2. Matrizen

2.1 Was sind Matrizen?

Mit den Matrizen lernen wir neue Rechenobjekte kennen. Matrizen sind vor allem dann sehr nützlich, wenn mit Tabellen von Zahlen oder Termen gearbeitet werden soll. Matrizenrechnung stellt für die unterschiedlichsten Teilbereiche der Mathematik wichtige Werkzeuge bereit.

Einige Grundbegriffe

2.1 Eine Möbelkette betreibt in Oberösterreich zwei Filialen, eine in Linz und eine zweite in Steyr. Es werden zwei neue Designer-Sofas A und B in das Sortiment aufgenommen.
Die Filialleiter legen der Geschäftsleitung die Verkaufszahlen für das erste Quartal 2012 übersichtlich in Tabellenform vor.

Linz	A	B
Jan	108	65
Feb	302	127
Mär	207	114

Steyr	A	B
Jan	122	99
Feb	36	65
Mär	72	79

Stelle die Verkaufstabellen in Form von Matrizen dar. Was wird durch die Zeilen, was durch die Spalten beschrieben?

Ausführung:

Die Verkaufszahlen lassen sich in einem Zahlenschema (in einer *Matrix*), das in Zeilen und Spalten gegliedert ist, gut darstellen. In den Zeilen stehen die Zahlen für die Monate und in den Spalten für die Erzeugnisse.

$$L = \begin{pmatrix} 108 & 65 \\ 302 & 127 \\ 207 & 114 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 122 & 99 \\ 36 & 65 \\ 72 & 79 \end{pmatrix}$$

Die beiden Matrizen in Beispiel 2.1 sind (3×2)-Matrizen. Die erste Zahl ist die Anzahl der Zeilen, die zweite die Anzahl der Spalten („*Zeile mal Spalte*").

Die Position jedes Elements der Matrix wird durch den *Zeilenindex* und durch den *Spaltenindex* angegeben, z. B: $l_{3,2} = 114$; $s_{1,2} = 99$.

Definition: Matrix

Ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird $(m \times n)$*-Matrix* genannt.

Man bezeichnet $(m \times n)$ als den *Typ* oder die *Dimension* der Matrix. Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $M_{m,n}$.

Matrizen sind nicht nur praktisch zur übersichtlichen Beschreibung von Zusammenhängen, wo viele einzelne Daten auftreten, sondern sind so wie Zahlen oder Vektoren wichtige Rechenobjekte. Sie werden z. B. zur Beschreibung von Sachverhalten in der Naturwissenschaft und Technik, in der Wirtschaft, in der Soziologie und in der Informatik verwendet.

Definition: Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen sind dann gleich, wenn sie die *dieselbe Dimension* $(m \times n)$ besitzen und in den *entsprechenden Elementen* übereinstimmen.

2.2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & 31 \end{pmatrix}$

Was folgt aus $A = B$?

Ergebnis:

$a_{11} = 7$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = 12$, $a_{22} = 31$

Besondere Matrizen

1. *Quadratische Matrix:* Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten.

2. *Einheitsmatrix E:* Die Einheitsmatrix E ist die quadratische Matrix, bei der alle Elemente der Hauptdiagonale 1, die übrigen Elemente 0 sind:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Nullmatrix N:* Jedes Element der Nullmatrix N ist 0.

4. Eine einzeilige Matrix heißt *Zeilenvektor:*

$$M = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15})$$

5. Eine einspaltige Matrix heißt *Spaltenvektor:*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

6. Vertauscht man in einer Matrix A alle Zeilen mit den ihnen entsprechenden Spalten, so erhält man die zu A *transponierte Matrix* A^T.

7. Gilt bei einer quadratischen Matrix $A = A^T$, so ist A eine *symmetrische Matrix*.

2.3 Transponiere die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ausführung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad C^T = (2, 3, 5)$$

22822_TM7_AM.indb 10 27.02.12 16:10

2.2 Rechnen mit Matrizen

Addition und Subtraktion von Matrizen

2.4 Verwende weiter die Angaben aus Beispiel 2.1.

a) Die Firmenleitung möchte die Gesamtabsatzzahlen von Linz und Steyr für die beiden Sofas A und B – getrennt für die einzelnen Monate – ermitteln. Wie ist vorzugehen?

b) Wie lassen sich die Verkaufszahlen bequem vergleichen?

Ausführung:

Bilde $L + S$ und $L - S$:

a) $\begin{pmatrix} 108 & 65 \\ 302 & 127 \\ 207 & 114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 122 & 99 \\ 36 & 65 \\ 72 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 & 164 \\ 338 & 192 \\ 279 & 193 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 108 & 65 \\ 302 & 127 \\ 207 & 114 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 122 & 99 \\ 36 & 65 \\ 72 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -34 \\ 266 & 62 \\ 135 & 35 \end{pmatrix}$

Du addierst bzw. subtrahierst also elementeweise jeweils die Elemente, die an der gleichen Stelle in den Matrizen stehen. Das ist natürlich nur sinnvoll, wenn die beiden Matrizen gleiche Zeilen- und Spaltenanzahlen aufweisen.

Definition: Zwei Matrizen A und B gleichen Typs werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die *entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert*.

Man schreibt: $A + B = C$ bzw. $A - B = D$

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

2.5 Durch eine Werbekampagne sollen die Verkaufszahlen angehoben werden. In Linz erwartet man sich im 2. Quartal des Jahres eine Steigerung um 15 %, in Steyr um 30 %. Wie sehen die Verkaufszahlen für die beiden Standorte dann aus? (Runde auf Ganze!)

Ausführung:

$1{,}15 \cdot L = 1{,}15 \cdot \begin{pmatrix} 108 & 65 \\ 302 & 127 \\ 207 & 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124 & 75 \\ 347 & 146 \\ 238 & 131 \end{pmatrix}$

$1{,}3 \cdot S = 1{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 122 & 99 \\ 36 & 65 \\ 72 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157 & 129 \\ 47 & 85 \\ 94 & 103 \end{pmatrix}$

Damit hast du eine sogenannte *Skalarmultiplikation* ausgeführt. Ein Skalar ist im Unterschied zu einem Vektor oder einer Matrix eine Größe, die nur aus einer einzigen Komponente besteht.

Definition: Eine Matrix A wird mit einer reellen Zahl $u \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man *jedes Element von A mit u multipliziert*. Man schreibt: $u \cdot A = B$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

2.6 Eine Textilkette lässt T-Shirts in den vier Größen Small, Medium, Large und XLarge herstellen. Zur Produktion werden in einer Abteilung die beiden Maschinen M_A und M_B durchlaufen. Die verschiedenen Produkte benötigen unterschiedliche Arbeitszeiten (in min) auf den Maschinen, die in der sogenannten Input-Matrix zusammengestellt werden:

	S	M	L	XL
M_A	6	4	7	3
M_B	8	7	4	5

Von den Produkten S, M, L, und XL werden für eine Filiale 250, 300, 400 bzw. 380 Mengeneinheiten benötigt. Bestimme die gesamte Arbeitszeit der beiden Maschinen!

Ausführung:

Diese Frage lässt sich einfach durch Nachrechnen beantworten. Mit Matrizen geht es besonders übersichtlich:

$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \\ 400 \\ 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,640 \\ 7\,600 \end{pmatrix}$

Wir berechnen also das skalare Produkt der ersten Zeile der Matrix mit dem *Stückmengenvektor*; dies ergibt das erste Element des Ergebnisvektors. Die skalare Multiplikation der zweiten Matrixzeile mit dem Stückmengenvektor ergibt das zweite Element des Ergebnisvektors. Damit dies funktioniert, muss die Spaltenanzahl der Matrix mit der Zeilenanzahl des Vektors übereinstimmen: $(2 \times \boxed{4}) \cdot (\boxed{4} \times 1) = (2 \times 1)$.

Definition: Wird eine Matrix A mit einem Vektor $\vec{v}$ multipliziert, so werden die *einzelnen Zeilen der Matrix mit dem Vektor skalar multipliziert.*

Matrix mal Spaltenvektor = Spaltenvektor

$(m \times \boxed{n}) \cdot (\boxed{n} \times 1) = (m \times 1)$

Zeilenvektor mal Matrix = Zeilenvektor

$(1 \times \boxed{n}) \cdot (\boxed{n} \times m) = (1 \times m)$

Aufgaben

2.7 Gegeben sind folgende Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Berechne: **a)** $A + B$ **b)** $A - B$

c) $3{,}5 \cdot A - 1{,}5 \cdot B$ **d)** $A \cdot C$ **e)** $B \cdot C$

f) Vereinfache die Matrix B durch Herausheben.

2.8 Recherchiere: Wie lassen sich mit einem CAS Matrizenrechnungen ausführen?

Multiplikation von Matrizen

2.9 Wir setzen Beispiel 2.6 fort.
Die für die Herstellung von T-Shirts in den Größen S, M, L und XL benötigten Arbeitszeiten (in min) auf den Maschinen M_A und M_B sind wieder:

	S	M	L	XL
M_A	6	4	7	3
M_B	8	7	4	5

Von den T-Shirts in S, M, L, und XL werden
für die Filiale A: 250, 300, 400 bzw. 380,
für die Filiale B: 150, 200, 200 bzw. 150 und
für die Filiale C: 350, 550, 500 bzw. 450
Mengeneinheiten benötigt.
Wie lange werden die beiden Maschinen für diese Produktion beansprucht?

Ausführung:
Wir rechnen ähnlich wie in Beispiel 2.6. An die Stelle des Stückmengenvektors tritt die *Stückmengenmatrix*. Auch hier müssen die Spalten- und Zeilenanzahlen zusammenpassen.

Erinnere dich:
$(2 \times 4) \cdot (4 \times 1)$ führt zu (2×1)

Nun sieht das so aus:
$(2 \times 4) \cdot (4 \times 3)$ führt zu (2×3)

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 & 150 & 350 \\ 300 & 200 & 550 \\ 400 & 200 & 500 \\ 380 & 150 & 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,640 & 3\,550 & 9\,150 \\ 7\,600 & 4\,150 & 10\,900 \end{pmatrix}$$

Interpretiere das Ergebnis! Welche Bedeutung haben die einzelnen Elemente der Ergebnismatrix?

Definition:
Eine Matrix A vom Typ $(m \times p)$ und eine Matrix B vom Typ $(p \times n)$ werden multipliziert, indem die *m Zeilen* der Matrix A skalar mit den *n Spalten* der Matrix B multipliziert werden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1} & \dots\dots & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2p}b_{p1} & \dots\dots & a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1} & \dots\dots & a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist eine Matrix C vom Typ $(m \times n)$.

Aufgaben

2.10 Beim letzten PISA-Test wurden in einer Schule in vier verschiedenen 5. Klassen (A, B, C und D) die Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf ihre Mathematik-Leistungen überprüft. Hier die Ergebnisse:

	A	B	C	D
Kritisch	25 %	30 %	15 %	20 %
Normal	50 %	60 %	80 %	40 %
Top	25 %	10 %	5 %	40 %

	Schüler	Schülerinnen
A	12	14
B	13	11
C	16	10
D	10	19

a) Stelle die Daten in Form von Matrizen dar.
b) Bestimmte für den gesamten Jahrgang mit Matrizenmultiplikation die Anzahl der Schüler mit kritschen Werten, mit Normalwerten und mit Spitzenwerten.

2.11 Bilde das Produkt $A \cdot B$ und $B \cdot A$ der beiden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Welche zwei Besonderheiten treten hier auf?

Rechenregeln für Matrizen

Für die Menge $M_{m,\,n}$ der $(m \times n)$-Matrizen gelten die folgenden Grundrechenregeln:

Es seien A, B, C $(m \times n)$-Matrizen und u, v reelle Zahlen. Dann gilt:

Abgeschlossenheit
$A + B$ ist wieder eine $(m \times n)$-Matrix.

Assoziativgesetz
$(A + B) + C = A + (B + C)$

Existenz eines neutralen Elements
$A + O = A$

Existenz eines inversen Elements
$A + (-A) = O$

Kommutativgesetz
$A + B = B + A$

Multiplikation mit Einselement
$1 \cdot A = A$

Multiplikation mit Nullelement
$0 \cdot A = O$ (O … Nullmatrix)

Assoziativgesetz mit Skalar
$u \cdot (v \cdot A) = (u \cdot v) \cdot A$

Distributivgesetz Skalare – Matrix
$(u + v) \cdot A = u \cdot A + v \cdot A$

Distributivgesetz Skalar – Matrizen
$u \cdot (A + B) = u \cdot A + u \cdot B$

22822_TM7_AM.indb 12 27.02.12 16:10

Gelten diese Gesetze (wie hier) für eine Menge von Rechenobjekten, so liegt ein *Vektorraum* vor.

Für *quadratische Matrizen* kann das Produkt $A \cdot B$ und das Produkt $B \cdot A$ berechnet werden. Hier gilt aber im Allgemeinen das Kommutativgesetz nicht:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2.12 Gegeben sind die beiden quadratischen Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Ausführung:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

Eine besondere Klasse innerhalb der Menge der Matrizen sind also die quadratischen Matrizen. Innerhalb dieser sind wieder jene von besonderem Interesse, die umkehrbar sind, d. h. die auch ein inverses Element besitzen.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (E \text{ ... Einheitsmatrix})$$

Wie lässt sich eine Matrix invertieren?

Inverse Matrizen

Definition: Inverse Matrix

Gibt es zu einer Matrix A auch eine Matrix A^{-1}, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ gilt, so heißt A^{-1} die zu A inverse Matrix.

2.13 Ermittle die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ausführung:

Wir suchen die Elemente einer Matrix

$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dies führt uns auf folgende Gleichungssysteme:

$$e + 2g = 1 \qquad\qquad f + 2h = 0$$
$$3e + 4g = 0 \qquad\qquad 3f + 4h = 1$$
$$\Rightarrow e = -2,\ g = \tfrac{3}{2} \qquad\qquad \Rightarrow f = 1,\ h = -\tfrac{1}{2}$$

Damit ergibt sich: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nun das Ganze allgemein:

Wir suchen $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dies führt uns auf folgende Gleichungssysteme:

$$a \cdot e + b \cdot g = 1 \qquad\qquad a \cdot f + b \cdot h = 0$$
$$c \cdot e + d \cdot g = 0 \qquad\qquad c \cdot f + d \cdot h = 1$$

Aus dem ersten Gleichungssystem erhalten wir:

$$e = \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c}, \qquad g = -\frac{c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Aus dem zweiten Gleichungssystem erhalten wir:

$$f = -\frac{b}{a \cdot d - b \cdot c}, \qquad h = \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Offenbar spielt der Ausdruck im Nenner $a \cdot d - b \cdot c$ eine besondere Rolle:

Definition: Determinante einer (2 × 2)-Matrix

Der Ausdruck

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

wird als *Determinante* der Matrix A bezeichnet.

Damit können wir nun die inverse Matrix angeben:

Satz: Inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert die inverse Matrix A^{-1}

und es gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Definition: Determinante einer (3 × 3)-Matrix

Der Ausdruck

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

wird als Determinante der Matrix A bezeichnet.

Man kann zeigen, dass eine (3 × 3)-Matrix dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall heißt A *regulär*, sonst ist sie *singulär*.

Zur Bestimmung der Inversen einer (3 × 3)-Matrix muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Der Ansatz erfolgt analog zu dem von (2 × 2)-Matrizen. Aufgrund des Rechenaufwandes verwendet man dazu am besten ein geeignetes Computeralgebrasystem.

Aufgaben

2.14 Invertiere die folgenden Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.15 Zeige mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dass gilt:

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

b) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

22822_TM7_AM.indb 13 27.02.12 16:10

Grundrechenregeln für ($n \times n$)-Matrizen

Zusammenfassend können wir feststellen, dass für die Menge $M_{n,\,n}$ der ($n \times n$)-Matrizen die folgenden Grundrechenregeln gelten. Diese Rechenregeln stimmen bis auf das fehlende Kommutativgesetz der Multiplikation mit den Rechenregeln für ganze Zahlen überein.

Für alle A, B, C aus $M_{n,\,n}$ gilt:

Addition	Multiplikation
$A + B \in M_{n,\,n}$	$A \cdot B \in M_{n,\,n}$
$A + B = B + A$	–
$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
$A + O = A$	$A \cdot E = A$
$A + (-A) = O$	–
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	

Aufgaben

2.16 Gib an, wie die Determinante und die inverse Matrix mit einem CAS berechnet werden.

2.17 Vergleiche die Determinante einer Matrix mit der Determinante ihrer Transponierten und interpretiere das Ergebnis.

2.18 Untersuche mit einem CAS ob die Transponierte einer invertierbaren (regulären) Matrix ebenfalls invertierbar (regulär) ist.

2.3 Gleichungssysteme und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme lassen sich mithilfe von Matrizen besonders übersichtlich behandeln (vgl. *Thema Mathematik* 6, Seite 28):

2.19 Stelle das folgende Gleichungssystem mittels Matrizen dar und löse es.

$$\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 8 \\ x + 5y + 9z &= 4 \\ 2x + 6y + 5z &= -6 \end{aligned}$$

Ausführung:

Wir schreiben die Koeffizienten in einer Matrix, die Unbekannten und die Konstanten in Form von Spaltenvektoren an:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lautet somit kompakt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

bzw. kurz: $M \cdot \vec{x} = \vec{r}$

Beim Lösen des Gleichungssystems können wir nun so vorgehen, wie wir das von linearen Gleichungen her gewohnt sind:

$$M \cdot \vec{x} = \vec{r} \qquad | \cdot M^{-1}$$

$$\underbrace{M^{-1} \cdot M}_{E} \cdot \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{r}$$

also: $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{r}$

Wir benötigen lediglich die inverse Matrix M^{-1}! Wir bestimmen diese mit einem CAS:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{29}{90} & -\frac{19}{90} & \frac{11}{90} \\ -\frac{13}{90} & -\frac{7}{90} & \frac{23}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{8}{45} & -\frac{7}{45} \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{r}$ ergibt sich:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{29}{90} & -\frac{19}{90} & \frac{11}{90} \\ -\frac{13}{90} & -\frac{7}{90} & \frac{23}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{8}{45} & -\frac{7}{45} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Das Gleichungssystem besitzt die Lösung: $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$

Was ist aber, wenn das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung hat? Wir wissen ja, dass jeder Gleichung in drei Unbekannten eine Ebene im Raum entspricht und diese eine Reihe von speziellen Lagen zueinander haben können, sodass sich keine oder auch unendlich viele Lösungen ergeben. Am Lösungsverfahren mit Matrizen sehen wir, dass die Inverse M^{-1} zur Koeffizientenmatrix M existieren muss, damit es eine eindeutige Lösung gibt:

Satz: Ein Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{r}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine inverse Matrix M^{-1} zu M gibt. Damit diese existiert, muss $\det(M) \neq 0$ sein, d. h. die Koeffizientenmatrix M muss regulär sein.

Aufgaben

2.20 Stelle das Gleichungssystem in Matrizenform dar und löse es. Verwende zum Bestimmen der inversen Matrix M^{-1} gegebenenfalls eine Rechenhilfe.

a) I: $2x + 5y = 9$
II: $4x - y = 7$

b) I: $2x + 3y = 13$
II: $5x - 3y = 1$

2.21 Wie 2.20:

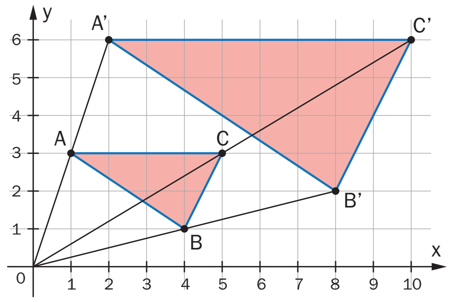
a) I: $2x + 3y + 3z = 2$
II: $x + 3y - 2z = 6$
III: $2x - y + z = 0$

b) I: $x - 5y + 2z = -2$
II: $4x + y = 5$
III: $2x + 3y - z = 4$

2.4 Geometrische Abbildungen

Streckung

Die folgende Abbildung zeigt ein Dreieck, das am Ursprung mit dem Faktor $k = 2$ gestreckt wurde.



Für $P'(x'|y')$ gilt: $\begin{aligned} x' &= k \cdot x \\ y' &= k \cdot y \end{aligned}$

Dies schreiben wir wie folgt an:

$x' = k \cdot x + 0 \cdot y$
$y' = 0 \cdot x + k \cdot y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Satz: Zentrische Streckung um den Faktor k
Die Abbildungsgleichung $P' = S \cdot P$ mit $S = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ ordnet jedem Punkt P der Zeichenebene einen Punkt zu. Eine Figur wird dabei gestreckt.

Aufgaben

2.22 Strecke das Dreieck $A(2|0)$, $B(4|4)$, $C(0|5)$ zentrisch mit den Faktoren
a) $k = \frac{5}{2}$, **b)** $k = \frac{1}{2}$, **c)** $k = -\frac{3}{2}$.

2.23 Beschreibe die Abbildungen mit den Streckungsfaktoren $k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$, $k = 0$ $-1 < k < 0$, $k = -1$, $k < -1$.

2.24 Zeige: Die Abbildungsgleichung $P' = S \cdot P + (1 - k) \cdot Z$ mit $S = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ und $Z = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$ beschreibt eine zentrische Streckung aus dem Zentrum $Z(z_x|z_y)$.

Spiegelung

Satz: Spiegelung an der Geraden $y = k \cdot x$
Die Abbildungsgleichung $P' = S_g \cdot P$

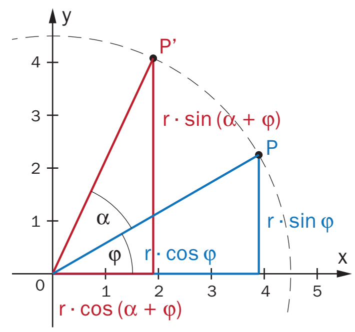
mit $S_g = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$ ordnet jedem Punkt P der Zeichenebene einen Punkt P' zu. Eine Figur wird dabei an der Geraden $y = k \cdot x$ gespiegelt.

2.25 Gib die entsprechende Abbildungsgleichung für die Spiegelung an der Geraden g an.
a) $g: y = 2 \cdot x$ **b)** $g: y = \frac{1}{3} \cdot x$
c) $g: x + y = 0$

2.26 Welche Matrix beschreibt die Spiegelung an der
a) x-Achse **b)** y-Achse
c) 1. Mediane **d)** 2. Mediane?

Drehung

Wir wollen einen Punkt P um den Winkel α drehen. Betrachten wir die folgende Abbildung.



Für $P(x|y)$ gilt:
$x = r \cdot \cos \varphi$
$y = r \cdot \sin \varphi$

Für $P'(x'|y')$ gilt:
$x' = r \cdot \cos(\alpha + \varphi)$
$y' = r \cdot \sin(\alpha + \varphi)$

Mit dem Additionstheorem und mit $r \cdot \cos \varphi = x$ und $r \cdot \sin \varphi = y$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\alpha + \varphi) = \\ &= r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi = \\ &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' &= r \cdot \sin(\alpha + \varphi) = \\ &= r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi = \\ &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Damit können wir die Abbildung auch mithilfe einer geeigneten Matrix anschreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Satz: Drehung um den Winkel α
Die Abbildungsgleichung $P' = D \cdot P$ mit $D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ordnet jedem Punkt P der Zeichenebene einen Punkt P' zu. Eine Figur wird dabei um den Winkel α gedreht.

2.27 Drehe das Quadrat $A(\sqrt{3}|1)$, $B(-1|\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{3}|1)$, D mit dem angegebenen Winkel um den Ursprung:
a) $\alpha = 60°$ **b)** $\alpha = -30°$ **c)** $\alpha = 90°$

2.28 Welche Drehung wird durch die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben?

Mehr zu diesem Thema sowie Lösungen zu den Aufgaben gibt es unter: www.thema-mathematik.at