen eingezeichnet. Kastenschaubilder zeigen auf einen Blick, wie stark die Daten streuen, und ob die Verteilung symmetrisch bzgl. des Medians ist.



820 **1)** z. B.: Partei A: „Die Kriminalität ist in den letzten Jahren 10 Jahren stark gesunken.“;
Partei B: „Die Kriminalität ist im Vergleich zu 2013 massiv angestiegen.“
2) Partei B hat die vertikale Achse verkürzt, sie fängt nicht bei 0 an. Daher wirkt der Anstieg viel stärker. Außerdem hat sie nur die Daten der letzten 5 Jahre verwendet.

821 Es handelt sich hier eigentlich um 5 Prozentpunkte und nicht um 5 %. Es müsste also heißen: „Die Parteien B und E konnten ihren Anteil um knapp 5 Prozentpunkte steigern, während die anderen Parteien zum Teil herbe Verluste einstecken mussten.“

822 Fabian fährt mit durchschnittlich 18,75 km/h. Er braucht 0,16 h für die Hinfahrt und $0{,}2\dot{6}$ h für die Rückfahrt. Die Fahrzeiten sind also unterschiedlich, daher kann man nicht das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten nehmen, sondern muss es mit den Fahrzeiten gewichten. $\left(\frac{25 \cdot 0{,}16 + 15 \cdot 0{,}2\dot{6}}{0{,}42\dot{6}} = 18{,}75\right)$

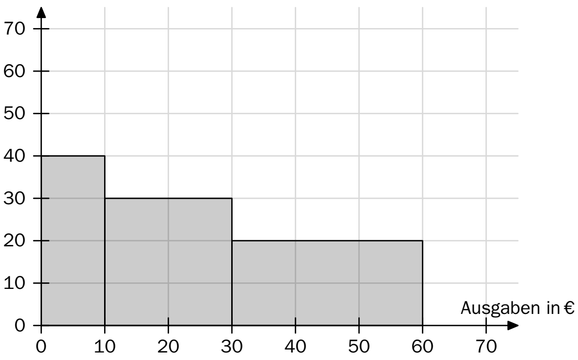
823 Die Aussage stimmt nicht. Denn wenn der Median ein Wert der Liste ist, dann sind es weniger als 50 %, die kleiner bzw. größer sind. Der Wert kann auch sogar öfters in der Liste vorkommen, dann sind es noch weniger. Es müsste also richtig heißen „… 50 % der Daten sind kleiner oder gleich …“ bzw. „größer oder gleich“.

824 **1)** Der Mittelwert der neuen Datenreihe, bei der zu jedem Wert a addiert wurde, ist um a größer als der Mittelwert der alten Datenreihe.
1. Schritt: Verwendung der Definition des Mittelwertes;
2. Schritt: Einsetzen von $y_1 = x_1 + a$, $y_2 = x_2 + a, \ldots$;
3. Schritt: Klammern auflösen und zusammenfassen;
4. Schritt: $\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$;
5. Schritt: Der erste Bruch ist genau der Mittelwert der ersten Datenreihe, der zweite Bruch ergibt nach Kürzen a.
2) R_x … Spannweite der ersten Datenreihe;
R_y … Spannweite der zweiten Datenreihe;
$R_y = y_{10} - y_1 = x_{10} + a - (x_1 + a) = x_{10} + a - x_1 - a =$
$= x_{10} - x_1 = R_x$
3) Das Minimum und Maximum, der Median und der Modalwert wird jeweils um a größer, die Standardabweichung und die Varianz bleiben gleich.

825 **1)** $d = 2$; $(\bar{x} = 3)$
2) $d = 1{,}75$; $(\tilde{x} = 2)$
3) Würde man keine Absolutbeträge verwenden, so würden sich die Abweichungen vom jeweiligen Zentralwert wieder aufheben. Beim Mittelwert würde dann sogar null herauskommen. Dann hätte diese Abweichung auch keine Aussagekraft.

826 ☒ ☐ ☐ ☒ ☒

827



828 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

829 z. B.: 3, 4, 6, 8, 8, 10, 13, 16

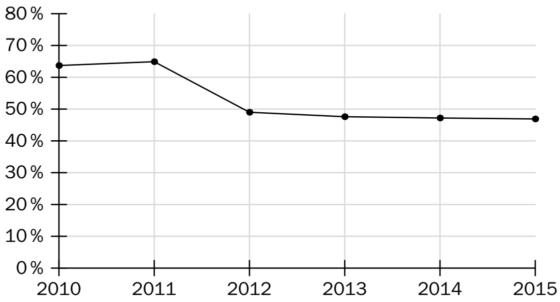
830 $\bar{x} \approx 1\,221$ €

831 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

832 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

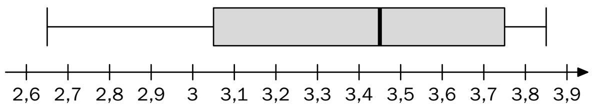
833 **a)** Anzahl der Fahrgäste: 939,1 Mio;
absolute Änderung: 33 000; *relative Änderung*: ca. 4,7 %

b) $\bar{x} \approx 475{,}83$ Mio.; von 2010 bis 2015 gab es durchschnittlich rund 476 Mio. U-Bahn-Fahrten pro Jahr;



c) Die Aussage stimmt nicht. Es handelt sich um 10 Prozentpunkte und nicht um 10 %.
2016 wurden ca. 660 Mio. Wege mit dem PKW zurückgelegt.
Hinweis: 2016 gab es ca. 954 Mio. Fahrgäste im öffentlichen Verkehr; das sind 39 %.

834 **a)** $\bar{x} = 3{,}8$; $\tilde{x} = 4$; z. B.: 3,8 und 3,8
b) Bei beidem wird die Breite des Absprungbalkens abgezogen.
Das arithmetische Mittel kann viel leichter von Ausreißern (z. B. ein ganz kurzer Sprung) beeinflusst werden, der Median nicht.
c) 9 Schülerinnen und Schüler



d) Mindestens 75 % der Mädchen haben zumindest 2,9 m geschafft.
Nein, das kann man aus den Boxplots nicht schließen. Es könnte sich um eine Gruppe von 500 Mädchen handeln, von der 100 eine Weite von 2,80 m, 100 eine Weite von 2,90 m usw. haben und um eine Gruppe von 5 Burschen, von der einer eine Weite von 2,90 m usw. hat. Dann wären nur 3 Burschen aber 100 Mädchen mind. 3,60 m gesprungen.

7. Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und Gleichungssysteme

835 Im Buch ausgeführt.

836 **a)** ☒ ☐ ☒ ☒ ☒ **b)** ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

837 **a)** richtig;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n =$$

$$= b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + \ldots + b_n \cdot a_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Das Kommutativgesetz gilt also für Vektoren.

b) falsch; $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$

$$= (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n) \cdot c_1 \\ (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n) \cdot c_2 \\ \vdots \\ (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n) \cdot c_n \end{pmatrix};$$

analog: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \ldots = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \ldots + b_n \cdot c_n) \\ a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \ldots + b_n \cdot c_n) \\ \vdots \\ a_n \cdot (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \ldots + b_n \cdot c_n) \end{pmatrix}$

Die beiden Produkte sind also nicht gleich.
Das Assoziativgesetz gilt nicht für Vektoren.

838 6A: $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; 6B: $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; 6C: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$;
Klettern: 27; Segeln: 9; Tennis: 25

839 **1)** Der Händler hatte 420 Skier.
2) Die Einnahmen betrugen 45 610 €.
3) $0{,}95 \cdot \vec{p} \cdot \vec{l}$

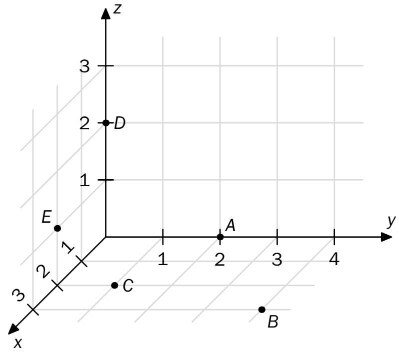
840 **a)** $\frac{1}{3} \cdot (K_A + K_B + K_C) = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
Der Ergebnisvektor gibt für jeden Tag die durchschnittlichen Umsätze pro Kassa an.
b) 48; An der Kassa A wurde in der Woche ein Gesamtumsatz von 4 800 € erzielt.

841 **a)** Der Vektor gibt den Gewinn für jede Apfelsorte an (ohne die Mehrwertsteuer zu berücksichtigen).
b) $1{,}2 \cdot \vec{v}$
c) Der erhaltene Wert gibt den Nettoerlös für die gesamte abgesetzte Menge an.

842 **a)** Gesamtstundenzahl, die in den drei Tagen gelaufen wurde
b) Gesamtstrecke, die in den drei Tagen gelaufen wurde
c) Erhöhung der einzelnen Geschwindigkeiten um je 5 %

843 **a)** $5\vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
Für 5 kg Studentenfutter werden je 2 kg Rosinen und Mandeln und 1 kg Walnüsse benötigt.
b) $\vec{l} - 200\,\vec{m} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix}$;
Vom Lagerbestand kommen 200 kg Studentenfutter weg, damit sind noch je 20 kg Rosinen und Walnüsse und 70 kg Mandeln vorhanden.
c) $\vec{p} \cdot \vec{m} = 10$;
Der Einkaufspreis für 1 kg Studentenfutter beträgt 10 €.

844 **1)**



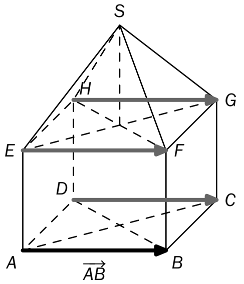
2) **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

845 **a)** **1)** $O = (0|0|0)$; $G = (2|0|0)$; $H = (2|2|0)$; $J = (0|2|0)$; $K = (2|0|2)$; $L = (2|2|2)$; $M = (0|2|2)$; $N = (0|0|2)$
2) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{JM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
b) **1)** $A = (1|0|1)$; $B = (2|1|1)$; $C = (1|2|1)$; $D = (0|1|1)$; $E = (1|1|0)$; $F = (1|1|2)$
2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

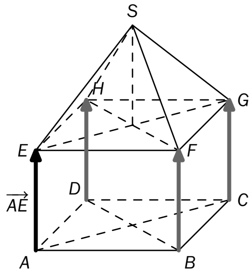
846 $B = (5|5|0)$; $C = (0|5|0)$; $F = (5|5|5)$; $G = (0|5|5)$; $H = (0|0|5)$

847 $A = (0|0|0)$; $B = (5|0|0)$; $C = (5|5|0)$; $D = (0|5|0)$; $S = (2{,}5|2{,}5|7)$

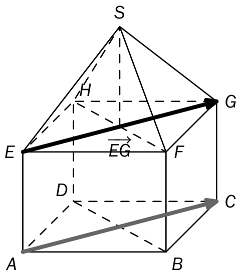
848 **a)**



b)



c)



849 **a)** E **b)** C **c)** G **d)** G **e)** G **f)** F

850 **a)** **1)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) **1)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c) **1)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_x - b_x \\ c_y - b_y \\ c_z - b_z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_x - a_x \\ c_y - a_y \\ c_z - a_z \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_x - a_x \\ c_y - a_y \\ c_z - a_z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_x - a_x \\ c_y - a_y \\ c_z - a_z \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

851 **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| \approx 12{,}08$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| \approx 1{,}83$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -0{,}7 \\ -3{,}1 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| \approx 3{,}87$

852 **a)** $D = (-6|-3|4)$; $u \approx 29{,}87$
b) $C = (2|-2|-4)$; $u \approx 34{,}88$
c) $B = (6|4|0)$; $u \approx 39{,}46$

853 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

854 **a)** parallel ($\vec{b} = -3\vec{a}$) **b)** nicht parallel
c) parallel ($\vec{b} = 6\vec{a}$) **d)** nicht parallel

855 $|t \cdot \vec{a}| = \left| t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} t a_x \\ t a_y \\ t a_z \end{pmatrix} \right| =$
$= \sqrt{(t a_x)^2 + (t a_y)^2 + (t a_z)^2} = \sqrt{t^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} =$
$= |t| \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |t| \cdot |\vec{a}|$

856 **a)** $\vec{a}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

857 **a)** $E = (10|8|5)$ **b)** $E = (-1|5{,}5|-1)$
c) $E = (4|5|-4)$

858 Im Buch ausgeführt.

859 Im Buch ausgeführt.

860 **a)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \Rightarrow$ nicht normal aufeinander
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ **c)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow$ nicht normal aufeinander

861 **a)** $b_x = -\frac{13}{2}$ **b)** $b_y = -\frac{1}{5}$ **c)** $b_z = 3$
d) $a_x = -7$

862 **a)** $\varphi = 12{,}93°$ **b)** $\varphi = 86{,}49°$
c) $\varphi = 8{,}13°$ **d)** $\varphi = 37{,}43°$

863 **a)** $\alpha = \beta = 33{,}69°$ **b)** $\gamma = 26{,}57°$

864 **1)** $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_x + 2n_z = 0$; $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$
$\Rightarrow \quad 4n_y + 3n_z = 0$

2) z. B.: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; Die beiden Vektoren sind zueinander parallel: $\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{n}$

865 **a)** $\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -22 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -63 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -23 \\ -2 \\ -33 \end{pmatrix}$; $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

866 **a)** $A = 50\,\mathrm{E}^2$ **b)** $A = 66{,}54\,\mathrm{E}^2$
c) $A = 8{,}49\,\mathrm{E}^2$ **d)** $A = 72\,\mathrm{E}^2$

867 ☒ ☐
☐ ☒
☒ ☐
☐ ☒
☐ ☒

868 $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = r\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} r a_x \\ r a_y \\ r a_z \end{pmatrix}$;

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r a_x \\ r a_y \\ r a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y r a_z - a_z r a_y \\ -a_x r a_z + a_z r a_x \\ a_x r a_y - a_y r a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

869 ☒ ☐ ☒ ☐ ☒

870 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = 50 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ parallel zur z-Achse

871 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

872 Im Buch ausgeführt.

873 Im Buch ausgeführt.

874 **a)** $g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $g\colon X = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ **d)** $g\colon X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

875 **a)** $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ **c)** $g\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

876 **a)** $g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

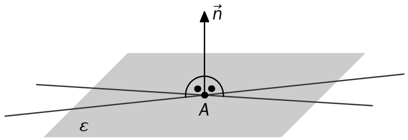
c) $g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

877 **a)** $P \notin g$ **b)** $P \in g$ **c)** $P \in g$ **d)** $P \in g$

878 **a)** $c = 2$ **b)** $a = 1$ **c)** $c = 4$ **d)** $b = -2$

879 **1)** ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

2) Die Angabe eines Punktes und eines Normalvektors reicht nicht aus, um eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ eindeutig festzulegen. Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, gibt es unendlich viele verschiedene Geraden, die durch den Punkt A gehen und den Normalvektor $\vec{n}$ haben.
Im Raum wird durch die Angabe eines Punktes sowie eines Normalvektors eine Ebene festgelegt.

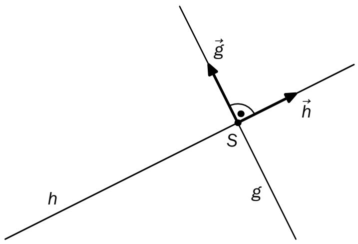


880 **a)** parallel **b)** identisch
c) $S = (1|2|3)$; $\varphi \approx 49{,}86°$ **d)** windschief

881 **a)** windschief **b)** $S = (0|1|2)$; $\varphi = 49{,}86°$
c) parallel **d)** $S = (3|6|11)$; $\varphi = 47{,}21°$

882 **a)** **1)** $a = 1 \quad b = 4$
2) $a = 1$; z. B.: $b = 3$ ($b \neq 4$)
3) z. B.: $a = 2$ ($a \neq 1$); $b = 4$
4) z. B.: $a = -1$ ($a \neq 1$); $b = 0$ ($b \neq 4$)
b) **1)** $a = -1$; $b = 1$
2) $a = -1$; z. B.: $b = 0$ ($b \neq 1$)
3) z. B.: $a = 3$ ($a \neq -1$); $b = 5$
4) nicht möglich

883 **a)** Die Geraden können auch identisch sein.
b) Im $\mathbb{R}^2$ stehen die beiden Geraden g und h mit $\vec{g} \perp \vec{h}$ im rechten Winkel aufeinander (vgl. Abbildung). Im $\mathbb{R}^3$ können die beiden Geraden „hintereinander" liegen, also windschief sein und damit keinen gemeinsamen Schnittpunkt S haben.



c) windschief sind; $\vec{g} \nparallel \vec{h}$ und $g \cap h = \emptyset$

884 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

885 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

886 **1)** $X(t_1) = \begin{pmatrix} 300 \\ -150 \\ 1\,820 \end{pmatrix}$; $X(t_2) = \begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,650 \\ 420 \end{pmatrix}$;
$X(t_3) = \begin{pmatrix} 3\,600 \\ 5\,250 \\ -2\,380 \end{pmatrix}$
2) $v = \sqrt{110^2 + 180^2 + 140^2}$ m/s $\approx 253{,}18$ m/s
3) Nach 13 s schlägt der Meteorit am Punkt $(1\,730|2\,190|0)$ auf.

887 **a)** $X(t_1) = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X(t_2) = \begin{pmatrix} 1\,350 \\ 420 \\ 60 \end{pmatrix}$;
$X(t_3) = \begin{pmatrix} 3\,550 \\ 1\,020 \\ 180 \end{pmatrix}$
b) $v = \sqrt{110^2 + 30^2 + 6^2}$ m/s ≈ 114 m/s
c) Nach 25 Minuten wird eine Steighöhe von 9 000 m erreicht.

888 **a)** Punkt B
b) Der erhaltene Punkt liegt von A doppelt so weit entfernt wie von B.
c) Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$

889 a) Die Gerade liegt auf der Diagonalen des Quadrats.
b) Punkt C

890 a) $C = (-1|3|0)$; $D = (-3|4|0)$
b) $B = (1|2|3)$; $D = (5|2|-3)$
c) $B = (0|1|3)$; $C = (2|2|1)$
d) $A = (3|-4|-0{,}5)$; $C = (5|2|2{,}5)$

891 a) $T = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ **b)** $T = A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$
c) $T = A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ **d)** $T = A + \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB}$

892 a) $T = \left(0\middle|\frac{5}{3}\middle|\frac{-4}{3}\right)$ **b)** $T = (1{,}5|1|2)$
c) $T = (1|2{,}5|1{,}5)$ **d)** $T = (2{,}8|-3{,}2|4)$

893 1) z. B.: s_A: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
s_B: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$; s_C: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ 12 \end{pmatrix}$
2) $S = \left(1\middle|\frac{22}{3}\middle|-3\right)$
3) $A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} = \left(1\middle|\frac{22}{3}\middle|-3\right) = S$
4) S_A ist parallel zur y-Achse.

894 ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

895 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

896 a) g: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** g: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **d)** g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

897 1) f_1: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$; f_2: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2) *Flugzeug 1*: $v = \sqrt{4\,100}\,\text{m/s} \approx 64{,}03\,\text{m/s}$;
Flugzeug 2: $v = \sqrt{2\,600}\,\text{m/s} \approx 50{,}99\,\text{m/s}$
3) schneiden sich bei $t = 2$ bzw. $s = 4$; $S = (4|24|8)$; Die Flugzeuge können nicht zusammenstoßen, da das erste Flugzeug den Punkt nach 2 s und das zweite Flugzeug den Punkt erst nach 4 s erreicht.
4) $\varphi \approx 106°$

898 1) g: $X = \begin{pmatrix} 60 \\ 160 \\ -22 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 140 \\ -140 \\ 2 \end{pmatrix}$; $0 \leq t \leq 1$
2) $v = 8{,}25\,\text{m/s}$ **3)** $P = (130|90|-21)$

899 Im Buch ausgeführt.

900 a) 1) ε: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
2) ε: $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 23$ bzw. ε: $-8x + 3y - 4z = 23$

b) 1) ε: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
2) ε: $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 17$ bzw ε: $5x - 2y - 3z = 17$

901 a) 1) ε: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
2) ε: $\begin{pmatrix} 21 \\ -4 \\ -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -54$ bzw. ε: $21x - 4y - 22z = -54$
b) 1) ε: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$
2) ε: $\begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 41$ bzw. ε: $25x + 7y + 5z = 41$

902 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

903 a) $z = 1$ **b)** $y = 5$

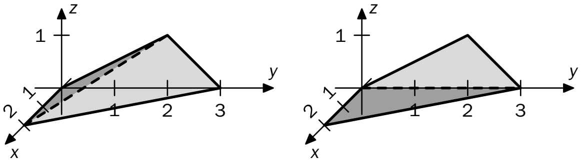
904 ε: $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -55$ bzw. ε: $-6x + 9y - 7z = -55$;
z. B. $P_1 = (2|-4|1)$ und $P_2 = (1|0|7)$ liegen auf der Ebene

905 a) 1) z. B.: $P_1 = (1|2|0)$; $P_2 = (0|0|-4)$; $P_3 = (1|-1|-3)$
2) z. B.: ε: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) 1) z. B.: $P_1 = (0|1|4)$; $P_2 = (3|3|7)$; $P_3 = (6|5|-2)$
2) z. B.: ε: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

906 a) Die Punkte bilden ein ebenes Vieleck.
b) Die Punkte bilden kein ebenes Vieleck, da sie nicht in einer Ebene liegen.

907 1) Alle Punkte liegen auf der Ebene ε: $16x + 26y + z = 23$. Da nicht drei oder vier Punkte auf einer Geraden liegen, bilden sie ein ebenes Vieleck.
2) $u \approx 66{,}39\,\text{E}$; $A \approx 229{,}09\,\text{E}^2$

3) Für die Flächenberechnung ist es wichtig, dass ein ebenes Viereck vorliegt, da die berechnete Fläche sonst keinen Sinn macht. Liegt beispielsweise bei einem Viereck der Punkt C nicht in der gleichen Ebene wie die Punkte A, B und D, so könnte trotzdem eine Fläche durch $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$ berechnet werden, diese ist aber das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannte ebene Parallelogramm und nicht die Fläche des nicht ebenen Vierecks. Andererseits könnte man versuchen ein nicht ebenes Viereck in zwei Dreiecke zu zerlegen um dann deren Fläche zu berechnen, diese Dreiecke legen zwar jeweils eine Ebene fest, aber die Zerlegung ist nicht eindeutig (vgl. Skizze).



908 a) 1) Die zwei Geraden schneiden sich im Punkt $S = (-1|-2|4)$.

2) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6$ bzw. $\varepsilon\colon 4x - 5y - 3z = -6$

b) 1) Die zwei Geraden schneiden sich im Punkt $S = (1|1|2)$.

2) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2$ bzw. $\varepsilon\colon x + 3y - z = 2$

909 a) z. B.: $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9$ bzw. $\varepsilon\colon 3x + 2y - 6z = 9$

b) z. B.: $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\varepsilon\colon -6x + 5y - 8z = 0$

910 a) 1) $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\varepsilon\colon z = 0$

b) 1) $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\varepsilon\colon x = 0$

c) 1) $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\varepsilon\colon y = 0$

911 a) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3$ bzw. $\varepsilon\colon x - 4y + z = -3$

b) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -5$ bzw. $\varepsilon\colon 3x + 2y + 5z = -5$

c) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6{,}5$ bzw. $\varepsilon\colon 4x - 2y = 13$

912 Durch den Normalvektor wird nur die „Richtung“ der Ebene festgelegt. Parallele Ebenen besitzen den gleichen Normalvektor und dieser ist nur bis auf eine multiplikative Konstante ($\neq 0$) eindeutig. Man braucht als zweites Bestimmungsstück einen Punkt auf der Ebene.

913 a) ***Parameterdarstellung***:
Vorteile: kann leicht angegeben werden, wenn drei Punkte der Ebene gegeben sind; ermöglicht ein rasches Bestimmen von Punkten auf der Ebene;
Nachteile: um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt, bedarf es größerer Anstrengungen als bei der Normalvektordarstellung
Normalvektordarstellung:
Vorteile: für einen gegebenen Punkt kann leicht überprüft werden, ob er in der Ebene liegt;
Nachteile: wenn drei Punkte der Ebene gegeben sind, so ist die Bestimmung der Normalvektordarstellung aufwendiger als die der Parameterdarstellung

b) *Parameterdarstellung*: $\varepsilon\colon X = A + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
Normalvektordarstellung: $\varepsilon\colon \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$
Um von der Parameterdarstellung zur Normalvektordarstellung zu kommen, bildet man das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dieser Vektor ist ein Normalvektor der Ebene.
Um von der Normalvektordarstellung zur Parameterdarstellung zu kommen, berechnet man die Koordinaten dreier Punkte A, B und C der Ebene. Mögliche Richtungsvektoren der Ebene sind dann $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
Hinweis: Die Punkte A, B und C dürfen nicht alle auf einer Geraden liegen.

914 Im Buch ausgeführt.

915 Im Buch ausgeführt.

916 a) $S = (-14|-7|29)$; $\varphi = 2{,}20°$
b) $S = (8|-10|-3)$; $\varphi = 35{,}26°$
c) $S = (0|6|13)$; $\varphi = 21{,}80°$
d) $S = \left(\frac{7}{2}\middle|6\middle|\frac{3}{2}\right)$; $\varphi = 48{,}64°$
e) $S = (-2|3|5)$; $\varphi = 36{,}60°$
f) $S = (0|0|0)$; $\varphi = 54{,}74°$

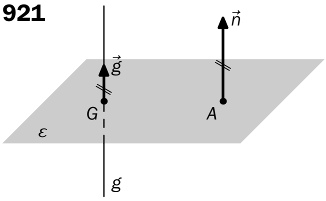
917 a) g verläuft parallel zu ε.
b) g liegt in ε. **c)** g liegt in ε.
d) g schneidet ε bzw. steht auf ε normal $\big(S = (3|-3|-3)\big)$.

918 ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

919 **a)** xy-Ebene: $S = (3|-2|0)$;
xz-Ebene: $S = (1|0|4)$; yz-Ebene: $S = (0|1|6)$
b) xy-Ebene: $S = (2|1|0)$;
xz-Ebene: kein Schnittpunkt; yz-Ebene: $S = (0|1|3)$

920 **a)** **1)** $c \neq 0$ und $d = 2$
2) $c = 0$ und $d = 2$ **3)** c beliebig und $d \neq 2$
b) **1)** $c \neq 4$ und $d = 0$
2) $c = 4$ und $d = 0$ **3)** c beliebig und $d \neq 0$

921



922 **a)** z. B.: $A = (0|0|0)$; $B = (3|0|0)$;
$C = (3|7|0)$; $D = (0|7|0)$; $E = (0|0|5)$;
$F = (3|0|5)$; $G = (3|7|5)$; $H = (0|7|5)$
b) $\varphi \approx 33{,}29°$

923 **1)** $S = (2|4|8)$
2) $\varphi = \alpha + \alpha' = 2\,\alpha = 133{,}95°$

924 Im Buch ausgeführt.

925 Im Buch ausgeführt.

926 **a)** $d(P, g) = 9\,\text{E}$ **b)** $d(P, g) \approx 3{,}74\,\text{E}$
c) $d(P, g) \approx 5{,}66\,\text{E}$ **d)** $d(P, g) \approx 6{,}32\,\text{E}$

927 **a)** $d(P, \varepsilon) \approx 4{,}12\,\text{E}$ **b)** $d(P, \varepsilon) \approx 15{,}36\,\text{E}$
c) $d(P, \varepsilon) \approx 5{,}92\,\text{E}$ **d)** $d(P, \varepsilon) = 6\,\text{E}$

928 Jeder Punkt der Ebene ε_2 hat denselben (Normal-)Abstand von ε_1. Um den Abstand $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zu berechnen, genügt es daher, den Abstand $d(\varepsilon_1, P)$, mit $P \in \varepsilon_2$ zu berechnen.

929 **a)** $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 6\,\text{E}$ **b)** $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\,\text{E}$
c) $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 7\,\text{E}$ **d)** $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 14\,\text{E}$

930 **a)** $\vec{g} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \varepsilon$
$\Rightarrow$ g ist parallel zu ε; $d(g, \varepsilon) \approx 1{,}41\,\text{E}$
b) $\vec{g} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ und $G = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \varepsilon$
$\Rightarrow$ g ist parallel zu ε; $d(g, \varepsilon) = 4\,\text{E}$
c) $\vec{g} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \varepsilon$
$\Rightarrow$ g ist parallel zu ε; $d(g, \varepsilon) \approx 1{,}79\,\text{E}$

931 **a)** $d(P, O) = 9\,\text{E}$ **b)** $d(g, O) = 3\,\text{E}$
c) $d(\varepsilon, O) = 7\,\text{E}$

932 *Abstand eines Punktes P von einer Geraden g*:
1. Schritt: Bestimme die Gleichung einer (Hilfs-)Ebene ε, die durch den Punkt P geht und normal auf g steht in Normalvektordarstellung (z. B. $\vec{n}_\varepsilon = \vec{g}$).
2. Schritt: Berechne den Schnittpunkt S von ε und g.
3. Schritt: Die Länge des Vektors $\overrightarrow{SP}$ ist der gesuchte Abstand, d. h. $d(P, g) = |\overrightarrow{SP}|$.

Abstand eines Punktes P von einer Ebene ε:
1. Schritt: Bestimme die Gleichung einer (Hilfs-)Geraden g, die durch den Punkt P geht und normal auf ε steht (z. B. $\vec{g} = \vec{n}_\varepsilon$).
2. Schritt: Berechne den Schnittpunkt S von ε und g.
3. Schritt: Die Länge des Vektors $\overrightarrow{SP}$ ist der gesuchte Abstand, d. h. $d(P, \varepsilon) = |\overrightarrow{SP}|$.

Abstand zweier paralleler Ebenen ε_1 und ε_2:
Siehe Abstand Punkt–Ebene sowie Aufg. **928**.

933 **a)** $h = 10\,\text{E}$ **b)** $A = 28{,}5\,\text{E}^2$; $V = 95\,\text{E}^3$
c) $\varphi = 45°$

934 **a)** $S' = (-6|8|-6)$ **b)** $S' = (-7|7|1)$

935 **a)** $F = (0|0|2)$
b) $A = 7{,}5\,\text{E}^2$; $h = 4\,\text{E}$; $V = 10\,\text{E}^3$
c) $S' = (0|0|-2)$

936 **a)** $y_C = -1$; $D = (0|3|7)$; $S = (6|6|10)$
(oder $S = (2|-2|2)$)
b) & **c)** $A \approx 20{,}12\,\text{E}^2$

937 **a)** $x_C = 2$; $D = (5|-4|6)$; $S = (1{,}5|3|8)$
(oder $S = (9{,}5|-1|0)$)
b) $\varphi \approx 63{,}43°$

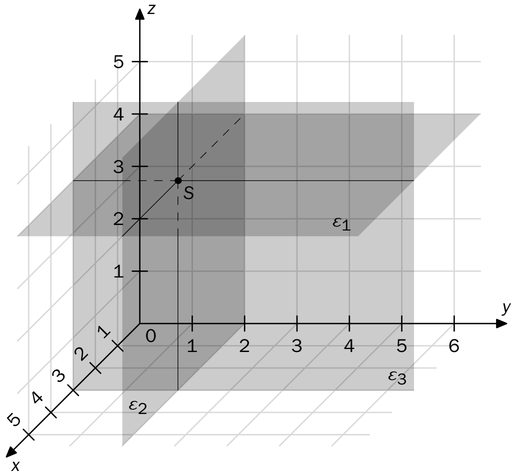
938 Im Buch ausgeführt.

939 ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

940 **a)** $S = (1|2|-4)$ **b)** $S = (2|-4|-3)$
c) $S = \left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{7}{2}\middle|-\frac{7}{2}\right)$ **d)** $S = \left(-20\middle|-4\middle|\frac{1}{2}\right)$
e) $S = (0|0|0)$ **f)** $S = (2|-12|7)$

941 **a)** $S = (2|0|1)$ **b)** $S = (0|1|0)$
c) $S = (1|2|-2)$ **d)** $S = (1|1|4)$

942 $S = (3|2|4)$



943 **a)** **1)** $S = (-2|-1|6)$;
$-(-2) = 2$ w. A. $\Rightarrow$ $S \in \varepsilon_4$
2) z. B.: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left(-5\middle|-1\middle|\frac{3}{2}\right)$
und $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{9}{4} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{MA}$ stehen nicht normal aufeinander $\Rightarrow$ die Pyramide ist schief
b) **1)** $S = (0|0|3)$;
$2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15$ w. A. $\Rightarrow$ $S \in \varepsilon_4$
2) z. B.: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (0|0|-1)$
und $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{MA}$ stehen normal aufeinander $\Rightarrow$ die Pyramide ist gerade

944 $A = 97{,}5\,\text{m}^2$ $\big(A = (19|21{,}5|5{,}5)$; $B = (34|31{,}5|5{,}5)$; $C = (31|36|5{,}5)$; $D = (16|26|5{,}5)\big)$
Hinweis: Um die zwei Eckpunkte auf der rechten Seite der grünen Fläche zu erhalten, bestimme die Höhe des Hauses ($h = 7$ E). Um die zwei Eckpunkte auf der linken Seite der grünen Fläche zu erhalten, stelle die Gleichungen der jeweiligen Ebene der Seitenfläche ($15x + 10y = 500$ bzw. $15x + 10y = 825$) und der Ebene, in der sich die grüne Fläche befindet, ($z = 5{,}5$) auf und schneide die beiden Ebenen mit der Ebene der Dachfläche.

945 Im Buch ausgeführt.

946 Im Buch ausgeführt.

947 **a)** Die Ebenen sind parallel.
b) Die Ebenen schneiden einander in einer Schnittgeraden.
c) Die Ebenen sind ident.
d) Die Ebenen schneiden einander in einer Schnittgeraden.

948 **a)** ε_2: $2x + y + z = 7$
b) ε_2: $2x - 5z = -8$

949 **a)** **1)** $c \neq -4$ und $d = -2$
2) $c = -4$ und $d = -2$ **3)** c beliebig und $d \neq -2$
b) **1)** $c = 2$ und $d \neq 1$ **2)** $c = 2$ und $d = 1$
3) $c \neq 2$ und d beliebig

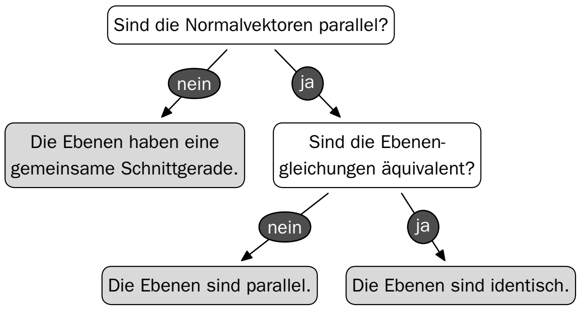
950 **a)** nicht ident **b)** ident

951 **a)** z. B.: s: $X = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
b) z. B.: s: $X = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}$
c) z. B.: s: $X = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$
d) z. B.: s: $X = \begin{pmatrix}-35\\-59\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

952 Winkel, deren Schenkel paarweise normal aufeinander stehen, sind entweder gleich groß oder sie ergänzen einander auf 180°. Man bezeichnet sie auch als *Normalwinkel*.

953 **a)** Die Ebenen sind ident.
b) Die Ebenen sind parallel.
c) Die Ebenen sind ident.
d) Die Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade:
s: $X = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$; $\varphi = 23{,}02°$
e) Die Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade:
s: $X = \begin{pmatrix}10\\13\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}25\\33\\-9\end{pmatrix}$; $\varphi = 61{,}50°$
f) Die Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade:
s: $X = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$; $\varphi = 65{,}96°$

954 Gegeben sind zwei Ebenen ε_1 und ε_2 in Normalvektordarstellung.



955 **a)** s: $X = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$
b) s: $X = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$

956 **a)** Alle drei Ebenen sind parallel.
b) Ebene 1 und Ebene 2 sind parallel, Ebene 3 schneidet beide Ebenen in parallelen Schnittgeraden.
c) Ebene 1 und Ebene 3 sind parallel, Ebene 2 schneidet beide Ebenen in parallelen Schnittgeraden.
d) Ebene 1 und Ebene 2 sind identisch, Ebene 3 ist parallel zu den anderen Ebenen.

957 Im Buch ausgeführt.

958 Im Buch ausgeführt.

959 **a)** $|\vec{a}| \approx 4{,}58$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$; $\varphi \approx 81{,}64°$;
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$
b) $|\vec{a}| \approx 5{,}10$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$; $\varphi = 119{,}31°$;
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$

960 **a)** $x = 1$; $y = -3$; $z = 4$
b) $x = -\frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = 3$

961 Im Buch ausgeführt.

962 Im Buch ausgeführt.

963 **a)** $S = (-3|2|-3)$; $\varphi \approx 10{,}02°$
b) $S = (3|2|6)$; $\varphi \approx 61{,}04°$

964 **a)** $S = (-1{,}5|-0{,}5|-8)$
b) $S = (0|1|18)$

965

	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
Darstellungsform	Vektoren als Zahlentupel mit zwei Komponenten	Vektoren als Zahlentupel mit drei Komponenten
Geometrische Interpretation	eindeutige Bestimmung der Position von Punkten oder Wegen in der Ebene (zweidimensionales Koordinatensystem)	eindeutige Bestimmung der Position von Punkten oder Wegen im Raum (dreidimensionales Koordinatensystem)
Addition von Vektoren	Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise. Geometrisch entspricht sie einer Aneinanderreihung von Verschiebungen.	
Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl	Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl wird jede Komponente mit der Zahl multipliziert. Die Multiplikation bewirkt eine Streckung (bzw. Stauchung).	
Parallelitätskriterium	Zwei Vektoren, die sich nur durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl unterscheiden, sind parallel.	
Orthogonalitätskriterium	Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0, so sind sie normal.	
Einheitsvektor	Vektor mit Länge 1	
Gegenvektor	entgegengesetzter Vektor	
Normalvektor	Im $\mathbb{R}^2$ kann ein normaler Vektor erzeugt werden, indem man die Koordinaten vertauscht und ein Vorzeichen verändert.	Keine Analogie zur Erzeugung des Normalvektors im $\mathbb{R}^2$; Neu im $\mathbb{R}^3$ ist, dass man (mithilfe des Kreuzproduktes) einen Vektor berechnen kann, der auf zwei verschiedene Vektoren normal steht.
Nullvektor	$\vec{o} = (0\|0)$	$\vec{o} = (0\|0\|0)$

966 ☐ ☒ ☒ ☐ ☒

967 **a)** ☒ ☒ ☐ ☒ ☐
b) ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

968 $\vec{g} = r \cdot \vec{h}$ für ein $r \in \mathbb{R}$
und $G = H + s \cdot \vec{h}$ für ein $s \in \mathbb{R}$; ident

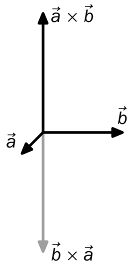
969 D A B C F E

970 $|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 =$
$= a_x \cdot a_x + a_y \cdot a_y + a_z \cdot a_z = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$

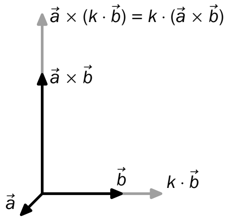
971 a) Skalarprodukt, denn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
b) Kreuzprodukt, denn $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

972 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$, aber $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

973 a) $\vec{b} \times \vec{a}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a} \times \vec{b}$



b) Wird einer der Vektoren um den Faktor *k* gestreckt/gestaucht, so verändert sich auch der Normalvektor um denselben Faktor.



974 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x a_y b_z - a_x a_z b_y - a_x a_y b_z +$
$+ a_y a_z b_x + a_x a_z b_y - a_y a_z b_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_y b_x b_z - a_z b_x b_y - a_x b_y b_z +$
$+ a_z b_x b_y + a_x b_y b_z - a_y b_x b_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

975 1) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \right|^2 =$
$= \left(\sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} \right)^2 =$
$= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 =$
$= a_y^2 b_z^2 - 2 a_y b_y a_z b_z + a_z^2 b_y^2 + a_x^2 b_z^2 - 2 a_x b_x a_z b_z$
$+ a_z^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2 - 2 a_x b_x a_y b_y + a_y^2 b_x^2 =$
$= a_x^2 b_y^2 + a_x^2 b_z^2 + a_y^2 b_x^2 + a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_x^2 + a_z^2 b_y^2$
$- 2 a_x b_x a_y b_y - 2 a_x b_x a_z b_z - 2 a_y b_y a_z b_z$

2) *1. Schritt*: $|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \right)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, ebenso $|\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$
und $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right]^2 = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2$;
2. Schritt: die ersten beiden Klammern werden ausmultipliziert, für die zweite Klammer gilt: $(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 =$ $= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \cdot (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$,
durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen kommt man auf den Ausdruck in der Klammer;
3. Schritt: die Klammer wird aufgelöst und Terme werden zusammengefasst

3) Es kommt bei beiden das Gleiche heraus, daher gilt:
$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

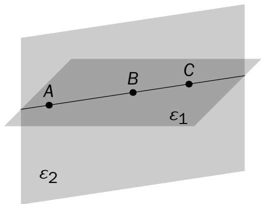
976 *1. Schritt*: die linke und rechte Seite werden quadriert;
2. Schritt: es wird folgender Zusammenhang verwendet: $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1 \Rightarrow (\cos\varphi)^2 = 1 - (\sin\varphi)^2$
3. Schritt: es werden die Äquivalenzumformungen -1 und $\cdot(-1)$ verwendet;
4. Schritt: Die 1 wird auf den gleichen Nenner gebracht und die Brüche zusammengefasst;
5. Schritt: der Zusammenhang aus **675** wird verwendet: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
6. Schritt: durch Wurzelziehen erhält man den Zusammenhang: $\sin\varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

1) $(\sin\varphi)^2 = 1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}$

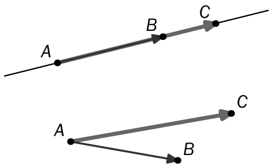
2) $(\cos\varphi)^2 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - (\sin\varphi)^2 = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}$

977 $A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

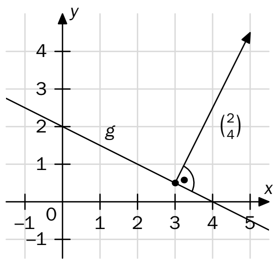
978 a) Wenn drei Punkte auf einer Geraden liegen, so legen sie zwar eine Ebene fest, diese ist jedoch nicht eindeutig (vgl. Abb.).

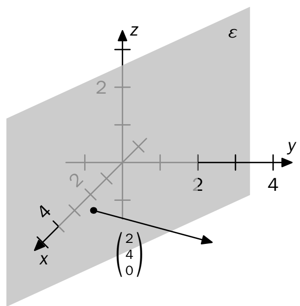


b) Wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ parallel sind, so liegen die Punkte auf einer Geraden und umgekehrt.



979 1)

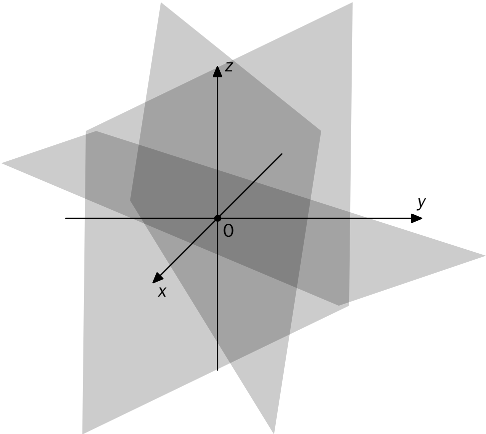




2) $\binom{2}{4}$ ist der Normalvektor von der Gerade und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Normalvektor der Ebene.

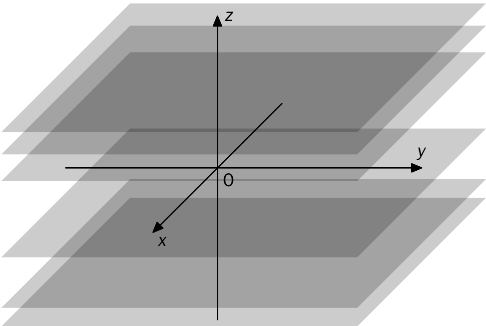
980 a) 1) den Einstiegspunkt:
ε: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

2) den Einstiegspunkt: $\varepsilon\colon \vec{n} \cdot X = 0$



b) 1) die Richtungsvektoren:
$\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) den Normalvektor: $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot X = a_3$ bzw. $z = a_3$



981 $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}5 \\ 0{,}75 \\ 1{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 130 \\ 120 \\ 110 \end{pmatrix} = 328;$
Die Gesamteinnahmen betrugen 328 €.

982 $\vec{s} = \vec{a} + \vec{z} - \vec{e}$

983 $G = \vec{E} \cdot \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \vec{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

984 $D = (-2|2|0)$; $E = (4|-1|4)$; $F = (5|3|4)$; $G = (-1|6|4)$; $H = (-2|2|4)$

985 $z = 2$

986 $v \approx 7{,}07$ m/s

987 $z = -11$

988 $\vec{a} \times \vec{b}$ steht normal auf $\vec{a}$, daher muss das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ null sein.

989 z. B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
(alle Vektoren $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$)

990 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

991 P liegt nicht auf der Geraden, da $P \neq A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ ist bzw. das entsprechende Gleichungssystem keine Lösung liefert. Man kann das auch ohne Rechnung sehen, da die Gerade g die x-Achse beschreibt (y- und z-Komponente sind immer 0), P hat aber y- und z-Komponenten ungleich 0, daher kann P nicht auf der Gerade g liegen.

992 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

993 $h_x = \frac{4}{3}$; $h_z = -2$

994 ident; $\vec{h} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

995 $S = (-5|3|1)$

996 Drei Punkte; nicht auf einer Geraden liegen

997 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6$ bzw. $\varepsilon\colon x + 2y - 2z = -6$

998 a) Die größte Seite mit $b \approx 7{,}07$ E liegt dem größten Winkel mit $\beta \approx 68{,}20°$ gegenüber. Die kleinste Seite mit $c \approx 5{,}39$ E liegt dem kleinsten Winkel mit $\gamma = 45°$ gegenüber. (dritte Seite: $a = 7E$;
dritter Winkel: $\alpha \approx 66{,}80°$); $A = 17{,}5\ \mathrm{E}^2$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ steht normal auf die Ebene, die durch die Punkte A, B und C aufgespannt wird. $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{BC}$ liegt in dieser Ebene und steht normal auf die Seite $\overrightarrow{BC}$. Auch die Höhe h_a liegt in dieser Ebene und steht normal auf die Seite $\overrightarrow{BC}$, daher müssen die beiden parallel sein.
$h_a\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3{,}4 \\ 2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;
Lösen des entsprechenden Gleichungssystems liefert $t = -\frac{3}{5}$, daher liegt der Punkt H auf der Höhenlinie h_a.

c) Der Höhenschnittpunkt H liegt auf der Höhenlinie h_a. Diese geht auch durch den Punkt C. Damit ist die Gerade durch die Punkte C und H gleich der Gerade der Höhenlinie. Die Gerade der Höhenlinie steht normal auf die Seite c, damit muss sie die Seite c schneiden und damit schneidet auch die Gerade durch die Punkte C und H die Seite c.
Die Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -25 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Gerade, auf der die Seite c liegt, $c\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, schneiden sich im Punkt $S \approx (3{,}07|0{,}97|2{,}45)$.

999 a) $|\overrightarrow{AS}| \approx 4{,}47\,\text{E}$; $|\overrightarrow{BS}| \approx 7{,}28\,\text{E}$; $|\overrightarrow{CS}| \approx 7{,}87\,\text{E}$; $|\overrightarrow{DS}| \approx 5{,}39\,\text{E}$; Alle vier Längen sind unterschiedlich lang. $\Rightarrow$ schiefe Pyramide

$D = (0|5|5)$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Die Kanten AD und CD stehen normal aufeinander.

b) $S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Der Normalvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist parallel zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden h, daher steht die Gerade h normal auf die Grundflächenebene.

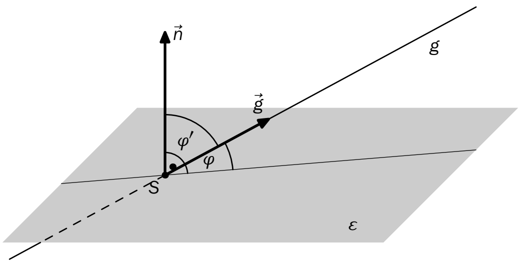
c) Das Gleichungssystem ergibt sich, wenn man die Parameterform der Ebene mit der Parameterform der Geraden h gleichsetzt. Es wird also der Schnittpunkt der Geraden h mit der Trägerebene berechnet. Der Schnittpunkt ist der Fußpunkt F;

Aus dem Gleichungssystem erhält man die Werte für r, s und t. Um den Fußpunkt F zu erhalten, kann z. B. r in die Parameterform der Geraden h eingesetzt werden.

$F = \left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{5}{3}\right)$

d) Wenn man den Winkel zwischen dem Normalvektor $\vec{n}$ und der Geraden $\vec{g}$ berechnet, erhält man zunächst den Winkel φ'. Der Normalvektor und eine beliebige Gerade auf der Ebene, die auch durch den Schnittpunkt S geht, schließen einen Winkel von 90° ein. Daher erhält man den gesuchten Winkel φ, indem man φ' von 90° abzieht.

$\varphi = 26{,}57°$



Thema: Schnitte von Prismen und Pyramiden mit Ebenen

T1 Im Buch ausgeführt.

T2 Im Buch ausgeführt.

T3 $B_1 = (2{,}5|2{,}5|1{,}5)$; $D_1 = (0|0|3)$

T4 Im Buch ausgeführt.

8. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

1000 Im Buch ausgeführt.

1001 Im Buch ausgeführt.

1002 **a)** $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
b) $\Omega = \{$Jänner, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November, Dezember$\}$
c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
d) $\Omega = \{\text{A}, \text{B}, \text{AB}, 0\}$

1003 **a)** z. B.: Die Augenzahl ist größer als 4.
b) z. B.: Die Augenzahl ist gerade.
c) z. B.: Die Augenzahl ist durch 6 teilbar.
d) z. B.: Die Augenzahl ist höchstens 5.

1004 **a)** z. B.: Es wird zweimal 6 geworfen.
b) z. B.: Es wird zweimal die gleiche Augenzahl geworfen.
c) z. B.: Die Summe ist 3.
d) z. B.: Die Summe ist größer als 10.

1005 K … Kopf, Z … Zahl
a) $\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$
b) $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (K, Z, Z), (Z, K, K), (Z, K, Z), (Z, Z, K), (Z, Z, Z)\}$

1006 r … rot, g … gelb, w … weiß
a) $\Omega = \{r, g, w\}$
b) $\Omega = \{(r, r), (r, g), (g, r), (r, w), (w, r), (g, g), (g, w), (w, g), (w, w)\}$

1007 **a)** **1)** $A = \{1, 3, 5\}$
2) Die Augenzahl ist gerade; $A' = \{2, 4, 6\}$
b) **1)** $A = \{2, 3, 5\}$
2) Die Augenzahl ist keine Primzahl; $A' = \{1, 4, 6\}$
c) **1)** $A = \{3, 6\}$
2) Die Augenzahl ist nicht durch 3 teilbar;
$A' = \{1, 2, 4, 5\}$
d) **1)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2) Die Augenzahl ist keine natürliche Zahl; $A' = \{\}$

1008 **a)** $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $A' = \{5\}$
b) $A = \{B, 0\}$; $A' = \{A, AB\}$
c) $A = \{(Z, K), (K, Z)\}$, $A' = \{(Z, Z), (K, K)\}$
d) $A = \{(m, m, m), (w, w, w)\}$; $A' = \{(m, m, w), (m, w, m), (m, w, w), (w, m, m), (w, m, w), (w, w, m)\}$

1009 **a)** z. B.: Ω: alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100; A: alle Quadratzahlen
b) z. B.: Ω: alle natürlichen Zahlen bis 20;
A: alle zweistelligen Primzahlen

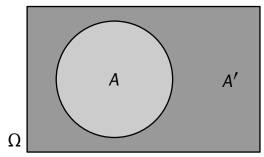
1010 **a)** **1)** $A = \{17, 18, \ldots, 32\}$;
$A' = \{0, 1, \ldots, 16\}$
2) Maximal die Hälfte schaffen die Prüfung.
b) **1)** $A = \{24, 25, \ldots, 32\}$; $A' = \{0, 1, \ldots, 23\}$
2) Weniger als 75 % aller Personen bestehen die Prüfung.
c) **1)** $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $A' = \{5, 6, \ldots, 32\}$
2) Mindestens fünf Personen bestehen die Prüfung.
d) **1)** $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $A' = \{4, 5 \ldots, 32\}$
2) Mehr als 10 % aller Personen bestehen die Prüfung.

1011 **a)** Es gibt 32 Personen bei der Fahrschulprüfung und daher 0 bis 32 Personen, die die Prüfung schaffen können, aber auch 0 bis 32 Personen, die die Prüfung nicht schaffen können.
b) Die Mengen sind genau vertauscht.

1012 Es werden hier jene Personen gezählt, die eine gültige Fahrkarte besitzen.
a) $A = \{30\}$; $A' = \{0; 1; 2; \ldots 29\}$
b) $A = \{0, 1, \ldots, 28\}$; $A' = \{29, 30\}$
c) $A = \{0, 1, \ldots, 20\}$; $A' = \{21, 22, \ldots, 30\}$
d) $A = \{0, 1, \ldots, 14\}$; $A' = \{15, 16, \ldots, 30\}$

1013 ☐ ☒ ☐ ☒ ☒

1014 **a)** A' enthält per Definition nur Elemente, die nicht in A enthalten sind. Es gibt kein Element, dass in A und in A' enthalten ist, d. h. die Durchschnittsmenge ist die leere Menge.
b) A' enthält alle Elemente aus Ω die nicht in A sind. Ein beliebiges Element aus Ω ist entweder in A oder in A' enthalten, d. h. die Vereinigung der beiden ist Ω.



1015 **a)** z. B.: 70 % $\Rightarrow P(\text{„Treffer“}) = 0{,}7$
b) z. B.: 6-mal $\Rightarrow P(\text{„Treffer“}) = 0{,}6$
c) Je mehr Versuche unternommen werden, desto genauer kann die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden. 10 Würfe werden daher nur einen sehr ungenauen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit liefern.

1016 a) Kopf: $\frac{17}{40}$; Zahl: $\frac{23}{40}$; $P(K) \approx \frac{17}{40} = 42{,}5\,\%$
b) Kopf: $\frac{22}{40}$; Zahl: $\frac{18}{40}$; $P(K) \approx \frac{22}{40} = 55\,\%$

1017 1) z. B.:

Kopf (K)	IIII
Zahl (Z)	~~IIII~~ I

2) & **3)** z. B.:

Anzahl der Würfe	absolute Häufigkeit K	relative Häufigkeit K
10	4	$\frac{4}{10} = 40\,\%$
20	9	$\frac{9}{20} = 45\,\%$
30	13	$\frac{13}{30} \approx 43{,}3\,\%$
40	17	$\frac{17}{40} = 42{,}5\,\%$
50	26	$\frac{26}{50} = 52\,\%$

4) Die Daten folgen dem empirischen Gesetz der großen Zahlen.

1018 a) $P(1) \approx 18{,}3\,\%$; $P(2) \approx 15\,\%$; $P(3) \approx 13{,}3\,\%$; $P(4) \approx 20\,\%$; $P(5) \approx 25\,\%$; $P(6) \approx 8{,}3\,\%$
b) $P(1) \approx 15\,\%$; $P(2) \approx 16{,}7\,\%$; $P(3) \approx 18{,}3\,\%$; $P(4) \approx 20\,\%$; $P(5) \approx 13{,}3\,\%$; $P(6) \approx 16{,}7\,\%$

1019 *links*: 500-mal geworfen; *rechts*: 20-mal geworfen;
Auf der linken Seite schwanken die Werte viel weniger um die theoretische Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ als auf der rechten Seite und nach dem Gesetz der großen Zahlen stabilisiert sich die relative Häufigkeit mit zunehmender Versuchszahl.

1020 1) Die nebenstehende Tabelle zeigt, dass die relativen Anteile anfangs stark schwanken, sich aber mit wachsendem n stabilisieren.
2) Die Wahrscheinlichkeit liegt bei etwa 51 %.

Geburten	Buben
0 bis 100	57,00 %
0 bis 200	52,50 %
0 bis 400	52,75 %
0 bis 800	51,38 %
0 bis 1 200	50,92 %
0 bis 2 000	51,60 %
0 bis 2 800	50,96 %

1021 ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

1022 a) z. B.: *sicheres Ereignis*: „Die Augenzahl ist höchstens 6.“; *unmögliches Ereignis*: „Die Augenzahl ist ein Vielfaches von 7.“
b) z. B.: *sicheres Ereignis*: „Der Schüler hat die Note 1, 2, 3, 4 oder 5.“; *unmögliches Ereignis*: „Der Schüler hat die Note 7.“
c) z. B.: *sicheres Ereignis*: „Die Karte hat die Farbe Pik, Kreuz, Karo oder Herz.“; *unmögliches Ereignis*: „Die Karte hat die Farbe grün.“
d) z. B.: *sicheres Ereignis*: „Die Blutgruppe ist A, B, AB oder 0.“; *unmögliches Ereignis*: „Die Blutgruppe ist F.“

1023 Im Buch ausgeführt.

1024 Im Buch ausgeführt.

1025 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **a)** $P(1) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$
b) $P(2) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$ **c)** $P(5 \text{ oder } 6) = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$
d) $P(2, 4 \text{ oder } 6) = \frac{1}{2} = 50\,\%$

1026 a) z. B.: Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl; die Augenzahl ist eine Primzahl; die Augenzahl ist größer als 3.
b) z. B.: Die Augenzahl ist ein Vielfaches von 3; die Augenzahl ist größer als 4; die Augenzahl ist höchstens 2.

1027 a) $P(\text{„Karo“}) = \frac{1}{4} = 25\,\%$
b) $P(\text{„kein Karo“}) = \frac{3}{4} = 75\,\%$
c) $P(\text{„Ass“}) = \frac{1}{5} = 20\,\%$
d) $P(\text{„Herz-Ass“}) = \frac{1}{20} = 5\,\%$

1028 a) z. B.: Man zieht Herz-Bube; man zieht Karo-10; man zieht Herz-Dame.
b) z. B.: Man zieht eine rote Karte; man zieht eine schwarze Karte; man zieht die Farbe Herz oder Pik.

1029 $\Omega = \{10, 11, \ldots, 30\}$
a) $A = \{16, 25\}$; $P(A) = \frac{2}{21} \approx 9{,}5\,\%$
b) $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$; $P(A) = \frac{6}{21} \approx 28{,}6\,\%$
c) $A = \{11, 12, \ldots, 30\}$; $P(A) = \frac{20}{21} \approx 95{,}2\,\%$
d) $A = \{10, 11, \ldots 28\}$; $P(A) = \frac{19}{21} \approx 90{,}5\,\%$

1030 1) Wir gehen davon aus, dass für jeden Schüler und für jede Schülerin die Wahrscheinlichkeit zur Stundenwiederholung ausgewählt zu werden gleich ist, also keine Person bzw. kein Geschlecht bevorzugt wird. Damit handelt es sich um ein Laplace'sches Zufallsexperiment.
2) In der 6A ist es wahrscheinlicher, dass ein Mädchen aufgerufen wird. Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 60,7 %, während sie in der 6B bei 60 % liegt.

1031 F C E B

1032 **1)** $P(\text{„schwarz“}) = \frac{6}{11} \approx 54{,}5\,\%$

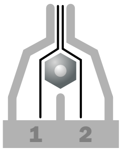
2) $P(\text{„blau oder weiß“}) = \frac{5}{11} \approx 45{,}5\,\%$

3) Die Sockenpaare haben nur 3 Farben und damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür ein schwarzes Sockenpaar oder ein blaues oder weißes Sockenpaar zu ziehen ein sicheres Ereignis.

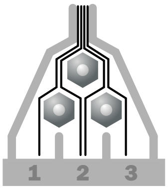
1033 Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich und zwar $P(A) = \frac{1}{6}$, da die Ereignismengen aus gleich vielen Wertepaaren bestehen:
Summe der Augenzahlen kleiner als 5:
$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$;
zwei gleiche Augenzahlen:
$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

1034 ☐ ☒ ☒ ☒ ☒

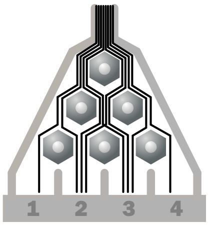
1035 **a)**
$P(1) = P(2) =$
$= \frac{1}{2} = 50\,\%$



b)
$P(1) = P(3) =$
$= \frac{1}{4} = 25\,\%$;
$P(2) = \frac{1}{2} = 50\,\%$



c) $P(1) = P(4) =$
$= \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$,
$P(2) = P(3) =$
$= \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$



1036 $P(1) = P(5) = \frac{1}{16} = 6{,}25\,\%$,
$P(2) = P(4) = \frac{1}{4} = 25\,\%$, $P(3) = \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$

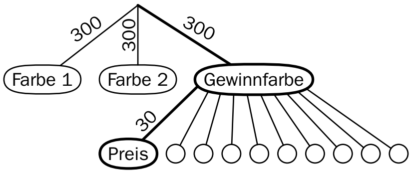
1037 Im Buch ausgeführt.

1038 Im Buch ausgeführt.

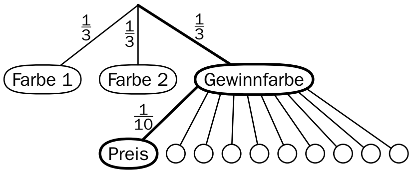
1039 Im Buch ausgeführt.

1040 30 Personen bekommen einen Gewinn; das entspricht einer Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{30} \approx 3{,}3\,\%$.

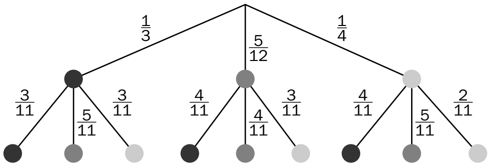
a)



b)



1041 **1)**



2) Im Nenner würde überall 12 stehen. Der Zähler würde sich in der zweiten Zeile jeweils bei der gleichen Farbe, die im Zug davor gezogen wurde, um 1 erhöhen. Alle anderen Brüche bleiben gleich.

1042 **a)** $P(\text{„nur rot“}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \approx 25{,}5\,\%$

b) $P(\text{„nur weiß“}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \approx 1{,}8\,\%$

c) $P(\text{„rot-weiß-rot“}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \approx 17{,}0\,\%$

d) $P(\text{„mindestens einmal weiß“}) = 1 - P(\text{„nur rot“}) =$
$= 1 - \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \approx 74{,}5\,\%$

1043 **a)** Lisa bekommt nur Fragen, die sie gelernt hat.

b) Lisa bekommt mindestens eine Frage, die sie nicht gelernt hat.

c) Lisa bekommt nur Fragen, die sie nicht gelernt hat.

d) Lisa bekommt mindestens eine Frage, die sie gelernt hat.

1044 **a)** $P(\text{„alle Fragen richtig“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 1{,}2\,\%$

b) $P(\text{„mindestens eine Frage richtig“}) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \approx 80{,}2\,\%$

1045 den ganzen Code; $\left(\frac{1}{10}\right)^4$

1046 **a)** $P(\text{„alle vier wählten Alexander Van der Bellen“}) \approx 8{,}4\,\%$

b) $P(\text{„alle vier wählten Norbert Hofer“}) \approx 4{,}6\,\%$

1047 $P(\text{„HAHN“}) = 1{,}56\,\%$;
Damit gibt es vorraussichtlich 15 625 Gewinne. Es werden 937 500 € ausbezahlt und 1 000 000 € eingenommen. Das Spiel ist nicht fair.

1048 **a)** mindestens 17-mal

b) mindestens 13-mal **c)** mindestens 26-mal

1049 Im Buch ausgeführt.

1050 Im Buch ausgeführt.

1051 a) $P(\text{„genau einmal gewinnen“}) = \frac{27}{64} \approx 42{,}2\,\%$
b) $P(\text{„genau zweimal gewinnen“}) = \frac{9}{64} \approx 14{,}1\,\%$

1052 a) $P(\text{„eine Weiße und zwei Schwarze“}) = \frac{225}{512} \approx 43{,}9\,\%$
b) $P(\text{„zwei Weiße und eine Schwarze“}) = \frac{135}{512} \approx 26{,}4\,\%$
c) $P(\text{„alle dieselbe Farbe“}) = \frac{19}{64} \approx 29{,}7\,\%$
d) $P(\text{„zwei gezogene derselben Farbe“}) = \frac{45}{64} \approx 70{,}3\,\%$

1053 a) $P(\text{„eine Weiße und zwei Schwarze“}) = \frac{15}{28} \approx 53{,}6\,\%$
b) $P(\text{„zwei Weiße und eine Schwarze“}) = \frac{15}{56} \approx 26{,}8\,\%$
c) $P(\text{„alle dieselbe Farbe“}) = \frac{11}{56} \approx 19{,}6\,\%$
d) $P(\text{„zwei gezogene derselben Farbe“}) = \frac{45}{56} \approx 80{,}4\,\%$

1054 a) Von der Reisegruppe hat niemand einen verbotenen Gegenstand.
b) Von der Reisegruppe hat mindestens eine Person einen verbotenen Gegenstand.
c) Von der Reisegruppe hat genau eine Person einen verbotenen Gegenstand.
d) Von der Reisegruppe haben genau vier Personen einen verbotenen Gegenstand.

1055 a) $P(\text{„mindestens ein Mädchen“}) = \frac{574}{585} \approx 98{,}1\,\%$
b) $P(\text{„höchstens ein Mädchen“}) = \frac{11}{65} \approx 16{,}9\,\%$

1056 a) $P(\text{„mindestens ein gelerntes Thema dabei“}) = \frac{29}{51} \approx 56{,}9\,\%$
b) $P(\text{„mindestens ein gelerntes Thema dabei“}) = \frac{46}{51} \approx 90{,}2\,\%$

1057 $P(\text{„Gegenreaktion bei mindestens zwei Personen“}) \approx 59{,}4\,\%$

1058 $P(\text{„Scheitern spätestens bei der dritten Frage“}) = \frac{63}{64} \approx 98{,}4\,\%$

1059 $P(\text{„mindestens drei Fragen richtig“}) = \frac{17}{625} \approx 2{,}7\,\%$

1060 a) 1) $P(\text{„positive Prüfung“}) =$
$= 0{,}5^{10} + 0{,}5 \cdot 0{,}5^9 \cdot 10 = \frac{11}{1\,024} \approx 1{,}1\,\%$
2) $P(\text{„Prüfung schaffen“}) \approx 3{,}2\,\%$
b) 1) $P(\text{„positive Prüfung“}) =$
$= 0{,}25^5 + 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 \cdot 5 = \frac{1}{64} \approx 1{,}6\,\%$
2) $P(\text{„Prüfung schaffen“}) \approx 4{,}6\,\%$

1061 Beide haben eine 50 %-Chance zu gewinnen.
(Julia: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$;
Herbert: $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$)

1062 ☒ ☐ ☒ ☒ ☐

1063 Mit 1,18 % Wahrscheinlichkeit bricht die Stromversorgung zusammen.

1064 Im Buch ausgeführt.

1065 Im Buch ausgeführt.

1066 a) $\frac{115}{205} \approx 56{,}1\,\%$ **b)** $\frac{64}{123} \approx 52{,}0\,\%$
c) $\frac{51}{82} \approx 62{,}2\,\%$ **d)** $\frac{31}{82} \approx 37{,}8\,\%$

1067 a) $P(\text{„aus der 6A“} \mid \text{„aus der 6. Klasse“})$
b) $P(\text{„ist weiblich“} \mid \text{„aus der 6A“})$
c) $P(\text{„hat ein Smartphone“} \mid \text{„aus der 6A“})$
d) $P(\text{„aus der 6A“} \mid \text{„hat ein Smartphone“})$

1068 1)

	weiblich	männlich	
Raucher	40	40	70
Nichtraucher	50	80	130
	90	110	200

2) $P(\text{„raucht“} \mid \text{„weiblich“}) = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\,\%$
3) $P(\text{„raucht“} \mid \text{„männlich“}) = \frac{3}{11} \approx 27{,}3\,\%$

1069 1)

	Matura	keine Matura	
arbeitslos	2 %	8 %	10 %
nicht arbeitslos	33 %	57 %	90 %
	35 %	65 %	100 %

2) $P(\text{„Matura“} \mid \text{„nicht arbeitslos“}) = \frac{11}{30} \approx 36{,}7\,\%$
3) $P(\text{„arbeitslos“} \mid \text{„Matura“}) = \frac{2}{35} \approx 5{,}7\,\%$

1070 $P(\text{„benutzt Zahnpasta“} \mid \text{„kennt Werbung“}) = \frac{5}{7} \approx 71{,}4\,\%$

1071

	weiblich	männlich	
raucht	2 %	20 %	22 %
raucht nicht	18 %	60 %	78 %
	20 %	80 %	100 %

a) $P(\text{„raucht“} \mid \text{„weiblich“}) = 10\,\%$
b) $P(\text{„männliche Nichtraucher“}) = 60\,\%$

1072

	geeignet	nicht geeignet	
bestanden	82,8 %	0,2 %	83 %
nicht bestanden	7,2 %	9,8 %	17 %
	90 %	10 %	100 %

a) Mit $\frac{414}{415} \approx 99{,}8\,\%$ Wahrscheinlichkeit ist die Person geeignet.

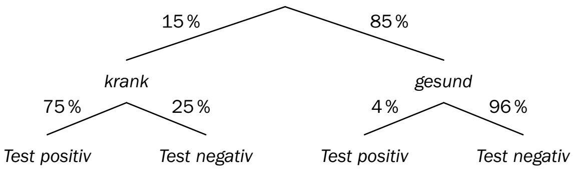
b) Mit $\frac{49}{85} \approx 57{,}6\,\%$ Wahrscheinlichkeit ist die Person nicht geeignet.

1073 ☒ ☐ ☐ ☒ ☐

1074 Im Buch ausgeführt.

1075 **a)** $P(„\text{krank}“|„\text{Test positiv}“)$
b) $P(„\text{Test negativ}“|„\text{krank}“)$
c) $P(„\text{krank}“|„\text{Test negativ}“)$
d) $P(„\text{Test negativ}“|„\text{krank}“)$

1076 **1)**



2) $P(„\text{krank}“|„\text{Test positiv}“) = \frac{225}{293} \approx 76{,}8\,\%$

1077 $P(„\text{krank}“|„\text{Test positiv}“) = \frac{49}{148} \approx 33{,}1\,\%$

1078 $P(„\text{HIV}“|„\text{Test positiv}“) = \frac{600}{617} \approx 97{,}2\,\%$

1079 **a)** $P(„\text{Allergie}“|„\text{Test positiv}“) = \frac{199}{346} \approx 57{,}5\,\%$
b) $P(„\text{gesund}“|„\text{Test negativ}“) \approx 99{,}99\,\%$

1080 **1)** *Erkrankte*: $0{,}15\,\% \cdot 12\,000 = 18$, davon haben 50,5 % ein positives Testergebnis, also rund 9. Die anderen 9 haben ein negatives Testergebnis. Diese beiden Zahlen sind im roten Kreis dargestellt.
positives Ergebnis bei Gesunden:
$(1 - 0{,}15\,\%) \cdot (1 - 95\,\%) \cdot 12\,000 \approx 599$
Diese Zahl ist im blauen Kreis dargestellt.
2) $P(„\text{krank}“|„\text{Test positiv}“) \approx 1{,}49\,\%$;
Der überraschend kleine Wert ergibt sich aus der hohen Anzahl an Personen, deren Tests – obwohl gesund – ebenfalls positiv sind. Im Diagramm sind das 599 Personen im Vergleich zu nur 9 Personen, die bei positivem Test tatsächlich auch erkrankt sind.

1081 **1)** ca. 150 Mio. €
2) Bei 100 000 Untersuchten liefert dieser Test 100 falsche negative Ergebnisse. In diesen Fällen sind Frauen infiziert, obwohl der Test ein negatives Ergebnis liefert. 59 400 Ergebnisse sind falsch positiv, das heißt, dass 59 400 Frauen ein positives Testergebnis erhalten, obwohl sie nicht infiziert sind. 100 Frauen wähnen sich also fälschlicherweise in Sicherheit, während 59 400 Frauen verunsichert werden.

1082 *Spezifität*: Gibt an, bei wie viel Prozent der Gesunden mit diesem Test die Erkrankung ausgeschlossen werden kann. Sie sollte vor allem beim Screening großer Bevölkerungsgruppen möglichst dicht bei 100 % liegen, weil sonst zu viele Gesunde falsch der Gruppe der Erkrankten zugeordnet werden.
Berechnung: $P(„\text{Test negativ}“|„\text{gesund}“) = \frac{r_n}{r_n + f_p}$
(r_n … Häufigkeit der richtig negativen Testergebnisse,
f_p … Häufigkeit der falsch positiven Testergebnisse)
Sensitivität eines Testes: Gibt an, bei wie viel Prozent der Erkrankten mit diesem Test die Erkrankung erkannt werden kann. Sie sollte bei schwerwiegenden Erkrankungen wie HIV-Infektion möglichst nahe bei 100 % liegen.
Berechnung: $P(„\text{Test positiv}“|„\text{krank}“) = \frac{r_p}{r_p + f_n}$
(r_p … Häufigkeit der richtig positiven Testergebnisse,
f_n … Häufigkeit der falsch negativen Testergebnisse)

1083 Es gilt: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, daher gilt auch
$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$. Weiters gilt:
$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')$,
und damit: $\frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$

1084 Im Buch ausgeführt.

1085 $P(„\text{positive Wirkung}“|„\text{Medikament}“) \approx 48{,}3\,\%$;
$P(„\text{positive Wirkung}“) = 44\,\%$
Die Einnahme des Medikaments wirkt sich etwas auf den Gesundheitszustand aus.

1086 **1)** **a)** $P(B|A)$ … Wahrscheinlichkeit, an Grippe zu erkranken, wenn man geimpft wurde;
$P(B)$ … Wahrscheinlichkeit, an Grippe zu erkranken;
Die Wahrscheinlichkeit einer Grippeerkrankung ist kleiner, wenn man geimpft ist, d. h.: $P(B|A) < P(B)$;
$(P(B|A) \approx 22{,}6\,\%;\quad P(B) = 42\,\%)$
b) $P(B|A')$ … Wahrscheinlichkeit, an Grippe zu erkranken, wenn man nicht geimpft wurde;
$P(B)$ … Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken;
Die Wahrscheinlichkeit einer Grippeerkrankung ist höher, wenn man nicht geimpft wurde, d. h.: $P(B|A') > P(B)$;
$(P(B|A') \approx 63{,}8\,\%;\quad P(B) = 42\,\%)$
c) $P(B'|A)$ … Wahrscheinlichkeit, nicht an Grippe zu erkranken, wenn man geimpft wurde;
$P(B')$ …Wahrscheinlichkeit, nicht an Grippe zu erkranken;
Für geimpfte Personen ist die Wahrscheinlichkeit gesund zu bleiben, höher, d. h.: $P(B'|A) > P(B')$;
$(P(B'|A) \approx 77{,}4\,\%;\quad P(B') = 58\,\%)$

d) $P(B'|A')$ … Wahrscheinlichkeit, nicht an Grippe zu erkranken, wenn man nicht geimpft wurde;
$P(B')$ … Wahrscheinlichkeit, nicht an Grippe zu erkranken;
Für Personen, die nicht geimpft sind, ist die Wahrscheinlichkeit, gesund zu bleiben, niedriger, d. h.: $P(B'|A') < P(B')$; $(P(B'|A') \approx 36{,}2\,\%$; $P(B') = 58\,\%)$

2) $P(B|A) \approx 22{,}6\,\%$; $P(A) = 42\,\%$ $\Rightarrow$ $P(B|A) < P(B)$

1087 $P(A|B) = 95\,\%$; $P(A) = 95\,\%$;
die Ausfallswahrscheinlichkeiten der beiden Alarmanlagen sind damit unabhängig.

1088 a)

	weiblich	männlich	
chronische Erkrankung	4 %	5 %	9 %
gesund	41 %	50 %	91 %
	45 %	55 %	100 %

b) $P(\text{„erkrankt"}|\text{„weiblich"}) \approx 8{,}9\,\%$;
$P(\text{„erkrankt"}) = 9\,\%$; $P(\text{„erkrankt"}|\text{„männlich"}) \approx 9{,}1\,\%$
Alle drei Werte sind annähernd gleich, daher ist die Erkrankung wahrscheinlich unabhängig vom Geschlecht.

1089 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$

1090 Die Ereignisse sind nicht unabhängig weil je nach Ausgang von Ereignis A sich die Grundgesamtheit an defekten oder funktionierenden Werkstücken ändert. Somit ändert sich die Wahrscheinlichkeit von B abhängig von A.
$P(B|A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \approx 62{,}2\,\%$; $P(B|A') = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \approx 17{,}8\,\%$

1091 Angenommen, in einer Schachtel liegen 5 rote und 5 gelbe Kugeln.
Die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug eine rote Kugel zu erhalten, hängt beim Ziehen ohne Zurücklegen davon ab, welche Kugel beim ersten Mal aus der Schachtel entnommen wurde. Es gilt:
$P(\text{„2. Kugel rot"}|\text{„1. Kugel rot"}) = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2} = P(\text{„2. Kugel rot"})$
Beim Ziehen mit Zurücklegen ändert sich die Grundgesamtheit nicht. Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel ist bei jedem Zug 50 %.

1092 1) $P(\text{„Schwarz"}) = \frac{18}{37} \approx 48{,}6\,\%$
2) $P(\text{„Schwarz"}|\text{„vorher Schwarz"}) = \frac{18}{37} \approx 48{,}6\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Mal Schwarz kommt, ist unabhängig davon, welche Farbe zuvor war.

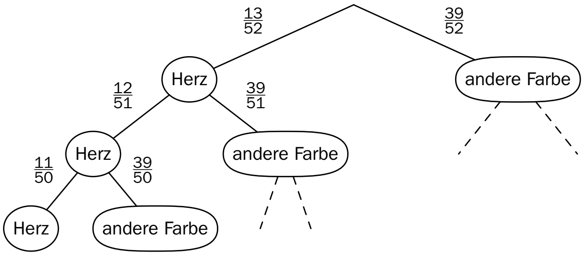
1093 ☒ ☐ ☒ ☒ ☒

1094 1) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{0\}$
2) Mindestens ein Produkt ist fehlerhaft.

1095 Dazu muss man eine Versuchsreihe machen und die relativen Häufigkeiten, wie oft das Marmeladenbrot auf die Marmeladenseite fällt, notieren. Nun kann überprüft werden, ob die relative Häufigkeiten und damit die Wahrscheinlichkeit tatsächlich höher als 50 % ist.
Hinweis: Bitte dieses Experiment nicht in einer frisch geputzten Küche durchführen!

1096 ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

1097 $P(\text{„nur Herz"}) = \frac{11}{850} \approx 1{,}3\,\%$



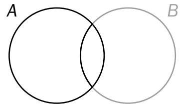
1098 ☐ ☐ ☒ ☐ ☒

1099 Die relative Häufigkeit kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses herangezogen werden – vor allem dann, wenn das Zufallsexperiment sehr häufig durchgeführt wird. Abweichungen von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit sind möglich.

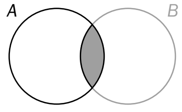
1100 Eine Person hat einen Führerschein. $P(A|B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Autounfall hat.
Eine Person hat einen Autounfall. $P(B|A)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Person einen Führerschein hat.

1101 a) $P(B|A)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die gerne Austern isst, auch gerne Brokkoli mag. Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, so ermittelt man dazu den relativen Anteil:
Im Nenner steht die Grundgesamtheit, d. h. jene Personen, die gerne Austern mögen. Von dieser Gruppe wählt man die aus, die gerne Brokkoli essen. Im Zähler steht also die Menge aller Personen, die beides, Austern und Brokkoli, gerne essen.
Hinweis: Ob man mit Absolutwerten oder mit Wahrscheinlichkeiten rechnet, ist egal.

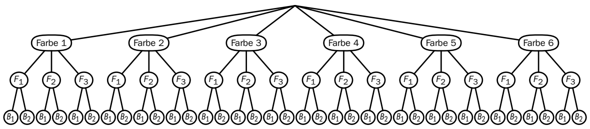
b) Berechnet man $P(B|A)$, so nimmt man an, dass das Ereignis bereits eingetreten ist. Nur ein Teil des Mengendiagramms ist für die Berechnung relevant:



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element in der Menge B liegt, kann durch einen relativen Anteil berechnet werden:



1102 **a)** 6 unterschiedliche T-Shirts, sichtbar im letzten Schritt des Baumdiagramms
b) 36 unterschiedliche Konfigurationen



c) 120
d)

Anzahl der Personen (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Begrüßungen	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

1103 $\Omega = \{(g, g), (g, b), (b, g), (b, b)\}$; $\{(g, b)\}$

1104 $A = \{(r, r, r), (r, r, b), (r, b, r), (r, b, b), (b, r, r), (b, r, b), (b, b, r), (b, b, b)\}$

1105 ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

1106 auf Basis der erhobenen Daten geschätzt; eine empirisch ermittelte Wahrscheinlichkeit

1107 B A C F

1108 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

1109 $P(\text{„rot-weiß-rot“}) = \frac{10}{273} \approx 3{,}7\,\%$

1110 ☒ ☒ ☐ ☒ ☒

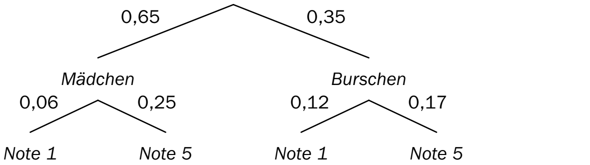
1111 C D F B

1112 $P(\text{„zwei Unvorbereitete“}) = \frac{1}{35} \approx 2{,}9\,\%$

1113 ☐ ☒ ☐ ☒ ☐

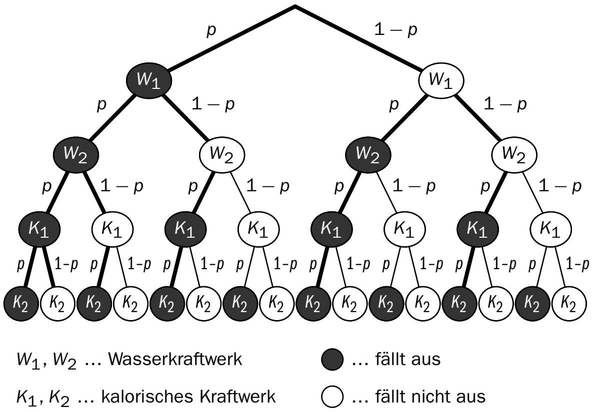
1114 $P(B|A) = \frac{7}{8} = 87{,}5\,\%$; $P(B) = 50\,\%$;
Die Führung in der 1. Halbzeit hat einen starken Einfluss auf den Gewinn.

1115 **a)** Ein Maturant oder eine Maturantin schafft mit einer Wahrscheinlichkeit von 77,8 % die Matura beim ersten Antritt.
Die relative Häufigkeit kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses herangezogen werden – vor allem dann, wenn n (hier: Anzahl der Maturant/innen) groß ist.
b) $0{,}65 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}17 = 0{,}222 = 22{,}2\,\%$;
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 22,2 % erhalten Schülerinnen und Schüler die Note 5.



c) $P(\text{„Mathematik-Matura-Note: Sehr gut“}|\text{„Person ist weiblich“}) = 6\,\%$;
Wenn ein Mädchen ausgewählt wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Note 1 hat 6 %.
$P(\text{„Mathematik-Matura-Note: Sehr gut und Person ist weiblich“}) = 3{,}9\,\%$;
Die Wahrscheinlichkeit, dass unter allen Personen ein Mädchen ausgewählt wird und dieses Mädchen die Note 1 hat, ist 3,9 %.

1116 **a)** $P(E) = p^4 + 4\,p^3\,(1-p) + (1-p)^2\,p^2 =$
$= p^4 + 4\,p^3 - 4\,p^4 + (1 - 2\,p + p^2)\,p^2 =$
$= p^4 + 4\,p^3 - 4\,p^4 + p^2 - 2\,p^3 + p^4 =$
$= -2\,p^4 + 2\,p^3 + p^2 = 2\,p^3\,(1-p) + p^2$



b) Die Wahrscheinlichkeit p darf höchstens 19,5 % sein.
$P(E) = p^2\,(1-p) + p \leq 0{,}05 \Rightarrow p \leq 4{,}78\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit p darf nun höchstens 4,7 % sein.

Thema: Das Ziegenproblem

T1 Spiel

T2 **a)** *1. Fall*: Der Ferarri steht hinter Tür 1: Der Spielleiter öffnet entweder Tür 2 oder Tür 3. Bastian ändert seine Wahl und wechselt entweder zu Tür 2 oder Tür 3. Er verliert.
2. Fall: Der Ferarri steht hinter Tür 2: Der Spielleiter öffnet daher Tür 3. Weil Bastian nicht bei seiner Wahl bleibt und sich für Tür 2 entscheidet, gewinnt er den Ferrari.
3. Fall: Der Ferarri steht hinter Tür 3: Der Spielleiter öffnet daher Tür 2. Weil Bastian nicht bei seiner Wahl bleibt und sich für Tür 3 entscheidet, gewinnt er den Ferrari.
b)
1. Fall: Der Ferarri steht hinter Tür 1: Der Spielleiter öffnet daher Tür 2. Weil Bastian nicht bei seiner Wahl bleibt und sich für Tür 1 entscheidet, gewinnt er den Ferrari.
2. Fall: Der Ferarri steht hinter Tür 2: Der Spielleiter öffnet daher Tür 1. Weil Bastian nicht bei seiner Wahl bleibt und sich für Tür 2 entscheidet, gewinnt er den Ferrari.
3. Fall: Der Ferarri steht hinter Tür 3: Der Spielleiter öffnet entweder Tür 1 oder Tür 2. Bastian ändert seine Wahl und wechselt entweder zu Tür 1 oder Tür 2. Er verliert.

T3 **a)** P(„Gewinn“) = 10 % **b)** P(„Gewinn“) = 90 %

T4 individuelle Lösungen