Kompetenzbereich Funktionale Abhängigkeiten

FA1: Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

Funktionsbegriff

Funktion f	eindeutige Zuordnung: $x \mapsto y$ ordnet jedem $x \in \mathbb{D}_f$ genau ein $y \in \mathbb{W}_f$ zu
Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$	enthält alle zulässigen x-Werte
Wertemenge $\mathbb{W}_f$	enthält alle auftretenden y-Werte
Argument, unabhängige Variable	Variable x bei einer Zuordnung $x \mapsto y$
Stelle, Argumentwert	konkreter Wert der unabhängigen Variablen x
abhängige Variable	Variable y bei einer Zuordnung $x \mapsto y$
Funktionswert	konkreter Wert der abhängigen Variablen y
reelle Funktion	Funktion mit $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R}$
Funktionstyp	Art einer Funktion: z. B. lineare Funktion, Potenz-, Polynom-, Exponential-, Sinus- oder Cosinusfunktion

Hinweis

Zwischen zwei Größen, die durch eine Funktion verbunden sind, liegt eine **funktionale Abhängigkeit** bzw. ein **funktionaler Zusammenhang** vor.

Beispiel 1: Funktion oder nicht?

Beispiel 1: Funktion oder nicht?

Bsp

Die Zuordnung „Umfang eines Rechtecks $\mapsto$ Seitenlängen des Rechtecks“ ist keine Funktion.

Begründung:

Einem bestimmten Umfang können verschiedene Seitenlängen zugeordnet werden (siehe Beispiel Tabelle). Die Zuordnung ist daher nicht eindeutig.

Umfang	Seitenlängen
10	1 und 4
10	2 und 3

Beispiel 2: Definitionsmenge von Funktionen

Beispiel 2: Definitionsmenge von Funktionen

Bsp

$f\colon\ x \mapsto \sqrt{x-2}$

Ausdruck unter der Wurzel ≥ 0

$x - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$

$\Rightarrow$ Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [2; \infty)$

$g\colon\ x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$

Nenner $\neq 0$

$x^2 - 4 \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq \pm 2$

$\Rightarrow$ Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$

Darstellungsformen

Neben der verbalen Darstellung wie im 1. Beispiel auf Seite 30 gibt es noch andere **Darstellungsformen** (Möglichkeiten, eine Funktion zu beschreiben).

Darstellungsformen einer Funktion $f\colon\ [-4; 4] \to [-10; 6],\ x \mapsto y$

Termdarstellung

$f(x) = \frac{x^3}{8} - 2$

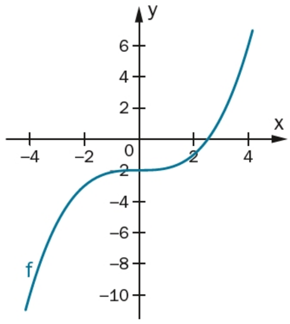
Funktionsgleichung

$y = \frac{x^3}{8} - 2$

Wertetabelle

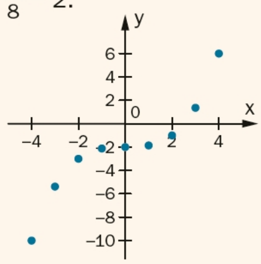
x	−4	−2	0	2	4
$f(x)$	−10	−3	−2	−1	6

Graph (Verlauf) einer Funktion *f*



Hinweise

- Zwischen Termdarstellung und Funktionsgleichung wird oft nicht unterschieden.
- Der **Funktionsterm** ist die rechte Seite der Termdarstellung, z. B. $\frac{x^3}{8} - 2$.
- Eine Formel kann als Funktion interpretiert werden.
- In einer Wertetabelle werden **Wertepaare** (x, y) aufgelistet, die durch die reelle Funktion $f\colon\ x \mapsto y$ festgelegt werden.
- Der Graph muss keine Kurve sein, sondern kann wie in der Abbildung auch aus isolierten Punkten bestehen (z. B. wenn die Definitionsmenge = $\mathbb{Z}$ ist).



Beispiel 1: Wurzelfunktion

Beispiel 1: Wurzelfunktion

Bsp $f\colon\ [-1;\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+1}$

Gehe schrittweise vor, um den Funktionsgraphen zu zeichnen:

1. Wertetabelle erstellen, z. B.

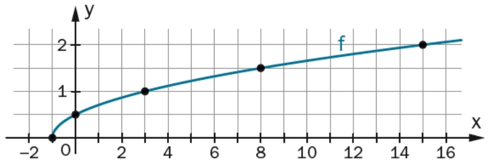
$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-1+1} = 0$

$f(0) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0+1} = \frac{1}{2}$ usw.

x	-1	0	3	8	15
$f(x)$	0	0,5	1	1,5	2

2. Punkte aus der Wertetabelle in ein Koordinatensystem eintragen

3. Punkte durch eine Kurve verbinden



Beispiel 2: Formel als Funktion

Beispiel 2: Formel als Funktion

Bsp Durchmesser-Formel[1] für die Berechnung der Kochzeit eines weichen Eis:

$t = 0{,}0016 \cdot d^2 \cdot \ln\left(\frac{100 - T_{\text{Start}}}{19}\right)$

t … Kochzeit in Minuten
d … Durchmesser des Eis in mm
T_{Start} … Temperatur des Eis vor Kochbeginn

1. Die Kochzeit t hängt als quadratische Funktion vom Durchmesser d des Eis ab.

2. Zwischen der Kochzeit und der Temperatur des Eis vor Kochbeginn besteht ein logarithmischer Zusammenhang.

Eigenschaften

Symmetrie

Symmetrie

Eigenschaften einer Funktion f mit $y = f(x)$ sind häufig aus dem Graphen ablesbar.
Ein Nachweis der entsprechenden Eigenschaft kann aber nur rechnerisch erfolgen.

Achsensymmetrie Graph symmetrisch zur y-Achse:
$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$

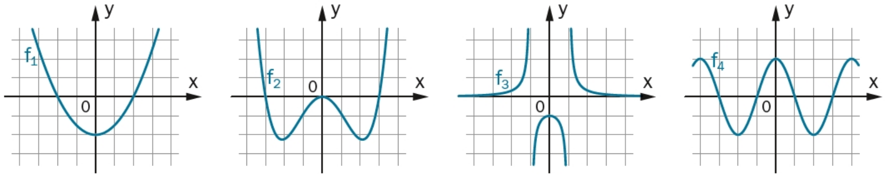
Symmetrie Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung:
$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$
oder achsensymmetrisch

Hinweis
Der Graph einer *geraden Funktion* ist symmetrisch zur y-Achse.
Der Graph einer *ungeraden Funktion* ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

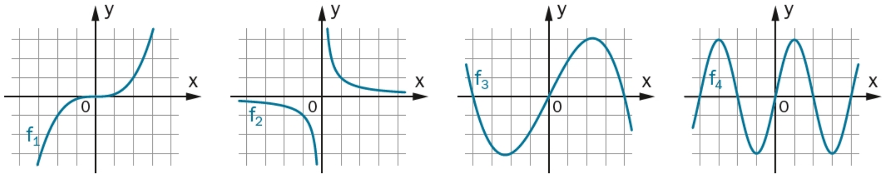
Beispiel 1: Symmetrie

Beispiel 1: Symmetrie

Bsp Einige Funktionsgraphen, die symmetrisch zur *y*-Achse sind:



Einige Funktionsgraphen, die symmetrisch zum Koordinatenursprung sind:

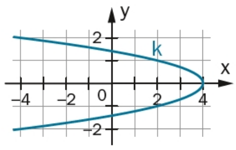


Beispiel 2: Symmetrie

Beispiel 2: Symmetrie

Bsp Die gegebene Kurve *k* ist symmetrisch zur *x*-Achse.

Das ist aber kein Graph einer Funktion, da die Zuordnung $x \mapsto y$ nicht eindeutig ist.
z. B. $2 \mapsto 1$ und $2 \mapsto -1$



Periode, Nullpunkt

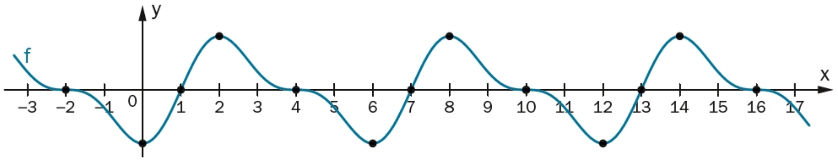
Periode, Nullpunkt

Periode, Periodizität	f: $x \mapsto y$ ist **periodisch** mit Periode $p \in \mathbb{R}$, wenn gilt: $f(x) = f(x + p)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$ Die Funktionswerte wiederholen sich im Abstand p.
Nullpunkt *N*	Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der *x*-Achse Koordinaten: $N = (x \mid 0)$ mit $f(x) = 0$ Die 1. Koordinate *x* von *N* heißt **Nullstelle**.

Beispiel: Periodische Funktion

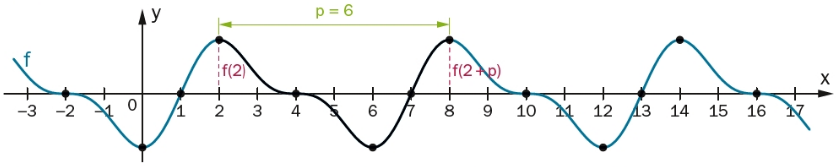
Beispiel: Periodische Funktion

Bsp Periode der durch ihren Graphen gegebenen Funktion *f* ablesen



Gehe schrittweise vor:

1. Markiere ein Kurvenstück, das sich in regelmäßigen Abständen wiederholt.



2. Die „Breite“ dieses Kurvenstücks ist die Periode: $p = 6$

Hinweis

Beachte: Die Periode entspricht *nicht* dem Abstand zwischen zwei Nullstellen.

Asymptote

Asymptote

Asymptote	Gerade, der sich ein Funktionsgraph beliebig nähert

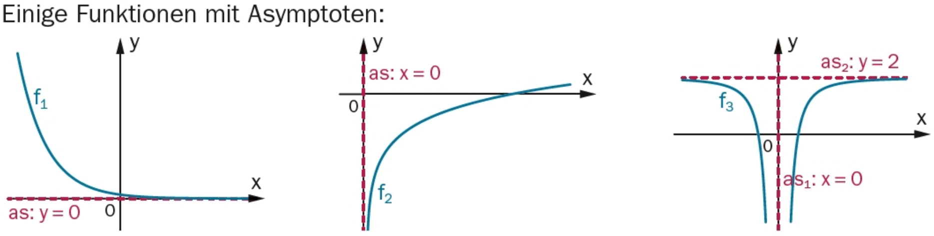
Hinweis

Das **asymptotisches Verhalten** einer Funktion wird beschrieben, indem man seine Asymptoten angibt. Der Graph einer Funktion kann jede beliebige Gerade (auch die Koordinatenachsen) als Asymptoten haben. Es können auch mehrere Asymptoten auftreten.

Beispiel 1: Verschiedene Asymptoten

Beispiel 1: Verschiedene Asymptoten

Bsp Einige Funktionen mit Asymptoten:



Beispiel 2: Asymptoten und Nullstellen

Beispiel 2: Asymptoten und Nullstellen

Bsp Funktion f mit $f(x) = \frac{8x^2 + 37x - 15}{8x + 32}$

Berechnung der senkrechten Asymptote und Nullpunkte:

Asymptote: Nenner = 0

$8x + 32 = 0$

as: $x = -4$

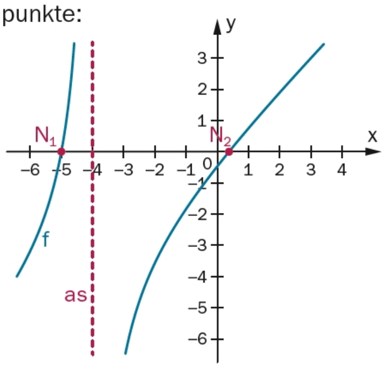
Nullstellen: $f(x) = 0$

$\frac{8x^2 + 37x - 15}{8x + 32} = 0$

Lösung z. B. mittels Technologie

$x_1 = -5,\ x_2 = \frac{3}{8}$

Nullpunkte: $N_1 = (-5\,|\,0),\ N_2 = \left(\frac{3}{8}\,\middle|\,0\right)$



Monotonie

Monotonie

Im Folgenden sind x_1, x_2 beliebige Werte aus einem Bereich $I \subseteq \mathbb{D}_f$ mit $x_1 < x_2$, d. h. x_1 liegt im Koordinatensystem links von x_2.

monoton fallend	$f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Der Funktionsgraph fällt oder ist waagrecht.
monoton steigend	$f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Der Funktionsgraph steigt oder ist waagrecht.
streng monoton fallend	$f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Der Funktionsgraph fällt.
streng monoton steigend	$f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Der Funktionsgraph steigt.
Monotoniewechsel	Verlauf des Graphen wechselt von (streng) monoton steigend zu (streng) monoton fallend (oder umgekehrt).

Hinweise

- Statt (*streng*) *monoton steigend* sagt man auch **(streng) monoton wachsend**.
- Zur Beschreibung der **Monotonie** bzw. des **Monotonieverlaufs** gibt man jeweils alle Intervalle an, in denen die Funktion (streng) monoton steigt bzw. fällt.
- Vgl. Kapitel 3. Analysis zum Zusammenhang der Monotonie mit der 1. Ableitung einer Funktion und zur Berechnung lokaler Extremstellen mithilfe der Differentialrechnung.

Extrema

Extrema

lokales Extremum größter oder kleinster Funktionswert $f(x)$ in einem Bereich $I \subset \mathbb{D}_f$
= lokaler Extremwert
liegt an einer Stelle, an der sich die Monotonie ändert

globales Extremum größter oder kleinster Funktionswert $f(x)$ in $\mathbb{D}_f$
= globaler Extremwert
ist ein lokales Extremum oder liegt am Rand von $\mathbb{D}_f$

Extremwert und -stelle (lokales oder globales) Extremum $f(x)$ und die Stelle x, an der er liegt

Maximum und -stelle größter Funktionswert $f(x)$ (lokal oder global) und die Stelle x, an der er liegt

Minimum und -stelle kleinster Funktionswert $f(x)$ (lokal oder global) und die Stelle x, an der er liegt

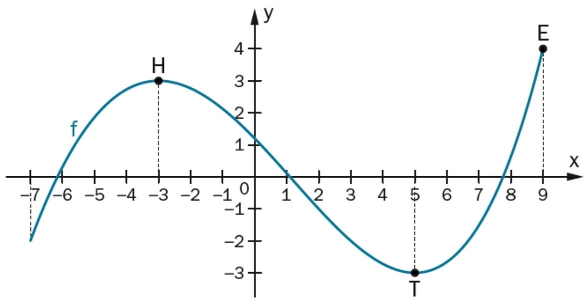
Hochpunkt Punkt $(x|f(x))$ auf dem Funktionsgraphen an einer lokalen Maximumstelle

Tiefpunkt Punkt $(x|f(x))$ auf dem Funktionsgraphen an einer lokalen Minimumstelle

Beispiel: Monotonie und Extrema

Beispiel: Monotonie und Extrema

Bsp Eine Funktion $f\colon\ [-7; 9] \to [-2; 4], y = f(x)$ ist durch ihren Graphen gegeben.



Monotonieverhalten:	streng monoton steigend	für $-7 < x < -3$
	streng monoton fallend	für $-3 < x < 5$
	streng monoton steigend	für $5 < x < 9$

lokale Maximumstelle: $x = -3$
lokale Minimumstelle: $x = 5$

Hochpunkt: $H = (-3|3)$
Tiefpunkt: $T = (5|-3)$

Das *globale Maximum* liegt am Rand: $f(9) = 4$
Das *globale Minimum* ist das lokale Minimum: $f(5) = -3$

Kruemmung, Wendepunkt, Sattelpunkt

Kruemmung, Wendepunkt, Sattelpunkt

positive Krümmung, Linkskrümmung	Steigung $f'(x)$ nimmt zu Graph macht eine Linkskurve
negative Krümmung, Rechtskrümmung	Steigung $f'(x)$ nimmt ab Graph macht eine Rechtskurve
Wendepunkt und -stelle	Punkt $(x\,\vert\,f(x))$ am Graphen von f, in dem die Krümmung verschwindet, und seine x-Koordinate $f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0$
Sattel- oder Terrassenpunkt	Wendepunkt $(x\,\vert\,f(x))$, in dem die Tangente an f waagrecht verläuft $f'(x) = f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0$

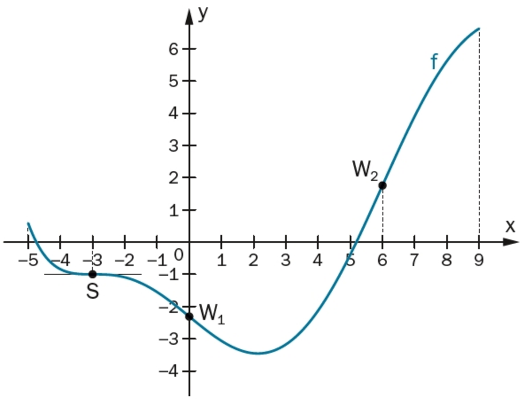
Hinweise

- Eine **Wendetangente** ist eine Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt.
- Zur Beschreibung der **Krümmung** bzw. des **Krümmungsverlaufs** gibt man jeweils alle Intervalle an, in denen der Funktionsgraph positiv (links) bzw. negativ (rechts) gekrümmt ist.
- Vgl. Kapitel 3. Analysis zum Zusammenhang der Krümmung mit der 2. Ableitung einer Funktion und zur Berechnung von Wendestellen mithilfe der Differentialrechnung.

Beispiel: Kruemmung, Wendepunkt, Sattelpunkt

Beispiel: Kruemmung, Wendepunkt, Sattelpunkt

Bsp Eine Funktion $f\colon\ [-5; 9] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ ist durch ihren Graphen gegeben.



Krümmungsverhalten:	positiv gekrümmt	für $-5 < x < -3$
	negativ gekrümmt	für $-3 < x < 0$
	positiv gekrümmt	für $0 < x < 6$
	negativ gekrümmt	für $6 < x < 9$

Wendestellen: $x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6$

Wendepunkte: $S = (-3\,\vert\,-1),\ W_1 = (0\,\vert\,-2{,}3),\ W_2 = (6\,\vert\,1{,}8)$

Sattelpunkt: $S = (-3\,\vert\,-1)$

Reelle Funktionen im Kontext

Ein **(mathematisches) Modell** versucht, den Zusammenhang zwischen mehreren Größen mit einer Funktion zu beschreiben.

Ein **lineares Modell** verwendet dazu eine lineare Funktion (vgl. Seite 39), ein **exponentielles Modell** eine Exponentialfunktion (vgl. Seite 49).

Hinweise

Arbeiten mit Funktionen im Kontext:
- Achte auf genaue Beschriftung der Koordinatenachsen (inkl. Einheiten) und eine sinnvolle Skalierung.
- Gib beim Interpretieren von Zahlenwerten immer auch die passenden Einheiten an.

Beispiel: Funktion im Kontext

Beispiel: Funktion im Kontext

Bsp

Das Volumen V eines Zylinders hängt von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:
$V = r^2 \pi h$ (Längen in cm)

Diese Formel legt eine Funktion V in mehreren Variablen fest:
$(r, h) \mapsto V(r, h)$

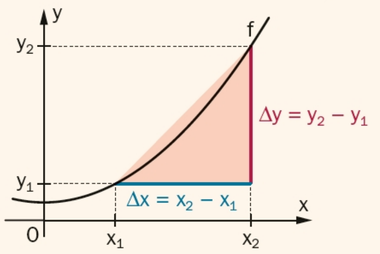
z. B. Volumen eines Zylinders mit Radius $r = 3$ cm und Höhe $h = 10$ cm:
$V(3, 10) = 3^2 \cdot \pi \cdot 10 = 90\pi \Rightarrow V \approx 283 \text{ cm}^3$

Änderungsmaße einer Funktion `f` auf einem Intervall [`x_1;x_2`]

absolute Änderung	gibt an, um wie viel sich der Funktionswert im Intervall $[x_1; x_2]$ verändert. $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$
relative Änderung	gibt an, wie stark sich der Funktionswert im Intervall $[x_1, x_2]$ relativ zum Anfangswert $y_1 = f(x_1)$ verändert; wird oft in Prozent angegeben $\frac{\Delta y}{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$
mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient	gibt an, wie stark sich der Funktionswert im Intervall $[x_1, x_2]$ durchschnittlich verändert, wenn das Argument x um 1 größer wird. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Hinweise

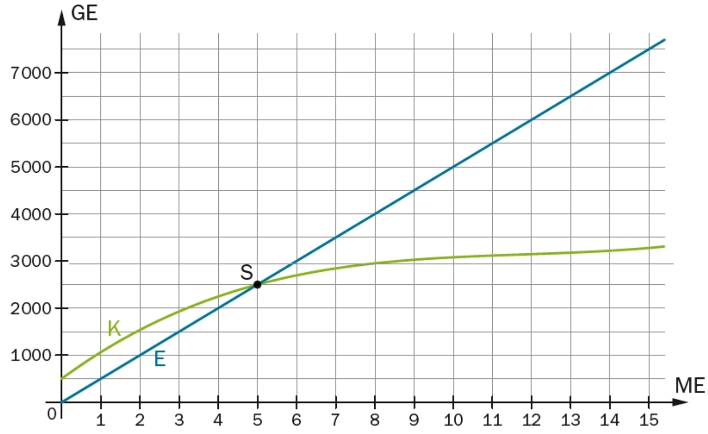
- In der Abbildung sind die vorher verwendeten Variablen dargestellt.
- Der Differenzenquotient ist die Steigung k einer Geraden, die durch die Punkte $(x_1|f(x_1))$ und $(x_2|f(x_2))$ verläuft.
- Beachte: Der **Änderungsfaktor** $\frac{y_2}{y_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ unterscheidet sich von der relativen Änderung. Beide Werte können aber in Prozent angegeben werden.



Beispiel: Erlös- und Kostenfunktion

Beispiel: Erlös- und Kostenfunktion

Bsp Erlös- und Kostenfunktion eines Unternehmens sind grafisch gegeben.



Differenzenquotient von K im Intervall [0; 5]:

$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(5) - K(0)}{5 - 0} = \frac{2500}{5} = 500$

⇒ Bei einer Produktion von 5 ME fallen durchschnittlich Kosten in der Höhe von 500 GE pro ME an.

Interpretation des Schnittpunktes:

$S = (5|2500)$

Bei 5 ME betragen Kosten und Erlös jeweils 2500 GE.

⇒ Bei mehr als 5 ME macht das Unternehmen Gewinn.