I. Zahlensysteme in der Informatik

1. Tabelle

Dezimalsystem 10 Ziffern (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Dualsystem 2 Ziffern (0,1)	Hexadezimalsystem 16 Ziffern (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F)
.... 1000 100 10 1 .... 10^3 10^2 10^1 10^0	.... 16 8 4 2 1 .... 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0	.... 256 16 1 ....16^2 16^1 16^0
0	0	0
1	1	1
2	1 0	2
3	1 1	3
4	1 0 0	4
5	1 0 1	5
6	1 1 0	6
7	1 1 1	7
8	1 0 0 0	8
9	1 0 0 1	9
1 0	1 0 1 0	A
1 1	1 0 1 1	B
1 2	1 1 0 0	C
1 3	1 1 0 1	D
1 4	1 1 1 0	E
1 5	1 1 1 1	F
1 6	1 0 0 0 0	1 0

10, 2, 16 Basis des jeweiligen Zahlensystems. Sie gibt die Menge der Ziffern an. Die Potenzen der Basis geben die Stellenwerte an.

2. Umrechnungen

2.1 Dezimalzahlen ↔ Dualzahlen

Um Dualzahlen in Dezimalzahlen umzurechnen, multipliziert man die Ziffern mit ihren Stellenwerten und addiert anschließend die Produkte. Die Summe ist die Dezimaldarstellung der Zahl.

<u>Beispiel:</u>
$(1011011)_2$ = 1*64 + 0*32 + 1*16 + 1*8 + 0*4 + 1*2 +1*1 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91
$(10111)_2$ = 1*16 + 0*8 + 1*4 + 1*2 + 1*1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23

Um Dezimalzahlen in Dualzahlen umzurechnen dividiert man die Zahl durch 2 (Basis) und notiert sich den Rest. Man wiederholt diesen Vorgang dann mit dem Ergebnis so lange, bis der Quotient 0 ist. Wenn man sich dann Reste in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt also derjenige aus der ersten Division ist die niedrigste Stelle und derjenige aus der letzten die höchste, erhält man die Dualdarstellung.

Beispiel:
154 : 2 = 77 Rest 0
77 : 2 = 38 Rest 1
38 : 2 = 19 Rest 0
19 : 2 = 9 Rest 1
9 : 2 = 4 Rest 1
4 : 2 = 2 Rest 0
2 : 2 = 1 Rest 0
1 : 2 = 0 Rest 1
$\rightarrow 154 = (10011010)_2$

2.2 Dezimalzahlen ↔ Hexadezimalzahlen

Um Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen umzurechnen, multipliziert man die Ziffern mit ihren Stellenwerten und addiert anschließend die Produkte. Die Summe ist die Dezimaldarstellung der Zahl.

Beispiel:
$(ABC)_{16} = A_{(10)}*256 + B_{(11)}*16 + C_{(12)}*1 = 2560 + 176 + 12 = 2748$
$(FF)_{16} = F_{(15)}*16 + F*1 = 240 + 15 = 255$

Um Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen umzurechnen dividiert man die Zahl durch 16 (Basis) und notiert sich den Rest. Man wiederholt diesen Vorgang dann mit dem Ergebnis so lange, bis der Quotient 0 ist. Wenn man sich dann Reste in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt also derjenige aus der ersten Division ist die niedrigste Stelle und derjenige aus der letzten die höchste, erhält man die Hexadezimaldarstellung. (Vergiss nicht die Buchstaben zu verwenden!)

Beispiel:
200 : 16 = 12 Rest 8
12 : 16 = 0 Rest C
$\rightarrow 200 = (C8)_{16}$

255 : 16 = 15 Rest F
15 : 16 = 0 Rest F
$\rightarrow 255 = (FF)_{16}$

2.3 Dualzahlen ↔ Hexadezimalzahlen

Um Dualzahlen in Hexadezimalzahlen umzurechnen, fasst man einfach 4 Stellen zusammen und rechnet sie so in eine Dezimalzahlen um (sollte im Kopf gehen). Bei Ergebnissen die größer als 9 sind, bitte in Buchstaben umwandeln. Die verschiedenen Ergebnisse einfach in derselben Reihenfolge wie die Viererpacks hintereinanderhängen.

Beispiel:
$(1101\ 1001)_2 \rightarrow (1101)_2 = 13 = D; (1001)_2 = 9 \rightarrow (1101\ 1001)_2 = (D9)_{16}$

Beim Umrechnen von Hexadezimalzahlen in Dualzahlen, fasst man jede einzelne Stelle als Dezimalzahl auf und wandelt sie in eine Dualzahl um. Bei Zahlen die kleiner als 8 sind, werden vorne so viele Nullen angehängt, dass man auf 4 Stellen kommt. Diese Viererpacks werden wieder in der ursprünglichen Reihenfolge zusammen gefügt.

Beispiel:
$(5C)_{16} \rightarrow 5 = 101 = 0101;\ C = 12 = 1100 \rightarrow (5C)_{16} = (101\ 1100)_2$

3. Grundrechenarten im Dualsystem

($()_2$ ist nicht explizit geschrieben)

3.1 Addition

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Das Addieren funktioniert wie im Dezimalsystem, nur das man ein anderes 1plus1 verwenden muss. Ist ein Teilergebnis größer als 1 wird die letzte Stelle angeschrieben und der Rest wird zum Übertrag.

Beispiel:

```
  1101        13
  1111        15
 11100        28
```

3.2 Subtraktion

-	0	1
0	0	1
1	1 und 1 Ü	0

Funktioniert auch wie im Dezimalsystem.

Beispiel:

```
  111010      59
 -101111    - 47
    1011      12
```

Eine Rechenmaschine kann nur addieren, das genügt. Alle anderen Grundrechenarten lassen sich auf die Addition zurückführen.
Ein Rechner verwendet Zahlen, bei denen die erste Stelle das Vorzeichen angibt (0 = +, 1 = -). Die restlichen Ziffern bilden die eigentliche Zahl. Negative Zahlen sind die richtigen Komplemente ihrer positiven Brüder (Zahl aus invertierten Ziffern + 1). Um also eine Subtraktion durchzuführen bildet man aus dem Subtrahenden das Zweierkomplement und addiert dann Minuend und Subtrahend wobei beim Ergebnis Ziffern, die die Bit Zahl des Rechners übersteigen einfach weggelassen werden.

Beispiel:
$0111 - 0110 = 0111 + 1001 + 1 = \cancel{1}\,0001$

3.3 Multiplikation

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Funktioniert wie im Dezimalsystem, sogar mit demselben allerdings gekürzten 1mal1.

Beispiel:

```
 1101 * 101          13 * 5
 1101                65
   0000
     1101
1000001
```

Eine besondere Multiplikation ist der so genannte Left-Shift. Dabei wird die Dualzahl mit einem Stellenwert multipliziert, wodurch hinten Nullen angehängt werden.

Beispiel:
1101 * 10 = 11010

Da die Multiplikation eine fortgesetzte Addition ist, lässt sie sich natürlich auf eine Addition zurückführen. (a * n = a + a + ... + a + a)

3.4 Division

Funktioniert wie im Dezimalsystem.

Beispiel:

```
1010 : 101 = 10          10001 : 101 = 11
0000                     00111
   0R                       010R
```

Eine Division lässt sich auf eine Subtraktion (und damit letztendlich auf eine Addition) zurückführen.