1 Skalares Produkt

Definition: Das *skalare Produkt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Das skalare Produkt ist eine reelle Zahl.

- **Orthogonalitätskriterium:**
  Das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist genau dann null, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- **Vektorielle Winkelformel:**
  Für den (eingeschlossenen Winkel) φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:
  $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- **Länge der Normalprojektion:**

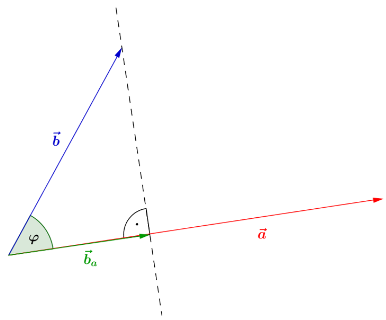
Wir berechnen die Länge der Normalprojektion $|\vec{b_a}|$ eines Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

Für den Winkel φ gilt: $\cos\varphi = \frac{|\vec{b_a}|}{|a|}$

Ebenso gilt: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Setzte gleich und multipliziere mit $|\vec{b}|$, daher: $|\vec{b_a}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

Da $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ ist, ergibt sich: $|\vec{b_a}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}_0$



für $-90° \le \varphi \le 90°$

Satz: Wird ein Vektor $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ projiziert, so gilt für die Länge des (normal-)projizierten Vektors: $|\vec{b_a}| = |\vec{b} \cdot \vec{a}_0|$

1.1 Normalvektorform der Geradengleichung

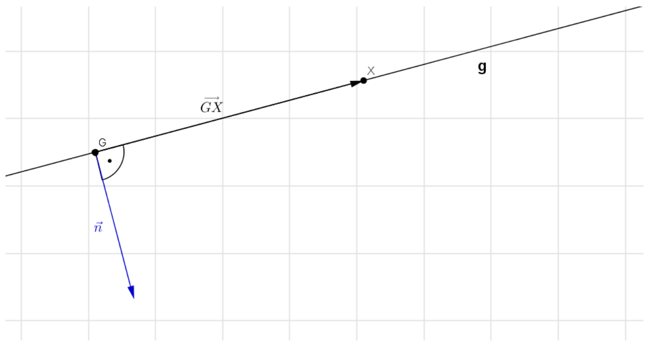
Für jeden Punkt X der Geraden g gilt:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{GX} = 0$

$\vec{n} \cdot (X - G) = 0$

$\vec{n} \cdot X - \vec{n} \cdot G = 0$

$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot G$



Normalvektorform der Geradengleichung

$$g:\ \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot G$$

$\vec{n}$ ... Normalvektor von g

G ... bekannter Punkt von g

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ... allg. Punkt

1.2 Normalvektorform der Ebene

Man kann eine Ebene mit ihrem Normalvektor $\vec{n}$ und einem Einstiegspunkt A festlegen.

Ebene e mit $A \in e$ und $\vec{n} \perp e$:
$\forall X \in e$ gilt: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{X} - \vec{A}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{X} \cdot \vec{n} - \vec{A} \cdot \vec{n} = 0$$

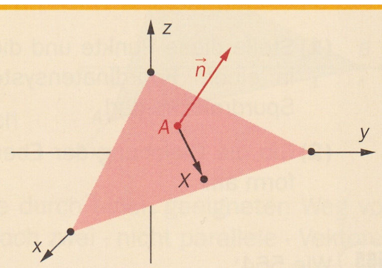
$$\Leftrightarrow \quad \vec{X} \cdot \vec{n} = \vec{A} \cdot \vec{n}$$

Ebenengleichung in Normalvektorform

ε: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ... allgemeiner Punkt der Ebene

$\vec{n}$ ... Normalvektor zu ε, NV (ε)

A ... (Einstiegs-)Punkt



$\vec{A} \cdot \vec{n} \in \mathbb{R}$

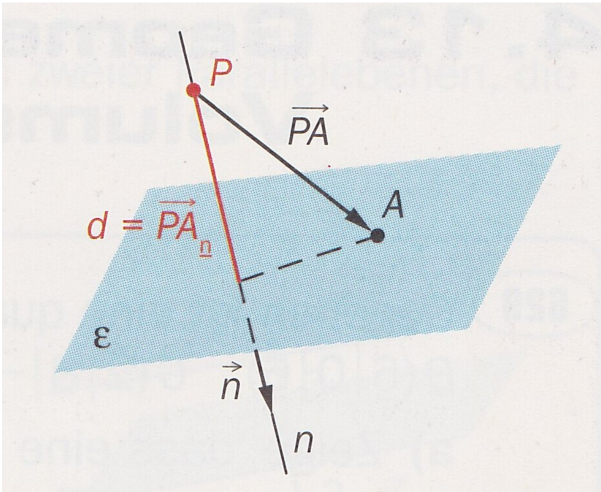
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = c$$

allgemeine Ebenengleichung: $n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = c$

1.3 Abstandsformel mittels Normalprojektion

Ist $\overrightarrow{PA}$ der Vektor, der vom entfernten Punkt P zu einem beliebigen Punkt A der Ebene zeigt, und $\vec{n}$ ein Normalvektor der Ebene, so ergibt sich der Abstand:

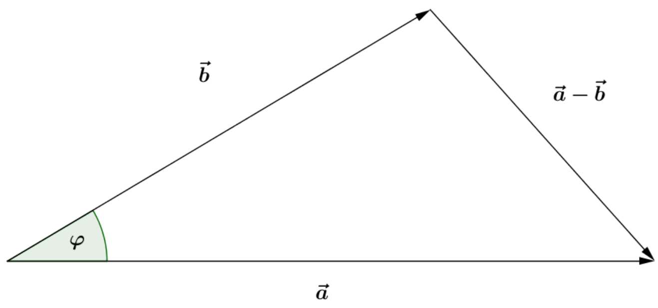
$d = |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_0|$



Hessische Abstandsformel: Abstand eines Punktes P von einer Ebene e mit $A \in e$ und $\vec{n}$ Normalvektor von e.

$$d = |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_0|$$

1.4 Winkel zwischen 2 Vektoren



$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{a}^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$