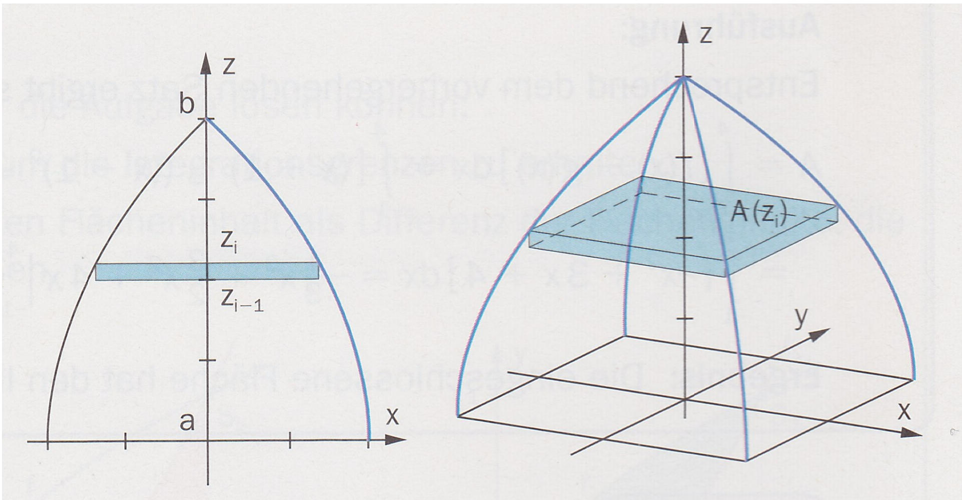
1 Volumsberechnung

1.1 Querschnittsflächen von Körpern



Durch eine Summe (vieler) kleiner Produkte $A(z_i) \cdot \triangle z$ (Produktsumme) wird das Volumen des Körpers näherungsweise berechnet.

- Beispiel 209: $A(z) = \frac{z^4}{8} - 4z^2 + 32$
  Volumen des Gewölbes näherungsweise durch Unterteilung in:

$$\text{10 Intervalle: } \sum_{i=0}^{9} A(0.4 \cdot i) \cdot 0.4 = 74.67$$

$$\text{100 Intervalle: } \sum_{i=0}^{99} A(0.04 \cdot i) \cdot 0.04 = 68.91$$

  Je feiner die Zerlegung, desto genauer ergibt sich das Volumen. Für $\triangle z \to 0$ erhalten wir:

$$\text{als Limes: } \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} A\left(\frac{4}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{4}{n} = 68.27$$

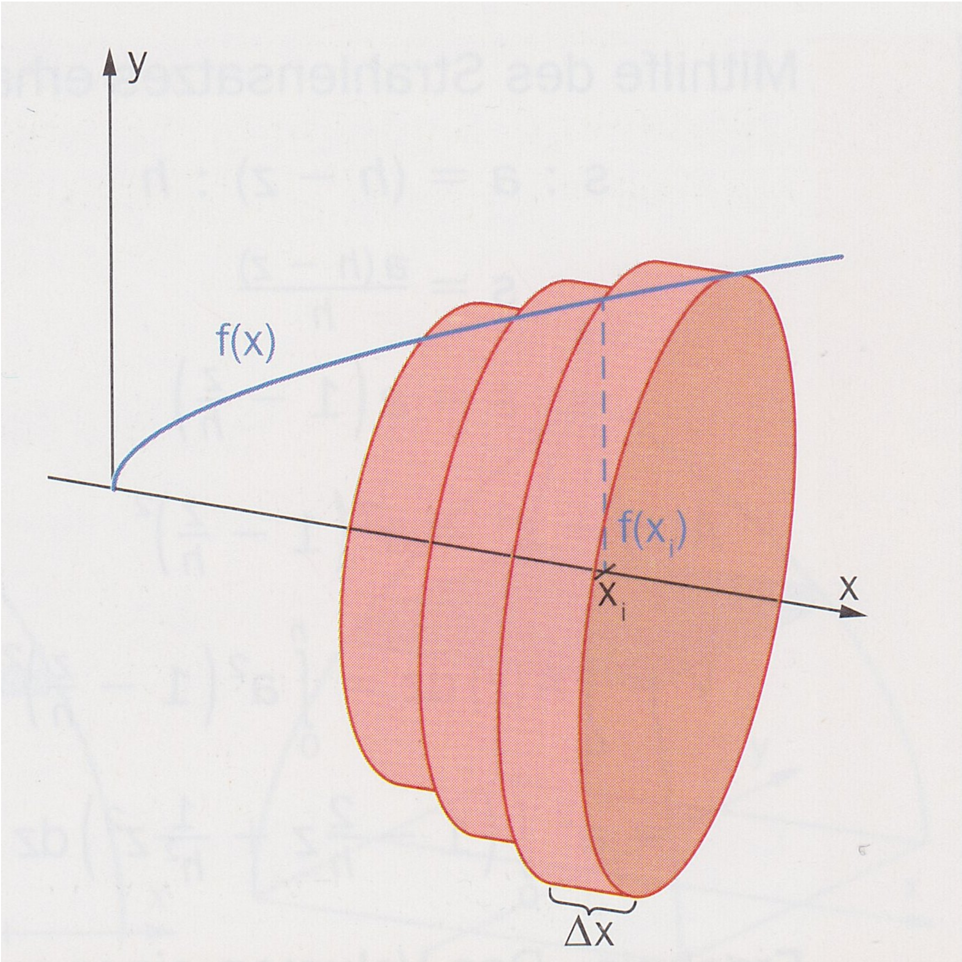
$$\text{mit Hilfe des Integrals: } \int_0^4 A(z)\,\mathrm{d}z = 68.27$$

Definition: Das Volumen eines Körpers mit Querschnittsfläche $A(z)$ in der Höhe z ist im Intervall $[a; b]$ das bestimmte Integral:

$$V = \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(z_i) \cdot \Delta z = \int_a^b A(z)\,dz$$

$A(z)$ ist dabei eine stetige Funktion.

1.2 Rotationskörper



Ein Rotationskörper entsteht, wenn sich eine Kurve um 360° um eine Achse dreht. Diese Kurve wird *Erzeugende* genannt.

Volumen bei Rotation um die x-Achse:

Rotation der Funktion $f(x)$ in $[a;b]$ um die x-Achse:

$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 \pi \vartriangle x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$