# Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.

[Vorläufige Mitteilung.[1])]

Von **Max Born**, Göttingen.

(Eingegangen am 25. Juni 1926.)

**Durch eine Untersuchung der Stoßvorgänge wird die Auffassung entwickelt, daß die Quantenmechanik in der Schrödingerschen Form nicht nur die stationären Zustände, sondern auch die Quantensprünge zu beschreiben gestattet.**

Die von Heisenberg begründete Quantenmechanik ist bisher ausschließlich angewandt worden zur Berechnung der stationären Zustände und der den Übergängen zugeordneten Schwingungsamplituden (ich vermeide absichtlich das Wort „Übergangswahrscheinlichkeiten"). Dabei scheint sich der inzwischen weit entwickelte Formalismus gut zu bewähren. Aber diese Fragestellung betrifft nur eine Seite der quantentheoretisehen Probleme; daneben erhebt sich als ebenso wichtig die Frage nach dem Wesen der „Übergänge" selbst. Hinsichtlich dieses Punktes scheint die Meinung geteilt zu sein; viele nehmen an, daß das Problem der Übergänge von der Quantenmechanik in der vorliegenden Form nicht erfaßt wird, sondern daß hier neue Begriffsbildungen nötig sein werden. Ich selbst kam durch den Eindruck der Geschlossenheit des logischen Aufbaues der Quantenmechanik zu der Vermutung, daß diese Theorie vollständig sein und das Übergangsproblem mit enthalten müsse. Ich glaube, daß es mir jetzt gelungen ist, dies nachzuweisen.

Schon Bohr hat die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, daß alle prinzipiellen Schwierigkeiten der Quantenvorstellungen, die uns bei der Emission und Absorption von Licht durch Atome begegnen, auch bei der Wechselwirkung von Atomen auf kurze Entfernung auftreten, also bei den Stoßvorgängen. Bei diesen hat man es statt mit dem noch sehr dunklen Wellenfelde ausschließlich mit Systemen materieller Teilchen zu tun, die dem Formalismus der Quantenmechanik unterliegen. Ich habe daher das Problem in Angriff genommen, die Wechselwirkung eines freien Teilchens ($\alpha$-Strahls oder Elektrons) und eines beliebigen Atoms näher zu untersuchen und festzustellen, ob nicht innerhalb des Rahmens der vorliegenden Theorie eine Beschreibung des Stoßvorganges möglich ist.

---

[1]) Diese Mitteilung war ursprünglich für die „Naturwissenschaften" bestimmt, konnte aber dort wegen Raummangel nicht aufgenommen werden. Ich hoffe, daß ihre Veröffentlichung an dieser Stelle nicht überflüssig erscheint.

Von den verschiedenen Formen der Theorie hat sich hierbei allein die Schrödingersche als geeignet erwiesen, und ich möchte gerade aus diesem Grunde sie als die tiefste Fassung der Quantengesetze ansehen. Der Gedankengang meiner Überlegung ist nun der folgende:

Wenn man quantenmechanisch die Wechselwirkung zweier Systeme berechnen will, so kann man bekanntlich nicht, wie in der klassischen, Mechanik, einen Zustand des einen Systems herausgreifen und feststellen, wie dieser von einem Zustande des anderen Systems beeinflußt wird, sondern alle Zustände beider Systeme koppeln sich in verwickelter Weise. Das gilt auch bei einem aperiodischen Vorgang, wie einem Stoße, wo ein Teilchen, sagen wir ein Elektron, aus dem Unendlichen kommt und wieder im Unendlichen verschwindet. Aber hier drängt sich die Vorstellung auf, daß doch sowohl vor als auch nach dem Stoße, wenn das Elektron weit genug entfernt und die Koppelung klein ist, ein bestimmter Zustand des Atoms und eine bestimmte, geradlinig-gleichförmige Bewegung des Elektrons definierbar sein muß. Es handelt sich darum, dies asymptotische Verhalten der gekoppelten Teilchen mathematisch zu fassen. Mit der Matrixform der Quantenmechanik ist mir das nicht gelungen, wohl aber mit der Schrödingerschen Formulierung.

Nach Schrödinger ist das Atom im $n$-ten Quantenzustand ein Schwingungsvorgang einer Zustandsgröße im ganzen Raume mit konstanter Frequenz $\frac{1}{h} W_n^0$. Ein geradlinig bewegtes Elektron ist speziell ein solcher Schwingungsvorgang, der einer ebenen Welle entspricht. Kommen beide in Wechselwirkung, entsteht eine verwickelte Schwingung. Aber man sieht sogleich, daß man diese durch ihr asymptotisches Verhalten im Unendlichen festlegen kann. Man hat ja nichts als ein „Beugungsproblem“, bei dem eine einfallende ebene Welle an dem Atom gebeugt oder zerstreut wird; an Stelle der Randbedingungen, die man in der Optik zur Beschreibung der Schirme verwendet, hat man hier die potentielle Energie der Wechselwirkung von Atom und Elektron.

Die Aufgabe ist also: man soll die Schrödingersche Wellengleichung für die Kombination Atom-Elektron lösen unter der Randbedingung, daß die Lösung in einer bestimmten Richtung des Elektronenraumes asymptotisch übergeht in eine ebene Welle eben dieser Fortschreitungsrichtung (das ankommende Elektron). Von der so gekennzeichneten Lösung interessiert uns nun wieder hauptsächlich das Verhalten der „gestreuten“ Welle im Unendlichen; denn diese beschreibt das Verhalten des Systems nach dem Stoß. Wir führen das etwas näher aus. Es seien $\psi_1^0(q_k)$,

$\psi_2^0(q_k), \ldots$ die Eigenfunktionen des ungestörten Atoms (wir nehmen an, es gäbe nur eine diskrete Folge); dem ungestört (geradlinig) bewegten Elektron entsprechen die Eigenfunktionen $\sin \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)$, die eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit ebener Wellen bilden, deren Wellenlänge (nach de Broglie) mit der Energie $\tau$ der Translationsbewegung durch die Relation $\tau = \frac{h^2}{2\mu\lambda^2}$ verknüpft ist. Die Eigenfunktion des ungestörten Zustandes, bei dem das Elektron aus der $+z$-Richtung kommt, ist also

$$\psi_{n\tau}^0(q_k, z) = \psi_n^0(q_k) \sin \frac{2\pi}{\lambda} z.$$

Nun sei $V(x, y, z; q_k)$ die potentielle Energie der Wechselwirkung von Atom und Elektron. Man kann dann mit Hilfe einfacher Störungsrechnungen zeigen, daß es eine eindeutig bestimmte Lösung der Schrödingerschen Differentialgleichung bei Berücksichtigung der Wechselwirkung $V$ gibt, die für $z \to +\infty$ asymptotisch in obige Funktion übergeht.

Es kommt nun darauf an, wie diese Lösungsfunktion sich „nach dem Stoß" verhält.

Nun ergibt die Rechnung: die durch die Störung erzeugte, gestreute Welle hat im Unendlichen asymptotisch den Ausdruck

$$\psi_{n\tau}^{(1)}(x, y, z; q_k) = \sum_m \iint\limits_{\alpha x + \beta y + \gamma z > 0} d\omega\, \Phi_{\substack{nm\\ \tau}}(\alpha, \beta, \gamma) \sin k_{\substack{nm\\ \tau}}(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)\, \psi_m^0(q_k).$$

Das bedeutet: die Störung läßt sich im Unendlichen auffassen als Superposition von Lösungen des ungestörten Vorgangs. Berechnet man die zur Wellenlänge $\lambda_{\substack{nm\\ \tau}}$ gehörige Energie nach der oben angegebenen de Broglieschen Formel, so findet man

$$W_{\substack{nm\\ \tau}} = h\nu_{nm}^0 + \tau,$$

wobei $\nu_{nm}^0$ die Frequenzen des ungestörten Atoms sind.

Will man nun dieses Resultat korpuskular umdeuten, so ist nur eine Interpretation möglich: $\Phi_{\substack{nm\\ \tau}}(\alpha, \beta, \gamma)$ bestimmt die Wahrscheinlichkeit[1]) dafür, daß das aus der $z$-Richtung kommende Elektron in die durch $\alpha, \beta, \gamma$

[1]) Anmerkung bei der Korrektur: Genauere Überlegung zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit dem Quadrat der Größe $\Phi_{\substack{nm\\ \tau}}$ proportional ist.

bestimmte Richtung (und mit einer Phasenänderung $\delta$) geworfen wird, wobei seine Energie $\tau$ um ein Quant $h\nu^0_{nm}$ auf Kosten der Atomenergie zugenommen hat (Stoß erster Art für $W^0_n < W^0_m$, $h\nu^0_{nm} < 0$; Stoß zweiter Art für $W^0_n > W^0_m$, $h\nu^0_m < 0$).

Die Schrödingersche Quantenmechanik gibt also auf die Frage nach dem Effekt eines Zusammenstoßes eine ganz bestimmte Antwort; aber es handelt sich um keine Kausalbeziehung. Man bekommt keine Antwort auf die Frage, „wie ist der Zustand nach dem Zusammenstoße“, sondern nur auf die Frage, „wie wahrscheinlich ist ein vorgegebener Effekt des Zusammenstoßes“ (wobei natürlich der quantenmechanische Energiesatz gewahrt sein muß).

Hier erhebt sich die ganze Problematik des Determinismus. Vom Standpunkt unserer Quantenmechanik gibt es keine Größe, die im Einzelfalle den Effekt eines Stoßes kausal festlegt; aber auch in der Erfahrnng haben wir bisher keinen Anhaltspunkt dafür, daß es innere Eigenschaften der Atome gibt, die einen bestimmten Stoßerfolg bedingen. Sollen wir hoffen, später solche Eigenschaften (etwa Phasen der inneren Atombewegungen) zu entdecken und im Einzelfalle zu bestimmen? Oder sollen wir glauben, daß die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung in der Unfähigkeit, Bedingungen für den kausalen Ablauf anzugeben, eine prästabilierte Harmonie ist, die auf der Nichtexistenz solcher Bedingungen beruht? Ich selber neige dazu, die Determiniertheit in der atomaren Welt aufzugeben. Aber das ist eine philosophische Frage, für die physikalische Argumente nicht allein maßgebend sind.

Praktisch besteht jedenfalls sowohl für den experimentellen als auch den theoretischen Physiker der Indeterminismus. Die von den Experimentatoren viel untersuchte „Ausbeutefunktion“ $\Phi$ ist jetzt auch theoretisch streng faßbar. Man kann sie aus der potentiellen Energie der Wechselwirkung $V(x, y, z; q_k)$ finden; doch sind die hierzu nötigen Rechenprozesse zu verwickelt, um sie an dieser Stelle mitzuteilen. Ich will nur die Bedeutung der Funktion $\underset{\tau}{\Phi_{nm}}$ mit einigen Worten erläutern. Ist z. B. das Atom vor dem Stoß im Normalzustand $n = 1$, so folgt aus

$$\tau + h\nu^0_{1m} = \tau - h\nu^0_{m1} = \underset{\tau}{W_{1m}} > 0,$$

daß für ein Elektron mit kleinerer Energie als die kleinste Anregungsstufe des Atoms notwendig auch $m = 1$, also $\underset{\tau}{W_{11}} = \tau$ sein muß; es erfolgt also „elastische Reflexion“ des Elektrons mit der Ausbeutefunktion $\underset{\tau}{\Phi_{11}}$. Übersteigt $\tau$ die erste Anregungsstufe, so gibt es außer der Reflexion auch Anregung mit der Ausbeute $\underset{\tau}{\Phi_{12}}$ usw. Ist das getroffene Atom im angeregten Zustand $n = 2$ und $\tau < h\nu_{21}^0$, so gibt es Reflexion mit der Ausbeute $\underset{\tau}{\Phi_{22}}$ und Stöße zweier Art mit der Ausbeute $\underset{\tau}{\Phi_{21}}$. Ist $\tau > h\nu_{21}^0$, tritt dazu weitere Anregung usw.

Die Formeln geben also das qualitative Verhalten bei Stößen vollkommen wieder. Die quantitative Ausschöpfung der Formeln für spezielle Fälle muß einer ausführlichen Untersuchung vorbehalten bleiben.

Es scheint mir nicht ausgeschlossen, daß die enge Verknüpfung von Mechanik und Statistik, wie sie hier zum Vorschein kommt, eine Revision der thermodynamisch-statistischen Grundbegriffe erfordern wird.

Ich glaube ferner, daß auch das Problem der Ein- und Ausstrahlung von Licht in ganz analoger Weise als „Randwertaufgabe“ der Wellengleichung behandelt werden muß und auf eine rationelle Theorie der Dämpfung und Linienbreite im Einklang mit der Lichtquantenvorstellung führen wird.

Eine eingehende Darstellung wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.