

1 Differentialrechnung

1.1 Differenzenquotient

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ von $f(x)$ in $[x_0; x_1]$ gibt

- die mittlere Änderung der Funktionswerte (mittlere Änderungsrate)
- die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0/f(x_0))$ und $(x_1/f(x_1))$

an.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

mit $x_0 \neq x_1$

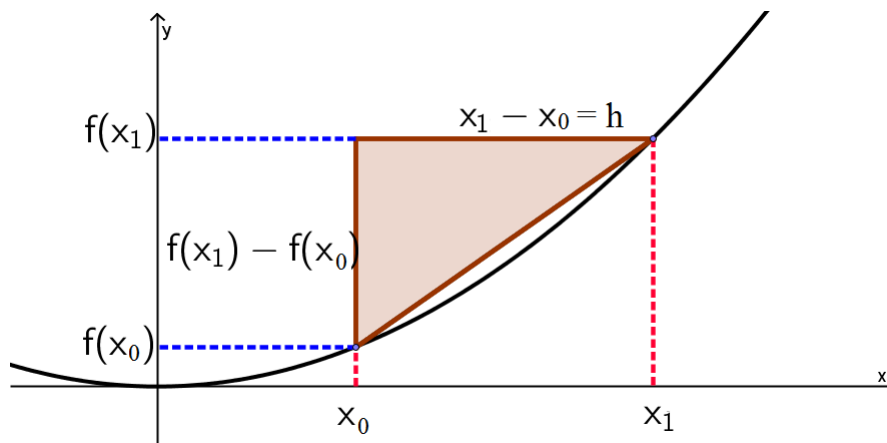


Abbildung 1: Differenzenquotient

1.2 Differentialquotient

Der Differentialquotient $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ von $f(x)$ an der Stelle x_0 gibt

- die momentane Änderung der Funktion (momentane Änderungsrate)
- die Steigung der Tangente im Punkte $(x_0/f(x_0))$

an.

Die Tangente an eine Kurve an der Stelle x_0 ergibt sich als Grenzfall einer Folge von Sekanten, bei denen die zweite Stelle x_1 immer näher an x_0 heranrückt. Der Abstand h zwischen x_0 und x_1 geht also gegen Null. Der Differentialquotient bzw. die Ableitung ist als Grenzwert der mittleren Änderungsrate zu sehen.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

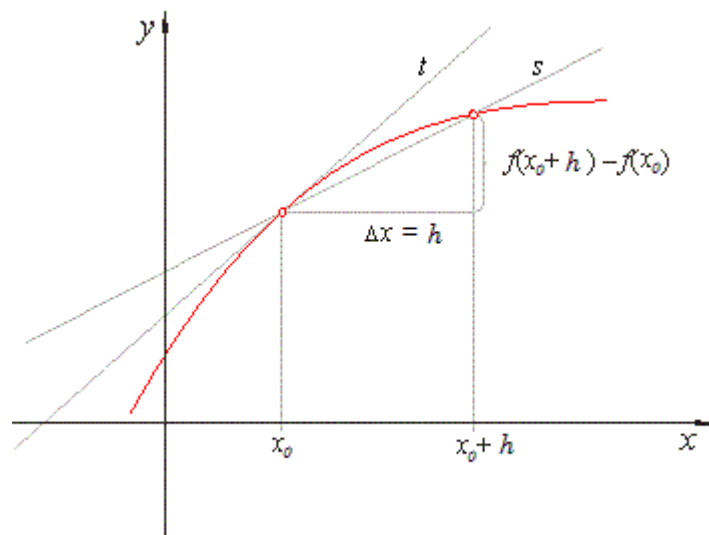


Abbildung 2: Differentialquotient

1.3 Ableitungsregeln

- Summen- bzw. Differenzregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

- Potenzregel:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

- Kettenregel:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Produktregel:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Quotientenregel:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Welche Bedeutung hat die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$?	Welche Bedeutung hat die zweite Ableitung $f''(x)$ einer Funktion $f(x)$?	Welche Bedeutung hat die dritte Ableitung $f'''(x)$ einer Funktion $f(x)$?
<u>Monotoniekriterium</u> Ist $f'(x) > 0$, so ist $f(x)$ streng monoton steigend Ist $f'(x) < 0$, so ist $f(x)$ streng monoton fallend Ist $f'(x) \geq 0$, so ist $f(x)$ monoton steigend Ist $f'(x) \leq 0$, so ist $f(x)$ monoton fallend	<u>Krümmungskriterium</u> Ist $f''(x) > 0$, so ist $f(x)$ linksgekrümmt Ist $f''(x) < 0$, so ist $f(x)$ rechtsgekrümmt Minimum Linkskrümmung also $f''(x_{Ext}) > 0$ Maximum Rechtskrümmung also $f''(x_{Ext}) < 0$	
Extrema: waagerechte Tangente also $f'(x_{Ext}) = 0$	Wendepunkte: keine Krümmung also $f''(x_W) = 0$	Rechts – links – Wendepunkt Krümmungswechsel von r zu l also $f'''(x_W) > 0$ Links – rechts – Wendepunkt Krümmungswechsel von l zu r also $f'''(x_W) < 0$
waagerechte Tangente also $f'(x_{Sattel}) = 0$ keine Krümmung also $f''(x_{Flach}) = 0$	Sattelpunkte (Terrassenpunkte): keine Krümmung also $f''(x_{Sattel}) = 0$ Flachpunkte: kein Krümmungswechsel also $f'''(x_{Flach}) = 0$	Krümmungswechsel also $f'''(x_{Sattel}) \neq 0$ $f''''(x_{Sattel}) \neq 0$