Themenseite Komplexe Zahlen als Vektoren

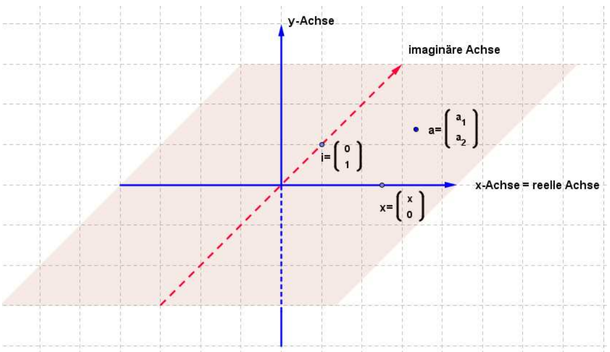
Im Folgenden wollen wir komplexe Zahlen wie Vektoren als Zahlentupeln anschreiben: die erste Koordinate soll dabei den Realteil, die zweite den Imaginärteil darstellen.
Reellen Zahlen x_1 haben dann stets die Gestalt $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, imaginäre Zahlen $i \cdot x_2$ die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
Insbesondere müssen wir für die imaginäre Einheit $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ setzen.

Die Addition und die Multiplikation sehen dann so aus:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Aus $z = x_1 + i \cdot x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ wird dann $z = x_1 + i \cdot x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{i} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Wie wir bereits gesehen habe, können wir komplexe Zahlen als Punkte oder Vektoren in der komplexen Zahlenebene einzeichnen. Wie sollen wir uns aber die komplexe Zahlenebene vorstellen? Wie die $x - y$-Ebene? Können wir sie mit dieser gleichsetzen? Nun, das ist nicht möglich, da wir ja beispielsweise in der $x - y$-Ebene Funktionsgraphen zeichnen und dies auch weiterhin machen wollen.
Besser ist es, sich die komplexe Zahlenebene als Fläche vorzustellen, die sich vor und hinter der x-Achse (der reellen Achse) befindet und in die die x-Achse eingebettet ist.

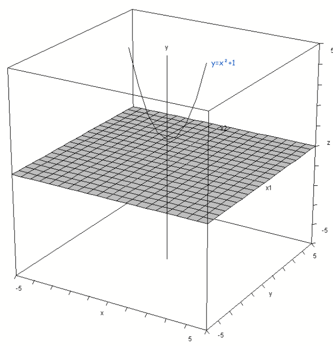


Die Addition zweier reellen Zahlen a+b=c können wir in der komplexen Zahlenebene in der Form $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ darstellen.

Die Addition zweier komplexer Zahlen a+b=c können wir in der komplexen Zahlenebene in der Form $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ darstellen.

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Wir haben gesehen, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in der Menge der reellen Zahlen keine Lösungen besitzt, wohl aber in der Menge der komplexen Zahlen.
$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$



Wir können - um dieses Ergebnis besser zu verstehen - die linke Seite der Gleichung als Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auffassen. Wir sehen sofort, dass diese Funktion keine Nullstellen entlang der reellen Achse hat, folglich die Gleichung keine reellen Lösungen besitzt.

Wir wissen aber, dass es rein imaginäre Lösungen gibt, die also vor und hinter der reellen Achse

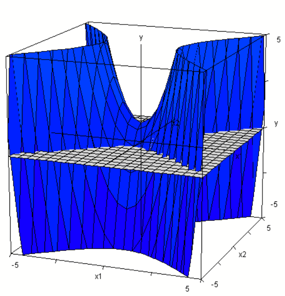
x_1 liegen müssen, also auf der Achse x_2. Gibt es eine Möglichkeit, die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auch vor und hinter der $x - y$-Ebene zu zeichnen? Wenn es eine solche Möglichkeit gibt, können wir dann auch die Nullstellen dieser Funktion sehen?

Die Funktion in der $f(x) = x^2 + 1$ über der komplexer Zahlenebene **Ausführung:** Um unser Ziel zu erreichen, interpretieren wir einfach den Funktionterm $x^2 + 1$ als Rechenobjekt der komplexen Zahlenebene.

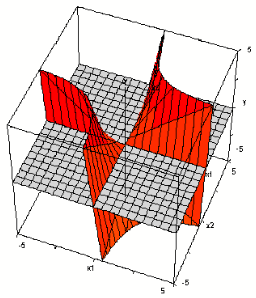
f(x)=0 $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 1 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir erhalten also zwei Gleichungen: $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ und $2x_1x_2 = 0$.

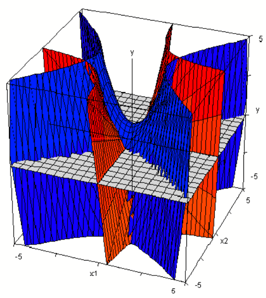
Was bedeuten die aber? Nun, wir können die linken Seiten dieser Gleichungen jeweils als Funktionen in zwei Variablen auffassen und erhalten damit
$u(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 1$ bzw. $v(x_1,x_2) = 2x_1x_2$. Diese lassen wir nun vom Computer plotten:



Die Realteilfunktion
$u(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 1$



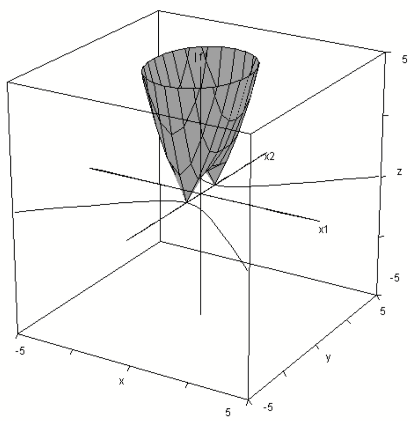
Die Imaginärteilfunktion
$v(x_1,x_2) = 2x_1x_2$



Real- und Imaginärteil
der Funkton $f(x) = x^2 + 1$

Wir sehen nun, dass die Funktion „auch ein imaginäres Leben“ besitzt. Diese imaginäre Existenz der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ können wir aber nicht direkt sehen, sie zerfällt in einen Realteil $u(x_1,x_2)$ und einen Imaginärteil $v(x_1,x2)$. (Beachte dabei, dass der Imaginärteil entlang der reellen Achse stets 0 ist.)

Die Nullstellen dieser Funktion und damit die Lösungen der Gleichung $x^2 + 1$ können wir aber noch nicht so ohne Weiteres erkennen. Dies gelingt uns aber, wenn wir zur entsprechenden Betragsfunktion übergehen.
Wenn nämlich eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 eine Nullstelle besitzt, dann muss auch ihr Betrag $|f(x)|$ an dieser Stelle eine Nullstelle besitzen und das wollen wir ausnützen. Wir bilden dazu:
$|f(x)| = \sqrt{(u(x_1,x_2))^2 + (v(x_1,x_2))^2}$
$|f(x)| = \sqrt{(x_1^2 - x_2^2 + 1)^2 + (2x_1x_2)^2}$
Wieder lassen wir plotten.



In der Abbildung (Absolutbetrag der Funktion $f(x)$) sehen wir nun wie die komplexen (hier sogar rein imaginären) Lösungen zu Stande kommen. Sie liegen dort, wo sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ gleich 0 ist. Und dies ist dort Fall wo auch $|f(x)| = 0$.